Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
18.11.2010
PD Dr. R. Jakob

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 9:

Wir betrachten auf der Klasse $\mathcal{C}$ aller C^2-Kurven $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ einerseits deren Längenfunktional $\mathcal{L}(u) := \int_0^1 \mid \dot{u} \mid \, dt$ und andererseits deren ,,Energie" $\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 \mid \dot{u} \mid^2 \, dt$.

a) Wie lauten die bedingten (ELG) zu $\mathcal{E}$ für Kurven aus der Klasse $\mathcal{C}$? Wie kann man nun die Zwangsbedingung an die Kurven aus $\mathcal{C}$ dazu verwenden, um eine sehr präzise Aussage über die Lagrange-Multiplikator-Funktion λ (aus den bedingten (ELG) zu $\mathcal{E}$) zu gewinnen ? Was muss dieses λ für eine unspektakuläre Funktion sein ? Und welche Eigenschaft muss die Geschwindigkeit $\mid \dot{u} \mid$ einer gezwungenen $\mathcal{E}-$Extremalen – einer sogenannten ,,Geodäten" auf der $\mathbb{S}^n$ – auf ganz $[0,1]$ haben ? (3)

b) Nun stelle man die bedingten (ELG) zu $\mathcal{L}$ für Kurven aus der Klasse $\mathcal{C}$ auf ! Sind die gezwungenen $\mathcal{E}-$Extremalen auch gezwungene $\mathcal{L}-$Extremalen ? Oder sind umgekehrt alle gezwungenen $\mathcal{L}-$Extremalen auch gezwungene $\mathcal{E}-$Extremalen ? Welche spezielle Eigenschaft muss offenbar eine Kurve notwendigerweise besitzen, um sowohl eine gezwungene $\mathcal{E}-$ als auch $\mathcal{L}-$Extremale zu sein ? (2)

c) Nun beweise man mittels der Ergebnisse von Teil (a), dass eine beliebige Geodäte u auf der $\mathbb{S}^n$ in der von $u(0)$ und $\dot{u}(0)$ aufgespannten Ebene E_0 enthalten sein und somit einen Grosskreis-Bogen durchlaufen muss ! Welche Information spiegelt dies insbesondere über die Krümmung $\kappa_u(t) :=\mid \ddot{u}(t) \mid$ einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodäten u (auf der $\mathbb{S}^n$) wieder, die wir bereits aus unseren Erkenntnissen aus Teil (a) hätten ableiten können ? (2)

Hinweis zur (c): Könnte man vielleicht $(n-1)$ Vektoren, die auf E_0 im $\mathbb{R}^{n+1}$ senkrecht stehen, mit der Geodäten u irgendwie kombinieren, um $(n-1)$ vielversprechende Hilfsfunktionen zu erhalten ?

Aufgabe 10:

a) Man stelle sich ein Seil der Länge l vor, welches um einen Nagel im Punkt $(0,0)$ herum an einer Wand, der (x,z)-Ebene, hängt und an dessen beiden Enden jeweils eine Punktmasse mit den Massen m_1 bzw. m_2 angebracht ist. Nun führe man zur Beschreibung dieses mechanischen Systems, auf welches lediglich die konstante Erdbeschleunigung $(0,-g)$ wirke, die Höhen z_i der Massen m_i ein (hier also mit negativen Werten), welche durch die Zwangsbedingung $G(z_1, z_2) := z_1 + z_2 + l \equiv 0$ voneinander abhängen. Wie lauten nun kinetische und potentielle Energie dieses Systems und somit dessen Lagrange-Funktion $L(z_1, z_2, p_1, p_2)$ unter Beachtung des ,,Superpositions-Prinzips" für die Energieen der beiden Massen (und zunächst bei Vernachlässigung der Zwangsbedingung) ? Und wie lauten somit die bedingten (ELG) für ein Paar von C^2-Funktionen $u_1, u_2 : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_-$, welche die Bewegungen der beiden Massenpunkte unter der Zwangsbedingung $G(u_1(t), u_2(t)) = u_1(t) + u_2(t) + l \equiv 0$ beschreiben sollen ? Mittels doppelter Differentiation nach t dieser Zwangsbedingung folgere man nun aus den bedingten (ELG) die exakten Bewegungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ der beiden Massenpunkte zu den Anfangswerten $u_1(0) = -l/2 = u_2(0)$ und $\dot{u}_1(0) = 0 = \dot{u}_2(0)$ und zeige, dass die Lagrange-Multiplikator-Funktion λ den konstanten Wert $2g\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, die ,,Fadenspannung" unseres strapazierten Seils, haben muss ! Zu welchem ,,kritischen" Zeitpunkt $T > 0$ rollt sich eigentlich unser Seil gerade über den Nagel (im Falle $m_2 > m_1$) hinweg ? (4)

b) Nun betrachten wir einen Massenpunkt mit Masse m, welcher sich auf einem mit Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um den Ursprung in der $(x, y)-$Ebene rotierenden (unendlich dünnen) Stab befinde und anhand dessen Rotation entlang dieses Stabes reibungslos nach aussen gleite. Es wirke keine von aussen eingeprägte Kraft (wie z.B. die Gravitation). Da wir unser bescheidenes D'Alembertsches Prinzip aus der Vorlesung nicht auf explizit zeitabhängige holonome Zwangsbedingungen anwenden dürfen (nämlich entlang des rotierenden Stabes gleiten zu müssen), sollten wir bemerken, dass wir tatsächlich nur an der Bestimmung des zeitlichen Verlaufs des Radius' $r(t)$ des Massenpunktes interessiert sind und somit nur eine einzige Koordinaten-Funktion r (zusammen mit deren Ableitungen nach t) zur Beschreibung dieses einfachen physikalischen Systems benötigen, welche durch

$$x(t) = r(t)\cos(\omega t) \qquad \text{und} \qquad y(t) = r(t)\sin(\omega t) \tag{1}$$

in die üblichen kartesischen Koordinaten-Funktionen (eines Massenpunktes auf dem rotierenden Stab) umgerechnet werden können. Man drücke nun dessen kinetische Energie $T(\dot{x}, \dot{y}) := \frac{1}{2}m((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)$ mit Hilfe der Vorschrift (1) als Funktion von r und $\dot{r}$ aus und gebe die sich somit ergebende Lagrange-Funktion $L(z, p)$ für das studierte (potential-freie) System an ! Wie lautet somit die entsprechende (ELG) für eine C^2-Radialfunktion $r(t)$, und welche Lösung erhalten wir zu beliebigen Anfangswerten $r_0 = r(0) > 0$ und $v_0 = \dot{r}(0) \geq 0$ und speziell zu $r(0) = 1$ und $\dot{r}(0) = 0$? Saust (zu diesen speziellen Anfangswerten) unser Massenpunkt nun nach aussen, oder nicht ? Wie gross sind beispielsweise seine Radial- und Gesamtgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 10$ für $\omega = 3$? (3)

Abgabe: Am 30.11.10 in der Übung, bitte !