Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
25.11.2010
PD Dr. R. Jakob

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 11:

Wir betrachten einen Massepunkt mit kartesischem Koordinatenpaar $\bar{x}(t)$ im $\mathbb{R}^2$ der Masse m unter Einfluss der konstanten Erdbeschleunigung $(0, -g)$, welcher sich auf dem Rand eines (masselosen, unendlich dünnen) Rades mit Radius R befinde, welches an der $x-$Achse hänge und entlang dieser reibungsfrei rollen, aber nicht gleiten darf. Wenn wir annehmen, dass sich der Massepunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ im unteren Scheitelpunkt $(0, -2R)$ dieses Rades befinde, so könnte man (ähnlich wie in Aufgabe 3) für $\bar{x}(t)$ die Zykloiden-Parametrisierung $R\,(\varphi(t) + \sin\varphi(t), -(1 + \cos\varphi(t)))$, mit $\varphi(0) = 0$, als Ansatz verwenden.

a) Man skizziere zunächst grob dieses ,,physikalische System" ! Was ist nun zu tun, um die Bewegung $\bar{x}(t)$ dieses Massepunktes am Radrand (unter Einfluss der Erdbeschleunigung) zu ermitteln, nachdem wir diesem einen kleinen Anstoss verliehen haben ? Müssen wir zunächst die korrekten Zwangsbedingungen für $\bar{x}(t)$ formulieren, um daraufhin die ,,bedingten ELG a la D'Alembert" für seine beiden kartesischen Koordinaten zu ermitteln ? Oder sollen wir einfach versuchen, eine ,,unbedingte" ELG für die (doch eigentlich ,,freie") Winkelfunktion φ in der obigen Zykloiden-Parametrisierung aufzustellen ? Wie lauten denn die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie unseres ,,rollbaren" Massepunktes $\bar{x}(t)$, ausgedrückt durch φ und $\dot{\varphi}$ – wenn wir diese Zykloiden-Parametrisierung als Arbeits-Ansatz zu Grunde legen – und wie demnach die Lagrange-Funktion $L(z, p)$ zum korrekten Wirkungsfunktional für φ und damit die ELG dieses physikalischen Systems für φ ? (4)

b) Man benutze nun gemäss der Additionstheoreme die Formeln $1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2(\alpha/2)$ und $\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$, um die ELG für φ in die Form einer üblichen Schwingungsgleichung für die Funktion $\sin(\varphi(t)/2)$ zu bringen ! Wie lautet also die (allgemeine) Lösung φ der errungenen ELG zum Anfangswert $\varphi(0) = 0$, und welcher analytische Ausdruck ergibt sich somit für $\bar{x}(t)$? Welches Resultat erhalten wir insbesondere, falls wir unserem Massepunkt doch keinen Anstoss geben, also $\bar{x}'(0) = 0$ voraussetzen ? Ist dieses realistisch ? (3)

Aufgabe 12:

Wir betrachten einen Massepunkt mit kartesischem Koordinatentripel $\bar{x}(t)$ im $\mathbb{R}^3$ der Masse m unter Einfluss der konstanten Erdbeschleunigung $(0, 0, -g)$, welcher sich auf einem (masselosen, unendlich dünnen) Kreisring mit Radius R befinde, der um den Ursprung $(0,0,0)$ mit Rotationsachse $=z-$Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiere.

a) Man skizziere zunächst grob dieses ,,physikalische System" und stelle die Zwangsbedingungen für unseren Massepunkt $\bar{x}(t)$ auf, die ihn zwingen, sich bloss entlang des soeben beschriebenen, rotierenden Kreisringes zu bewegen ! Nun legt es die Situation nahe, die kartesischen Koordinaten von $\bar{x}(t)$ auf ,,Kugel"- bzw. ,,Sphären-Koordinaten" zu transformieren, in welchen also die vorgegebene, gleichmässige Rotation des Ringes als ,,Breitengrad" und der offenbar noch unbekannte ,,Höhengrad" $\vartheta(t)$ von $\bar{x}(t)$ erscheinen. Müssen wir nun die Zwangsbedingungen für $\bar{x}(t)$ überhaupt noch beachten ? Oder genügt es, nun einfach die ,,freie" Winkelfunktion $\vartheta(t)$ zu berechnen ? Wie lauten denn die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie unseres rotierenden Massepunktes $\bar{x}(t)$, ausgedrückt durch ϑ und $\dot{\vartheta}$, und wie demnach die Lagrange-Funktion $L(z,p)$ zum korrekten Wirkungsfunktional für ϑ und damit die ,,unbedingte" ELG dieses physikalischen Systems für ϑ ? (4)

b) Nehmen wir nun $\vartheta(0) = 0$ und $\dot{\vartheta}(0) << 1$ an und dass somit für eine kurze Zeit $t \in [0,\epsilon)$ $\vartheta(t)$ sehr klein bleibt. Zu welcher wohlbekannten Differential-Gleichung reduziert sich dann die in (a) errungene ELG für ϑ, und wie lautet deren (allgemeine) Lösung zum Anfangswert $\vartheta(0) = 0$? Inwiefern erweist sich anhand dieses Resultats ausgerechnet die Rotationsgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{g/R}$ des Kreisringes als ,,kritisch" für das qualitative Verhalten unseres Massepunktes ? Wie bewegt sich nämlich $\bar{x}(t)$ für (a) $\omega < \sqrt{g/R}$, (b) $\omega = \sqrt{g/R}$ und (c) $\omega > \sqrt{g/R}$, und wie, falls wir unserem Massepunkt gar keinen Anstoss in $t = 0$ geben, also ausser $\vartheta(0) = 0$ auch noch $\dot{\vartheta}(0) = 0$ voraussetzen ? Sind diese Ergebnisse realistisch ? (3)

Abgabe: Am 07.12.10 in der Übung, bitte !