Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
21.01.2011
PD Dr. R. Jakob

12. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 21:

Man beweise die Poincaré-Ungleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet, so erfüllt jedes $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ die Ungleichung

$$\int_\Omega | \, u \, |^2 \; dx \leq C(\Omega) \int_\Omega | \, Du \, |^2 \; dx$$

für eine nur von Ω abhängige Konstante $C(\Omega)$. Durch welche ,,geometrische Grösse" von Ω kann diese Konstante (in Anbetracht des Beweises dieser Ungleichung) offenbar grob abgeschätzt werden ? Könnte diese Ungleichung eigentlich auch für jede Funktion aus $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gelten ? (4)

Aufgabe 22:

a) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $\{u_j\}$ eine beschränkte Teilfolge, d.h. für die eine Konstante $C > 0$ mit $\|u_j\| := \sqrt{\langle u_j, u_j \rangle} \leq C$ für jedes j existiert. Man beweise, dass aus dieser Folge eine in H schwach konvergente Teilfolge $\{u_{\alpha_k}\}$ ausgewählt werden kann, welche also $\langle u_{\alpha_k}, v \rangle \longrightarrow \langle \bar{u}, v \rangle \quad \forall \, v \in H$ und für ein $\bar{u} \in H$ erfüllt. (4)
Hinweis: Man muss hierzu zunächst mittels des Diagonalfolgen-Verfahrens eine bestimmte Teilfolge von $\{u_j\}$ ins Auge fassen und anschliessend eine bestimmte beschränkte, lineare Abbildung L auf dem Abschluss W eines gewissen linearen Unterraums von H konstruieren. Man darf sodann ausnutzen, dass sich dieses $L \in W^*$ mittels des Rieszschen Darstellungssatzes ,,darstellen" lässt und dass ausserdem W ein orthogonales Komplement $W^\perp$ in H, also mit $H = W \oplus W^\perp$, besitzt.

b) Sei nun umgekehrt $\{\xi_j\}$ eine schwach konvergente Folge in einem Hilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so beweise man die Existenz einer Konstanten $K > 0$, mit welcher $\|\xi_j\| \leq K$ für jedes j gilt. (3)

c) Aus Teil (b) folgere man nun: Sei $\{\xi_j\}$ eine schwach konvergente Folge in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ auf einem beliebigen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, so existiert zu einem beliebig fixierten $\epsilon > 0$ eine Konstante $M_\epsilon > 0$, sodass die Teilmenge $K_{\epsilon,j} := \{x \in \Omega \, || \, \xi_j(x) \, | \geq M_\epsilon\}$ für jedes j ein kleineres $\mathcal{L}^m-$Mass als ϵ haben muss. Anhand welcher ,,analytischer Grössen" der ξ_j lässt sich M_ϵ (von unten) ,,konkret" abschätzen, und wie hängt diese untere Schranke für M_ϵ exakt von ϵ ab ? (3)

Abgabe: Am 01.02.11 in der Übung. Herzlichen Dank für die engagierte Teilnahme !