Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
10.12.2010
PD Dr. R. Jakob

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 15:

Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^m$, dessen Rand $\partial\Omega$ eine geschlossene C^1-Mannigfaltigkeit sei, und $F = F(x,z,p) \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn})$, $n, m \geq 1$, eine Lagrange-Funktion mit zugehörigem Variations-Funktional $\mathcal{F}(u) := \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$, angewandt auf beliebige $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

a) Man leite zunächst (analog zum Spezialfall $\bar{\Omega} = [a,b] \subset \mathbb{R}$) einen Integral-Ausdruck für die erste Variation $\delta\mathcal{F}(u,\varphi) := \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}(u+\epsilon\varphi) \mid_{\epsilon=0}$ von $\mathcal{F}$ in einem $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ in Richtung eines $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ her ! Welche beiden Standard-Sätze aus Analysis II und III gehen hierbei ein ? (2)

b) Kann man nun mittels partieller Integration:

$$\int_\Omega f\, D_\alpha \psi\, dx = -\int_\Omega D_\alpha f\, \psi\, dx + \int_{\partial\Omega} (f\,\psi)\, \nu_\alpha\, dA, \tag{1}$$

für beliebige (reell-wertige) $f, \psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ (ν bezeichne hier das nach Aussen weisende Einheits-Normalenfeld an $\partial\Omega$) den in (a) errungenen Integral-Ausdruck für $\delta\mathcal{F}(u,\varphi)$ in einen brauchbarer wirkenden transformieren, falls zusätzlich $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und alle nm partiellen Ableitungen $F_{p_{j\alpha}} := D_{p_{j\alpha}} F \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn})$, $j = 1, \ldots, n$ und $\alpha = 1, \ldots, m$, vorausgesetzt werden ? Wenn ja, so erkläre man exakt, wie Formel (1) angewandt werden muss, um solch eine raffinierte Umformung konzise herleiten zu können ! Lassen sich in diesem die Divergenzen (bzgl. x) der n Vektorfelder $(F_{p_{j1}}, F_{p_{j2}}, \ldots, F_{p_{jm}})(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,), Du(\,\cdot\,)) : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ wiederfinden ? (3)

c) Angenommen, ein $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ erfülle nun $\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0$ für jedes $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Kann man hieraus anhand von Teil (b) zunächst ein System aus n partiellen Differentialgleichungen auf $\bar{\Omega}$ herleiten, welches die partiellen Ableitungen $F_{z_j}(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,), Du(\,\cdot\,))$ mit den Divergenzen der Vektorfelder $(F_{p_{j1}}, F_{p_{j2}}, \ldots, F_{p_{jm}})(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,), Du(\,\cdot\,))$ für jedes $j = 1, \ldots, n$ in Verbindung bringt ? Falls ja, so begründe man seine Meinung konzise ! Kann man nun anschliessend sogar noch n Gleichungen für die n Skalarprodukte

$$\langle (F_{p_{j1}}, F_{p_{j2}}, \ldots, F_{p_{jm}})(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,), Du(\,\cdot\,)), \nu(\,\cdot\,) \rangle$$

auf $\partial\Omega$ herleiten ? Falls dies der Fall sein sollte, so gebe man diese an und begründe diese zweite Behauptung ebenfalls präzise ! Der Nikolaus fragte mich übrigens empört, ob man denn das Fundamentallemma der Variationsrechnung auch bei der Behandlung von Rand-Integralen über $\partial\Omega$ verwenden darf !? Sind seine Bedenken gerechtfertigt, oder hat er einfach vergessen, was solch ein Rand-Integral überhaupt ist ? (4)

Abgabe: Am 21.12.10 in der Übung, bitte ! Einen gesegneten Weihnachts-Braten !