Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
14.01.2011
PD Dr. R. Jakob

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 19:

a) In Anschluss an Aufgabe 18 ist die erste äussere Variation $\delta\mathcal{A}(u,\varphi)$ des Oberflächen-Funktionals $\mathcal{A}(u) := \int_\Omega |\, u_{x^1} \wedge u_{x^2} \,|\; d(x^1,x^2)$, nun jedoch nur für Parametrisierungen $u \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3) \cap C^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$,,regulärer Flächen", d.h. mit $\mathcal{S}(u) = \emptyset$ bzw. $\mathcal{R}(u) = \Omega$, und in ,,Normalen-Richtung", d.h. für $\varphi = \eta\, \xi^{(u)}$ mit $\xi^{(u)} := \frac{u_{x^1} \wedge u_{x^2}}{|u_{x^1} \wedge u_{x^2}|}$ und $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$, zu berechnen ! Mittels der Weingarten-Ableitungs-Gleichungen: $\xi^{(u)}_{x^\alpha} = -b^\beta_\alpha\, u_{x^\beta}$ auf Ω versuche man einen überraschend simplen Integral-Ausdruck über Ω für $\delta\mathcal{A}(u,\eta\,\xi^{(u)})$ herzuleiten, in welchem die mittlere Krümmung $H^{(u)}$ der von u parametrisierten C^2-Fläche erscheint, wobei man die Formel $H^{(u)} = \frac{1}{2}(b^1_1 + b^2_2)$ (ohne deren Beweis) benutze. (4)

b) Welches Kriterium erhalten wir somit für eine beliebige Funktion $u \in C^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ mit $\mathcal{S}(u) = \emptyset$, die nicht-lineare partielle Differentialgleichung $H^{(u)} \equiv 0$ auf Ω zu lösen, d.h. eine ,,immergierte bzw. reguläre Minimalfläche" über Ω zu parametrisieren ? (1)

Aufgabe 20:

a) Ähnlich wie in Aufgabe 17 betrachten wir eine Lagrange-Funktion $f(z,(p_1,p_2))$, welche in der Form $f(z,(p_1,p_2)) := F(z, p_1 \wedge p_2)$ für $z \in \mathbb{R}^3$ und $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \hat{=} \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{R})$ gegeben sei, wobei hier das $F = F(z,y)$ nur aus $C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ und positiv homogen 1. Ordnung bzgl. der zweiten Variablen y sei, also $F(z,t\,y) = t\,F(z,y)$ für alle $(z,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und jedes $t \geq 0$ erfülle. Für das entsprechende ,,parametrische" Funktional

$$\mathcal{F}_\Omega(u) := \int_\Omega F(u, u_{x^1} \wedge u_{x^2})\, d(x^1,x^2)$$

beweise man nun $\mathcal{F}_{\Omega^*}(u \circ \Phi^{-1}) = \mathcal{F}_\Omega(u)$, wenn $\Phi : \bar{\Omega} \xrightarrow{\cong} \overline{\Omega^*}$ ein beliebiger orientierungstreuer Diffeomorphismus von einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ auf ein (durch Φ) ,,verzerrtes" Gebiet Ω^* und u eine beliebige Funktion aus $C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^3)$ seien. Welches Resultat erhalten wir hieraus insbesondere für die erste innere Variation $\partial\mathcal{F}_\Omega(u,\lambda)$ in einem beliebigen $u \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^3)$ und in Richtung eines beliebigen Vektorfeldes $\lambda \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^2)$? (3)

b) Nun betrachten wir wie in Aufgabe 16 die ,,Dirichlet-Energie"

$$\mathcal{D}_g(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega g_{jk}(u(x)) D_\beta u_j(x)\, D_\beta u_k(x)\, dx$$

von Flächen $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ über einem Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ zu einem positiv definiten, symmetrischen „metrischen Tensor" $(g_{jk}(z))_{j,k=1,\dots,n}$ auf $\mathbb{R}^n$. Mittels Theorem 5.5 aus der Vorlesung leite man die Formel

$$\partial\mathcal{D}_g(u,\lambda) = \frac{1}{2}\int_\Omega a_g\,(\lambda^1_{x^1} - \lambda^2_{x^2}) + b_g\,(\lambda^1_{x^2} + \lambda^2_{x^1})\,dx$$

für deren 1. innere Variation in Richtung eines beliebigen Vektorfeldes $\lambda \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ her, wobei hier $a_g := g_{jk}(u)\,(u_j)_{x^1}\,(u_k)_{x^1} - g_{jk}(u)\,(u_j)_{x^2}\,(u_k)_{x^2}$ und $b_g := 2\,g_{jk}(u)\,(u_j)_{x^1}\,(u_k)_{x^2}$ gesetzt wurden. (3)

c) Hiermit beweise man nun: Falls ein beliebiges $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ die Gleichung $\partial\mathcal{D}_g(u,\lambda) = 0$ zumindest für jedes $\lambda \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ erfüllt, so muss die Funktion $f_g(z) := a_g(z) - i b_g(z)$ eine bzgl. $z = x^1 + ix^2$ holomorphe Funktion auf Ω sein ! (3)

d)* Nehmen wir nun zu wissen an, dass ein $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (nur) die (ELG)'s zu $\mathcal{D}_g$, also $g_{jk}(u)\triangle u_k + \Gamma_{ijk}(u_i)_{x^\beta}\,(u_k)_{x^\beta} \equiv 0$ auf Ω, $j = 1,\dots,n$, löse. Kann man hieraus schon wieder folgern, dass die in (c) eingeführte Funktion $f_g := a_g - ib_g$ auf Ω holomorph sein muss ? (2)

Abgabe: Am 25.01.11 in der Übung, bitte !