Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
28.10.2010
PD Dr. R. Jakob

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 5:

Wir untersuchen zur Lagrange-Funktion $F(x,p) := x^2\, p^2$ deren entsprechendes Variationsintegral $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^{1} x^2\, u'(x)^2\, dx$.

a) Man gebe explizit eine Infimalfolge $\{u_n\}$ für $\mathcal{F}$ aus der Funktionenklasse $\mathcal{C} := \{u \in Lip([-1,1],\mathbb{R}) \mid u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ an, welche $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) = 0$ erfüllt, deren Existenz also insbesondere $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} = 0$ beweist ! Desweiteren argumentiere man, warum es trotzdem in $\mathcal{C}$ keinen Minimierer v von $\mathcal{F}$ geben kann, also kein $v \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(v) = 0$! Hierzu darf bedenkenlos benutzt werden, dass die klassische Ableitung $u'(x)$ einer beliebigen Lipschitz-Funktion $u \in Lip(I,\mathbb{R})$ – I ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ – in $\mathcal{L}^1-$fast allen Punkten $x \in I$ existiert, dass deren L^1-Äquivalenz-Klasse u' sogar in $L^\infty(I,\mathbb{R})$ liegt (also dass es eine $\mathcal{L}^1-$messbare Teilmenge $E \subset I$ mit $\mathcal{L}^1(I \setminus E) = 0$ und $\sup_E \mid u' \mid < \infty$ gibt) und dass für jedes $u \in Lip(I,\mathbb{R})$ der Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung gilt: $u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u'(x)\, dx$, für beliebige Punkte $x_1 < x_2$ aus I. (3)

b) Nun gebe man explizit eine Infimalfolge $\{u_n\}$ für $\mathcal{F}$ aus der kleineren Funktionenklasse $\mathcal{C}^* := \{u \in C^1([-1,1],\mathbb{R}) \mid u(-1) = -1, u(1) = 1\} \subset \mathcal{C}$ wiederum mit $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) = 0$ an, deren Existenz also (wieder) insbesondere $\inf_{\mathcal{C}^*} \mathcal{F} = 0$ beweist ! Und warum kann es in $\mathcal{C}^*$ keinen Minimierer v^* von $\mathcal{F}$, also kein $v^* \in \mathcal{C}^*$ mit $\mathcal{F}(v^*) = 0$ geben ? (4)

Hinweis zur (b): Man versuche zur Konstruktion der Infimalfolge $\{u_n\} \subset \mathcal{C}^*$ (zu jeweils jedem n) zwei geeignete Parabel-Bögen ausgekocht ,,aneinanderzukleben".

Aufgabe 6:

Die Länge einer Kurve γ mit einer stetig differenzierbaren Parametrisierung $u : [0,1] \to (\mathbb{H}, g)$ in der ,,Poincaré-Halbebene" $(\mathbb{H}, g) := (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, g)$, ausgestattet mit der Riemannschen Metrik $g_{(x,y)}(v,w) := \frac{v^1 w^1 + v^2 w^2}{y^2}$, für beliebige $(x,y) \in \mathbb{H}$ und $v, w \in T_{(x,y)}\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^2$, wird durch das Funktional

$$\mathcal{L}_g(u) := \int_0^1 \sqrt{g_{u(t)}(\dot{u}(t), \dot{u}(t))}\, dt$$

gemessen.

a) Man gebe die zum Variations-Funktional $\mathcal{L}_g$ gehörende Lagrange-Funktion $L((z_1, z_2), (p_1, p_2))$ an und berechne mittels dieser die (ELG) zu $\mathcal{L}_g$ auf $[0, 1]$! Sind $u(t) := (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ für ein (bestimmtes ?) $\omega \in (0, \pi)$ oder $u(t) := (k, ct)$ für (gewisse ?) reelle Werte $k, c > 0$ oder vielleicht $u(t) := (ct, k)$, nun für $k > 0$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, starke Extremalen von $\mathcal{L}_g$? (3)

b) Statt des Längen-Funktionals $\mathcal{L}_g$ betrachte man nun die ,,Energie"

$$\mathcal{E}_g(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 g_{u(t)}(\dot{u}(t), \dot{u}(t))\, dt$$

einer stetig differenzierbaren Parametrisierung $u : [0, 1] \to (\mathbb{H}, g)$ einer beliebigen Kurve γ in $(\mathbb{H}, g)$. Man gebe wiederum die zum Variations-Funktional $\mathcal{E}_g$ gehörende Lagrange-Funktion $E((z_1, z_2), (p_1, p_2))$ an und berechne mittels dieser die (ELG) zu $\mathcal{E}_g$ auf $[0, 1]$! Nun überprüfe man, ob die drei obigen Parametrisierungs-Familien aus Teil (a) für vielleicht geeignete Wahlen der dortigen Parameter ω, c und k starke Extremalen von $\mathcal{E}_g$ sind, oder nicht ! (2)

c) Wie lauten die ersten Integrale aus Theorem 1.5 (aus der Vorlesung) zu L bzw. E und die sich aus diesen ergebenden Differentialgleichungen erster Ordnung für starke Extremalen von $\mathcal{L}_g$ bzw. $\mathcal{E}_g$? Erhalten wir aus Ihnen sofort weitere Informationen, wie beispielsweise über die Geschwindigkeit einer starken Extremalen von $\mathcal{L}_g$ oder $\mathcal{E}_g$ bei deren eventueller Annäherung an die $x-$Achse ? Oder hätte man mit Hilfe des ersten Integrals zu E und Theorem 1.5 ad hoc (also ohne Rechnung oder scharfes Nachdenken) die letzte Aufgabe in Teil (b) komplett lösen können ? (2)

Abgabe: Am 09.11.10 in der Übung, bitte !