Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
07.01.2011
PD Dr. R. Jakob

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 17:

Wir betrachten eine nur von $(p_1, p_2) \hat{=} (p_{j\alpha}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \hat{=} \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{R})$, mit $j = 1, 2, 3$ und $\alpha = 1, 2$, abhängige Lagrange-Funktion $f(p_1, p_2)$, welche in der Form $f(p_1, p_2) := F(p_1 \wedge p_2)$ gegeben sei, wobei $F \in C^0(\mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ positiv homogen 1. Ordnung sei, also $F(t\,y) = t\,F(y)$ für jedes $y \in \mathbb{R}^3$ und jedes $t \geq 0$ erfülle, und ausserdem $| F(y) | \leq M \ | y |$ und $| F(y_1) - F(y_2) | \leq M \ | y_1 - y_2 |$ für jedes Paar $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, mit einer Konstanten $M > 0$. Über einem beliebigen beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir sodann das entsprechende ,,parametrische" Funktional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega f(u_{x^1}, u_{x^2})\, d(x^1, x^2) \equiv \int_\Omega F(u_{x^1} \wedge u_{x^2})\, d(x^1, x^2)$$

und teilen (anhand der Singularität von F im Ursprung) für jedes fixierte $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ das Integrationsgebiet Ω in die ,,reguläre Menge" $\mathcal{R}(u) := \{x \in \Omega \mid (u_{x^1} \wedge u_{x_2})(x) \neq 0\}$ und in dessen Komplement $\mathcal{S}(u) := \Omega \setminus \mathcal{R}(u)$ – die ,,singuläre Menge" zu u – auf.

a) Zunächst beweise man mittels eines einfachen Differenzenquotienten-Vergleichs für beliebige $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ die Beziehung

$$f_{p_{j\alpha}}(u_{x^1}, u_{x^2})(x)\, (\varphi_j)_{x^\alpha}(x) = \langle (\nabla_y F)(u_{x^1} \wedge u_{x^2})(x), (u_{x^1} \wedge \varphi_{x^2} + \varphi_{x^1} \wedge u_{x^2})(x) \rangle,$$

(Einstein-Konvention !) in jedem Punkt $x \in \mathcal{R}(u)$. (2)

b) Mit Hilfe des Resultats aus Teil (a) leite man nun für beliebige $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ die Formel

$$\begin{aligned} \delta^+ \mathcal{F}(u, \varphi) &:= \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathcal{F}(u + t\varphi) - \mathcal{F}(u)}{t} \\ &= \int_{\mathcal{R}(u)} \langle (\nabla_y F)(u_{x^1} \wedge u_{x^2}), u_{x^1} \wedge \varphi_{x^2} + \varphi_{x^1} \wedge u_{x^2} \rangle\, d(x^1, x^2) \qquad (1) \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}(u)} F(u_{x^1} \wedge \varphi_{x^2} + \varphi_{x^1} \wedge u_{x^2})\, d(x^1, x^2), \end{aligned}$$

für die erste rechts-seitige Variation von $\mathcal{F}$ in u in Richtung φ her ! Anhand der Singularität von F im Ursprung ist die Komposition $f((u + t\,\varphi)_{x^1}, (u + t\,\varphi)_{x^2})$ (i.a.) nicht nach dem Schar-Parameter t stetig differenzierbar, sodass man nicht mehr mit der Kombination ,,Satz über parameterabhängige Integrale und dann einfach Kettenregel" zu

Werke gehen darf. Somit muss man zur Herleitung der obigen Formel getrennt die beiden Differenzenquotienten $\frac{\mathcal{F}_{\mathcal{R}(u)}(u+t\varphi)-\mathcal{F}_{\mathcal{R}(u)}(u)}{t}$ und $\frac{\mathcal{F}_{\mathcal{S}(u)}(u+t\varphi)-\mathcal{F}_{\mathcal{S}(u)}(u)}{t}$ ausschreiben und unter Einsatz der Voraussetzungen an F den Konvergenz-Satz von Lebesgue zweimal „schlau" einsetzen ! (Hinweis: Was ist eigentlich $F(0)$?) (4)

c) Welche zu (1) korrespondierende Formel gilt nun wohl für die erste links-seitige Variation $\delta^-\mathcal{F}(u,\varphi) := \lim_{t\nearrow 0} \frac{\mathcal{F}(u+t\varphi)-\mathcal{F}(u)}{t}$? Unter welcher zusätzlichen Symmetrie-Forderung an F stimmen $\delta^+\mathcal{F}(u,\varphi)$ und $\delta^-\mathcal{F}(u,\varphi)$ für beliebige $u,\varphi \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ sicherlich überein, welche somit die Existenz der beid-seitigen ersten (äusseren) Variation $\delta\mathcal{F}(u,\varphi) := \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}(u+t\varphi)-\mathcal{F}(u)}{t}$ garantiert ? Und welche herzerfrischenden Gestalten nehmen $\delta^\pm\mathcal{F}(u,\varphi)$ für jedes konform parametrisierte u, also mit $|u_{x^1}| - |u_{x^2}| \equiv 0 \equiv \langle u_{x^1}, u_{x^2}\rangle$, an ? Existiert nun die beid-seitige erste Variation $\delta\mathcal{F}(u,\varphi)$ in jedem konform parametrisierten u bzgl. jeder Richtung φ, auch ohne irgendeine zusätzliche Eigenschaft von F ? Und kann diese sogar durch ein einziges Integral über ganz Ω ausgedrückt werden ? (3)

Aufgabe 18:

a) Als Anwendung der Resultate von Aufgabe 17 berechne man nun zunächst die rechts- und links-seitigen ersten Variationen $\delta^\pm\mathcal{A}(u,\varphi)$ des Oberflächen-Funktionals $\mathcal{A}(u) := \int_\Omega |u_{x^1} \wedge u_{x^2}|\, d(x^1,x^2)$ für beliebige $u,\varphi \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$! Wie ist also jenes F hier zu wählen ? Genügt dieses überhaupt den Bedingungen aus Aufgabe 17 ? Sei nun $\Pi_0 := \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,||\, p_1 | = | p_2 |, \langle p_1,p_2\rangle = 0\}$. Man beweise zunächst, dass

$$|p_1 \wedge p_2| \leq \frac{1}{2}(|p_1|^2 + |p_2|^2),\ \forall\,(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^6, \text{ und } |p_1 \wedge p_2| = \frac{1}{2}(|p_1|^2 + |p_2|^2) \text{ auf } \Pi_0$$

gilt, um zusammen mit den Resultaten von Aufgabe 17 (und auch 16) „elegant" einzusehen, dass sich die beid-seitige erste Variation von $\mathcal{A}$ in jedem konform parametrisierten $u \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ zum einfachen, bekannten Ausdruck

$$\delta\mathcal{A}(u,\varphi) = \int_\Omega (u_j)_{x^\alpha}\,(\varphi_j)_{x^\alpha}\, d(x^1,x^2) \equiv \int_\Omega \langle u_{x^1},\varphi_{x^1}\rangle + \langle u_{x^2},\varphi_{x^2}\rangle\, d(x^1,x^2) = \delta\mathcal{D}(u,\varphi)$$

in Richtung eines beliebigen $\varphi \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ reduziert, wobei $\mathcal{D}$ das gewöhnliche Dirichlet-Integral bezeichne. (3)

b) Nun berechne man mittels Aufgabe 17 die rechts- und links-seitigen ersten Variationen $\delta^\pm\mathcal{F}(u,\varphi)$ des Funktionals $\mathcal{F}(u) := \int_\Omega \langle u_{x^1} \wedge u_{x^2}, v\rangle\, d(x^1,x^2)$ für einen festen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$! Wie ist hier also jenes F zu wählen ? Genügt dieses den Bedingungen aus Aufgabe 17 ? Existiert nun nach Aufgabe 17 (c) sogar die beid-seitige erste Variation von $\mathcal{F}$ für beliebige $u,\varphi \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$? Falls dies der Fall sein sollte, so gebe man einen einzigen Integral-Ausdruck über ganz Ω für $\delta\mathcal{F}(u,\varphi)$ an, welcher sich bereits für eine noch bevorstehende partielle Integration eignet ! Nun schreibe man die (eigentliche) Lagrange-Funktion $f(p_1,p_2) := F(p_1 \wedge p_2)$ zu diesem $\mathcal{F}$ explizit aus, um deren partiellen Ableitungen nach $p_{j\alpha}$ und mittels Aufgabe 17 (a),(b) erneut zumindest $\delta^\pm\mathcal{F}_{\mathcal{R}(u)}(u,\varphi)$ auf $\mathcal{R}(u)$ eines beliebig fixierten $u \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ zu berechnen ! Erhalten wir hierdurch einen neuen oder wieder den gleichen Integral-Ausdruck über $\mathcal{R}(u)$? Wie lauten schliesslich das Eulersche Vektorfeld $L_f(u)$ eines beliebigen $u \in C^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ und somit die (ELG)'s zu diesem $\mathcal{F}$ und deren C^2-Lösungen auf Ω ? (3)

Abgabe: Am 18.01.11 in der Übung, bitte !