Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
05.11.2010
PD Dr. R. Jakob

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 7:

Wir betrachten Rotationsflächen, die durch Rotation der Graphen von Funktionen aus der Randwert-Klasse $\mathcal{R} := \{u \in C^2([-d/2, d/2], \mathbb{R}_+) \mid u(-d/2) = 1 = u(d/2)\}$ um die $x-$Achse entstehen, die also durch die Parametrisierung $\Phi(x, \psi) := (x, u(x)\cos(\psi), u(x)\sin(\psi))$, für $\mid x \mid \leq d/2$ und $\psi \in [0, 2\pi)$, im $\mathbb{R}^3$ gegeben seien. Hierbei sei d der ,,magische Wert" aus Aufgabe 2 (b), also ungefähr $d \approx 1,325487$. Wir nennen im Folgenden K_1 und K_2 die beiden Kreise im $\mathbb{R}^3$, die durch Rotation der Punkte $(-d/2, 1, 0)$ und $(d/2, 1, 0)$ um die $x-$Achse entstehen.

a) Man berechne den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ einer beliebigen Rotationsfläche Φ als Funktional ihrer erzeugenden Funktion $u \in \mathcal{R}$ und stelle mit dessen Hilfe die entsprechenden (ELG) auf, welche also insbesondere von denjenigen Funktionen u aus $\mathcal{R}$ erfüllt werden, die in K_1 und K_2 eingespannte Rotationsflächen minimalen Flächeninhaltes generieren, welche also das Minimierungs-Problem $\mathcal{A}(\Phi) \equiv \mathcal{A}(u) \longrightarrow \min$ in $\mathcal{R}$ lösen ! Aus Aufgabe 2 kennen wir in der Tat eine ganz bestimmte Lösung $u^* \in \mathcal{R}$ der sich ergebenden (ELG) zu $\mathcal{A}$! Welche geometrische Form hat somit der durch dieses u^* generierte heisse Kandidat für die/eine Rotationsfläche Φ^* kleinsten Flächeninhalts, welche in die Kreise K_1 und K_2 eingespannt ist ? Man berechne deren Flächeninhalt $\mathcal{A}(\Phi^*)$ (u.a. mit Hilfe der in Aufgabe 2 ermittelten Werte $d \approx 1,325487$ und $\beta^* \approx 0,55267$) und vergleiche diesen mit demjenigen eines in die beiden Kreise K_1 und K_2 eingespannten Zylindermantels ! Welche dieser beiden Flächen hat nun den geringeren Inhalt ? (4)

b) In leichter Abwandlung von Teil (a) betrachten wir nun Rotationsflächen Φ, die durch Rotation der Graphen von Funktionen aus der Klasse $\mathcal{R}^* := \{u \in C^2([-1, 1], \mathbb{R}_+) \mid u(-1) = 0 = u(1)\}$ um die $x-$Achse entstehen und deren hierbei eingeschlossenes Volumen $\mathcal{V}(\Phi)$ auf den Wert 1 normiert sei. Man drücke zunächst das von einer Rotationsfläche Φ umschlossene Volumen $\mathcal{V}$ als Funktional ihrer erzeugenden Funktion $u \in \mathcal{R}^*$ aus und stelle mit dessen Hilfe (und mittels des Oberflächen-Funktionals $\mathcal{A}$) die ,,bedingten" (ELG) für (insbesondere) diejenigen Funktionen u aus $\mathcal{R}^*$ auf, welche Rotationsflächen minimalen Flächeninhalts unter der isoperimetrischen Nebenbedingung $\mathcal{V}(\Phi) \equiv \mathcal{V}(u) = 1$ generieren, welche also das Minimierungs-Problem: $\mathcal{A}(\Phi) \equiv \mathcal{A}(u) \longrightarrow \min$ in $\mathcal{R}^*$ mit $\mathcal{V}(\Phi) \equiv \mathcal{V}(u) = 1$ lösen ! Man bringe diese (ELG) in Zusammenhang mit der Krümmung κ_u der Graphen eventuell existierender Lösungen u aus $\mathcal{R}^*$! (2)

c) Die Spannung einer in die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ eingespannten und gedehnten Saite, welche wir als Graph einer beliebigen Funktion u aus der obigen Randwert-Klasse $\mathcal{R}^*$ im $\mathbb{R}^2$ darstellen wollen, werde durch das Integral $\mathcal{S}(u) := \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + u'(x)^2} - 1\, dx$

gemessen (im Modell-Fall). Nun soll die eingespannte Saite Graph(u) derart gedehnt werden, dass ihre Spannung minimal ausfällt, während jedoch der von ihr und der $x-$Achse eingeschlossene Bereich $Epi_u := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le u(x), x \in [-1,1]\}$ einen vorgeschriebenen Inhalt $\tilde{\mathcal{A}}(u) := \mathcal{L}^2(Epi_u) = c$, für ein festes $c > 0$, habe ! Man leite nun für das soeben beschriebene isoperimetrische Minimierungs-Problem: $\mathcal{S}(u) \longrightarrow$ min in $\mathcal{R}^*$ mit $\tilde{\mathcal{A}}(u) = c$ die entsprechenden ,,bedingten" (ELG) her ! Anhand der Taylor-Entwicklung $\sqrt{1+p^2} = 1 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{8}p^4 + \ldots$ ersetze man nun in schlampiger Physiker-Manier das Spannungs-Funktional S durch das einfachere Funktional $\tilde{\mathcal{S}}(u) := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(u'(x))^2\,dx$ und leite erneut die ,,bedingten" (ELG) für das vereinfachte isoperimetrische Problem: $\tilde{\mathcal{S}}(u) \longrightarrow$ min in $\mathcal{R}^*$ mit $\tilde{\mathcal{A}}(u) = c$ her ! Unter Ausnutzung der Neben-Bedingung $\tilde{\mathcal{A}}(u) = c$ beweise man, dass es höchstens eine Lösung u^* dieses isoperimetrischen Problems geben kann, nämlich $u^*(x) = \frac{3c}{4}(-x^2+1)$! Schliesslich berechne man deren Spannung $\mathcal{S}(u^*)$ und vergleiche deren Wert mit der approximierten Spannung $\tilde{\mathcal{S}}(u^*)$ für jeweils die konkreten Vorgaben $c = 1,2,3,4,5$! (4)

Hinweis zur (c): Lautet die Stammfunktion von $f(y) = \sqrt{1+y^2}$ vielleicht: $F(y) = \frac{1}{2}(y\sqrt{1+y^2} + \log(y + \sqrt{1+y^2}))$? Oder doch anders ?

Aufgabe 8:

Man beweise die folgende Verallgemeinerung von Theorem 3.2 aus der Vorlesung, leite also die ,,bedingten" (ELG) (in ihrer zunächst nur schwachen Formulierung) für C^1- Lösungen isoperimetrischer Probleme bei Vorgabe mehrerer Nebenbedingungen her:

a) Sei v innerhalb der Klasse $M_{[P,Q]}(\mathcal{G}_1 \equiv c_1, \mathcal{G}_2 \equiv c_2, \ldots, \mathcal{G}_r \equiv c_r)$ aller $C^1(I,\mathbb{R}^n)-$Kurven von P nach Q, welche den r isoperimetrischen Nebenbedingungen $\mathcal{G}_i(u) = c_i$, mit festen $c_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1,\ldots,r$, zu genügen haben, ein lokaler Mini- oder Maximierer eines Variations-Funktionals $\mathcal{F}$ (mit den gleichen Eigenschaften wie in Theorem 3.2), d.h. es gelte $\mathcal{F}(v) \le \mathcal{F}(u)$ oder $\mathcal{F}(v) \ge \mathcal{F}(u)$ für alle $u \in M_{[P,Q]}(\mathcal{G}_1 \equiv c_1, \ldots, \mathcal{G}_r \equiv c_r)$ mit $\|u - v\|_{C^1(I)} < \rho << 1$. Dann gibt es r reelle Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, sodass v eine schwache Extremale des Funktionals $\mathcal{F} + \lambda_1\mathcal{G}_1 + \ldots + \lambda_r\mathcal{G}_r$ ist, d.h. $\delta\mathcal{F}(v,\phi) + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\delta\mathcal{G}_i(v,\phi) = 0$ für alle $\phi \in C_c^1(\mathring{I},\mathbb{R}^n)$ erfüllt, zumindest falls man zu diesem v Test-Funktionen $\psi_1,\ldots,\psi_r$ aus $C_c^1(\mathring{I},\mathbb{R}^n)$ derart angeben kann, sodass $((\delta\mathcal{G}_i(v,\psi_l))_{i,l=1,\ldots,r})$ eine invertierbare $(r \times r)-$Matrix ist. (3)

b) Wie lauten somit die starken ,,bedingten" (ELG), welche solch ein lokaler Extremierer v von $\mathcal{F}$ innerhalb $M_{[P,Q]}(\mathcal{G}_1 \equiv c_1, \ldots, \mathcal{G}_r \equiv c_r)$ auf $\mathring{I}$ löst, falls man irgendwie $v \in C^2(\mathring{I},\mathbb{R}^n)$ bereits hat nachweisen können und falls die Ableitungen nach p der Lagrange-Funktionen zu $\mathcal{F},\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_r$ von der Klasse C^1 sind ? (1)

Abgabe: Erst am 23.11.10 in der Übung, bitte !