Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
02.12.2010
PD Dr. R. Jakob

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 13:

Sei $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine C^2-Lösung der Differential-Gleichung $\ddot{x} = -\gamma\, M \frac{x}{|x|^3}$ des $2-$Körper-Problems mit Anfangswerten $x_0 = x(0)$ und $v_0 = \dot{x}(0)$, die den $\mathbb{R}^2$ aufspannen. Die dritte Komponente $h(t) := x_3(t)$ dieser Lösung erfüllt somit das skalare AWP

$$\ddot{h} = -\gamma\, M \frac{h}{(|\, x_1(t)\,|^2 + |\, x_2(t)\,|^2 + h^2)^{3/2}}, \qquad h(0) = 0 = \dot{h}(0), \tag{1}$$

zweiter Ordnung, welches auf ein vektorwertiges AWP 1.Ordnung der Form

$$\frac{d}{dt}(h,v) = (v, -\gamma\, M \frac{h}{(|\, x_1(t)\,|^2 + |\, x_2(t)\,|^2 + h^2)^{3/2}}) =: F(t,(h,v)), \qquad (h,v)(0) = (0,0), \tag{2}$$

für das Funktionen-Paar $(h,v) \equiv (h,\dot{h})$ mittels des Vektorfeldes

$$F(t,(z_1,z_2)) := (z_2, -\gamma\, M \frac{z_1}{(|\, x_1(t)\,|^2 + |\, x_2(t)\,|^2 + z_1^2)^{3/2}})$$

äquivalent transformiert werden kann.

a) Ist $F(t,\cdot\,) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ für jedes feste $t \in [0,T]$ Lipschitz-stetig, oder vielleicht wenigstens lokal Lipschitz-stetig ? Können wir nun Theorem 4.3 aus der Vorlesung anwenden, um zu garantieren, dass das AWP (2) die eindeutige Lösung $(h,v) \equiv (0,0)$ auf $[0,T]$ besitzt, sodass sich also unser Massepunkt $x(t)$ nur in der Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bewegen kann ? Oder ist etwa Theorem 4.3 für dieses Vektorfeld F, also auf das obige AWP (2) gar nicht anwendbar und somit der Beweis von Lemma 4.1 aus der Vorlesung falsch ? Man erkläre exakt die auftretende Problematik ! (2)

b) Anstatt nun zu verzweifeln, beweise man, dass anhand der Voraussetzungen $h(0) = 0$ und $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass zumindest für alle kurze Zeiten $t \in [0,\epsilon)$ das Vektorfeld $F(t,\cdot\,) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sicherlich Lipschitz-stetig ist ! Folgt somit wenigstens $h \equiv 0$ auf $[0,\epsilon)$ aus Theorem 4.3 ? Nun betrachte man $s := \sup\{t \in [0,T] \mid h(t) = 0\}$ und nehme $s < T$ an ! Kann man diese skeptische Annahme „raffiniert" zu einem Widerspruch führen und damit $h \equiv 0$ auf ganz $[0,T]$ beweisen ? (4)

c) Nehmen wir nun die soeben angezweifelte Aussage „$x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$" als gesichert und somit den Ansatz $x(t) = r(t)\, \exp(i\phi(t))$ als berechtigt an. In der Vorlesung konnten wir hieraus – unter der vereinfachenden, weiteren Forderung „$x_0 = (R,0,0)$" – insbesondere den „Erhaltungssatz" $r^2\, \dot{\phi} \equiv \text{const.} = R\,(v_0)_2$ auf $[0,T]$ ableiten. Was bedeutet dies eigentlich für den sogenannten Drehimpuls-Vektor $m\,(x \times \dot{x})$ unseres ,,Planeten" $x(t)$? Man drücke diesen durch r und ϕ aus ! Wie verhalten sich nun dessen Richtung und Länge im Laufe der Zeit ? (1)

Aufgabe 14:

Wir betrachten einen Voll-Zylinder $Z(t)$ mit Radius r, Länge L und konstanter Dichte $\rho > 0$, welcher wiederum auf der Innenseite eines Zylindermantels (also in einer ,,Skateboard-Halfpipe") mit Radius $R >> r$ unter Einfluss der Erdbeschleunigung $(0,0,-g)$ reibungsfrei rolle (aber nicht gleite), dessen Symmetrie-Achse parallel zur $y-$Achse durch den Punkt $(0,0,R)$ verlaufe, sodass also dessen ,,Mantelgerade geringster Höhe" exakt mit der $y-$Achse zusammenfalle. Bezeichne desweiteren $M(t) := ((R-r)\,\sin(\phi(t)), 0, r + (R-r)\,(1-\cos(\phi(t))))$ den Schnittpunkt der Symmetrie-Achse von $Z(t)$ mit der $(x,z)-$Ebene, sodass also $\phi(t)$ den ,,Ausschlag-Winkel von $M(t)$" zwischen dem Vektor $M(t)-(0,0,R) = ((R-r)\,\sin(\phi(t)), 0, (r-R)\,\cos(\phi(t)))$ und $(0,0,r-R)$ messe. Um den Rollprozess von Z(t) zu beschreiben, empfiehlt es sich nun, als Koordinaten des Systems einerseits den Winkel $\phi(t)$ und andererseits den ,,Rollwinkel" $\vartheta(t)$, den der Zylinder zum Zeitpunkt $t \geq 0$ abgerollt hat, zu verwenden. Setzen wir also $\phi(0) = 0 = \vartheta(0)$ voraus, so lässt sich der von $Z(t)$ zurückgelegte Weg einerseits durch $R \mid \phi(t) \mid$ und andererseits durch $r \mid \vartheta(t) \mid$ messen.

a) Man skizziere zunächst grob dieses ,,physikalische System", gebe die Zwangsbedingungs-Funktion $G(z_1, z_2)$ an, sodass also $G(\phi(t), \vartheta(t)) \equiv 0$ die beiden Winkelfunktionen korrekt miteinander verknüpft (hier auf die Vorzeichen achten !!), und berechne die Masse m sowie das Trägheitsmoment J (bzgl. der Symmetrie-Achse) von $Z(t)$. Anschliessend gebe man die kinetische Energie von $Z(t)$ mittels der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}$ und $\dot{\vartheta}$ an, welche sich aus der kinetischen (Translations-)Energie T_{Trans} des Punktes $M(t)$ – aufgefasst als ein (gleitender) Massepunkt der Masse m – und der kinetischen Rotationsenergie $T_{Rot} := \frac{1}{2} J (\dot{\phi} + \dot{\vartheta})^2$ des Zylinders zusammensetzt, und schliesslich die potentielle Energie V des Zylinders, welche man durch ϕ ausdrücke, indem man V als die potentielle Energie eines Punktes geringster Höhe von $Z(t)$ verstehe, in welchem sich die Masse m von ganz Z konzentriere. Wie lautet nun die sich ergebende Lagrange-Funktion $L(z_1, z_2, p_1, p_2)$ zu unserem physikalischen System (wenn wir a posteriori z.B. in z_1 das ϕ und in z_2 das ϑ einsetzen) ? (3)

b) Man stelle nun die beiden ,,bedingten" ELG ,,a la D'Alembert" für ϕ und ϑ auf und leite mittels erneuten Gebrauchs der Zwangsbedingung ,,$G(\phi(t), \vartheta(t)) \equiv 0$" eine Differentialgleichung 2. Ordnung nur für ϕ her. Zu welcher bekannten, einfachen Differentialgleichung 2. Ordnung reduziert sich diese, falls wir in Physiker-Manier $\mid \phi(t) \mid << 1$ für eine kurze Zeit annehmen, und wie lautet somit die allgemeine Lösung $\phi(t)$ zur Anfangsbedingung $\phi(0) = 0$, zumindest für eben diese kurze Dauer ? Und welchen Ausdruck erhalten wir daher für die Lagrange-Multiplikator-Funktion λ und die korrigierende ,,Zwangskraft" des Systems ? Wie lautet nun insbesondere unsere Lösung $\phi(t)$, falls wir die konkreten Werte $R = 6$, $r = 1$, $g = 10$ und die Anfangs-Rollgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}(0) = -2$ vorgeben ? Stimmt dieses Resultat mit unserer Intuition überein ? Rollt ein Fass auf diese Weise in einer Halfpipe ? (4)

Abgabe: Am 14.12.10 in der Übung, bitte !