Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
18.10.2010
PD Dr. R. Jakob

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 3:

Wir untersuchen die Parametrisierung $x(\tau) := r\,(\tau - \sin(\tau))$, $z(\tau) := H + r\,(\cos(\tau) - 1)$, für ein $H > 0$ und ein $r > 0$, einer Lösung γ des Brachystochronen-Problems, welche also die Eigenschaft hat, dass eine beliebige Punktmasse unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang keiner Kurve schneller vom Punkt $(0, H)$ zu einem ,,tiefer gelegenen" Punkt $(b, \bar{H})$ (d.h. mit $b > 0$, $0 \leq \bar{H} < H$) nach rechts hinabgleitet als entlang γ, während τ von 0 bis zu einem gewissen Wert $\tau^* \in (0, \pi]$ läuft.

a) Nehmen wir nun an, dass die Tangente an die Spur $\gamma := \{(x(\tau), z(\tau)) \mid \tau \in [0, \tau^*]\}$ unserer Brachystochrone im Endpunkt $(b, \bar{H})$ exakt horizontal, also parallel zur $x-$Achse liege. Lässt sich anhand dieser Forderung zunächst das τ^* und anschliessend das r ermitteln, falls entweder H und b oder H und $\bar{H}$ vorgegeben sind ? Man gebe die entsprechenden Formeln für $r = r(H, b)$ bzw. $r = r(H, \bar{H})$ an ! Ist im ersten Fall die Endhöhe $\bar{H}$ noch frei wählbar oder bereits durch eine Formel $\bar{H} = \bar{H}(H, b)$ festgelegt ? Ebenso überlege man, ob im zweiten Fall die Endabweichung b bereits durch eine Formel $b = b(H, \bar{H})$ festgelegt ist ! (2)

b) Geben wir nun unter der in (a) gemachten Voraussetzung an die ,,Zielausrichtung" von γ konkret die Werte $H = 3$ und $b = \pi$ vor. Welche Werte haben dann τ^*, r und $\bar{H}$, und wie sieht diese spezielle, sogenannte ,,Zykloide" γ^* exakt aus ? Man zeichne deren Verlauf von ihrem Startpunkt $(0, 3)$ (bei $\tau = 0$) bis zu deren Endpunkt $(\pi, \bar{H})$ (bei $\tau = \tau^*$) und versuche anschliessend zu begründen, wieso die Parametrisierung von γ^* gerade die Bewegung eines Punktes wiedergibt, welcher sich am Rande eines rollenden Rades mit Radius 1 fortbewegt! (3)

c) Schliesslich berechne man deren Gesamt-Länge $\mathcal{L}(\gamma^*) = \int_0^{\tau^*} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{z})^2}\, d\tau$ und deren Krümmung $\kappa_{\gamma^*}(\tau) = \frac{\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{z})^2}^3}$ für $\tau \in (0, \tau^*]$! Ist $\kappa_{\gamma^*}(\tau)$ monoton wachsend oder fallend auf $(0, \tau^*]$? Welchen Grenzwert erhalten wir für $\lim_{\tau \searrow 0} \kappa_{\gamma^*}(\tau)$, und inwiefern verträgt sich dieses Resultat mit der Zeichnung aus Teil (b) ? (3)

Aufgabe 4:

Wir betrachten die Lagrange-Funktion $F(p) := (p^2 - 1)^2$ und ihr entsprechendes Variationsintegral $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^{1} (u'(x)^2 - 1)^2\, dx$ auf der Klasse $\mathcal{C} := \{u \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) \mid u(-1) = 0, u(1) = 0\}$.

a) Man beweise, dass $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} = 0$ gilt, indem man mittels „Glättung" bzw. Modifikation der nur Lipschitz-stetigen Funktion $u^*(x) := 1- \mid x \mid$ eine geeignete $\mathcal{F}-$Infimal-Folge $\{u_n\} \subset \mathcal{C}$ konstruiere, welche also aus Funktionen u_n besteht, die tatsächlich auf ganz $[-1, 1]$ stetig differenzierbar sind und $\mathcal{F}(u_n) \longrightarrow 0$ $(\leq \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F})$ für $n \to \infty$ erfüllen ! (4)

b) Zweitens begründe man exakt, warum es trotzdem in $\mathcal{C}$ keinen Minimierer v^* von $\mathcal{F}$, also keine C^1-Funktion $v^* \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(v^*) = 0 = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$, geben kann ! (2)

Abgabe: Am 01.11.10 in der Übung, bitte !