Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
11.10.2010
PD Dr. R. Jakob

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 1:

Wir betrachten das Funktional $\mathcal{F}(u) := \int_a^b \omega(x, u(x)) \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$ auf der Klasse $C^2([a, b], M)$, wobei $\omega \in C^2([a, b] \times M, \mathbb{R}_+)$ eine Funktion mit positiven Werten und $M \subset \mathbb{R}$ ein (uneigentliches) Intervall bezeichnen.

a) Wie lautet somit die Lagrange-Funktion $F(x, z, p)$ zu $\mathcal{F}$? Man zeige nun, dass die Euler-Lagrange-Gleichung $L_F(u) \equiv 0$ zu $\mathcal{F}$ zur Gleichung

$$\kappa(x)\, \omega(x, u(x)) \sqrt{1 + u'(x)^2} = \omega_z(x, u(x)) - \omega_x(x, u(x))\, u'(x)$$

auf $[a, b]$ äquivalent ist, wobei $\kappa(x) := \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}$ gerade die Krümmung des Graphen einer C^2-Funktion u im Punkt $(x, u(x))$ ausdrückt. (3)

b) Welche Gestalt muss somit eine (starke) $\mathcal{F}-$Extremale, also eine Lösung u^* von $L_F(u) \equiv 0$, im einfachen Spezialfall $\omega(x, z) \equiv 1$ haben ? Hätten wir dieses Resultat bereits anhand der Form des entsprechenden Variationsintegrals $\int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$ erahnen können ? Welche Eigenschaft einer beliebigen C^1-Funktion u wird nämlich von diesem Integral gemessen ? Welche Gleichung erhalten wir ausserdem für eine (starke) $\mathcal{F}-$Extremale u^* im Spezialfall $\omega(x, z) = e^z$? Ist der Graph solch eines u^* ein Kreisbogen, oder leider doch komplizierter ? (2)

c) Man zeige desweiteren, dass die Euler-Lagrange-Gleichung $L_F(u) \equiv 0$ zum Variationsintegral $\mathcal{F}(u) := \int_a^b \frac{1}{1+u'(x)^2}\, dx$ genau dann von einer C^2-Funktion v gelöst wird, falls diese $v''(x)\,(1 - 3\, v'(x)^2) \equiv 0$ auf $[a, b]$ erfüllt. (2)

Aufgabe 2:

Als einen weiteren Spezialfall von Aufgabe 1 (a) betrachten wir nun die Lagrange-Funktion $F(z, p) := z \sqrt{1 + p^2}$ und ihr entsprechendes Variationsintegral $\mathcal{F}(u) := \int_a^b u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$ auf der Klasse $C^2([a, b], \mathbb{R}_+)$.

a) Man zeige, dass die Funktionen $u(x) := \beta \cosh\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right)$, für beliebige Parameter $\beta > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, (starke) $\mathcal{F}-$Extremalen sind, und skizziere die Gestalt ihrer Graphen für $x_0 = 0$ und $\beta = 1/2, \beta = 1$ und $\beta = 2$, sogenannte ,,Kettenlinien". (3)

b) Man berechne (ungefähr) den maximalen Wert $d > 0$, sodass zwei Punkte mit den symmetrischen Koordinaten $(-d/2, 1)$ und $(d/2, 1)$ durch eine Kettenlinie, also durch den Graphen einer Funktion $u^*(x) = \beta^* \cosh\left(\frac{x}{\beta^*}\right)$ für einen optimal zu wählenden und ebenfalls zu berechnenden Parameter $\beta^* > 0$, miteinander verbunden werden können ! Man benutze hierzu, dass die beiden Lösungen der Gleichung $\coth(\gamma) = \gamma$ ungefähr $\pm 1,1996787$ betragen. Schliesslich entnehme man dem errungenen Resultat für β^* bzw. u^* und d, dass die beiden Ursprungsgeraden durch die Punkte $(-d/2, 1)$ bzw. $(d/2, 1)$ den Graphen des „optimalen" u^* in $(-d/2, 1)$ bzw. $(d/2, 1)$ exakt tangieren ! (4)

Abgabe: Am 26.10.10 in der Übung, bitte ! Am Mi, den 20.10. muss die Vorlesung leider ausfallen.