Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

WS 10/11
17.12.2010
PD Dr. R. Jakob

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Variationsrechnung I

Aufgabe 16:

Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^m$, dessen Rand $\partial\Omega$ eine geschlossene C^1-Mannigfaltigkeit sei, und $(g_{ik}(z))_{i,k=1,\dots,n}$ eine von $z \in \mathbb{R}^n$ in $C^\infty-$Weise, also ,,glatt" abhängige positiv definite, symmetrische Matrix-wertige Funktion, d.h. ein sogenannter ,,Riemannscher metrischer Tensor", welcher zu jedem Tangentialraum $T_z\mathbb{R}^n$ am jeweiligen Punkt z eine eigene ,,Längen- und Winkel-Messvorschrift" für dessen Tangentialvektoren liefert. Die ,,Dirichlet-Energie" von Flächen $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit Bild in solch einem ,,Riemannsch verzerrten" $\mathbb{R}^n$ wird demnach durch das Funktional

$$\mathcal{D}_g(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega g_{ik}(u(x)) D_\beta u^i(x)\, D_\beta u^k(x)\, dx$$

gemessen, wobei man die Einsteinsche Summenkonvention beachte, dass hierbei über die doppelt auftretenden Indizes $i, k = 1, \dots, n$ und über $\beta = 1, \dots, m$ summiert werde !

a) Wie lauten nun die zu $\mathcal{D}_g$ gehörende Lagrange-Funktion $F_g(z,p)$, ihre partiellen Ableitungen nach z^j und $p_{j\alpha}$ (hierbei bitte die Symmetrie von $(g_{ik}(z))$ bedenken !) und somit die n (ELG)'s und n ,,natürlichen Randbedingungen" = (NRB)'s aus Aufgabe 15 (c) zu $\mathcal{D}_g$? Für die (ELG)'s erhielt ich nach Anwendung der Ketten- und Produktregel die Gleichungen

$$g_{jk}(u) \triangle u^k = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial z^j} g_{ik}\Big)(u)\, D_\beta u^i\, D_\beta u^k - \Big(\frac{\partial}{\partial z^l} g_{jk}\Big)(u)\, D_\beta u^l\, D_\beta u^k \qquad \text{auf} \quad \bar{\Omega},$$

für $j = 1, \dots, n$, wobei hier also nach Einstein über $k, i, l = 1, \dots, n$ und über $\beta = 1, \dots, m$ summiert wird ! Und in den (NRB)'s entdeckte ich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \nu} := \langle \nabla u^k, \nu \rangle$ der n Komponenten von u in Richtung des nach Aussen weisenden Einheits-Normalenfeldes an $\partial\Omega$! Habe ich mich mal wieder total verrechnet ? (4)

b) Nun führen wir die Christoffel-Symbole 1. Art durch $2\,\Gamma_{ijk}(z) := \frac{\partial}{\partial z^i} g_{jk}(z) - \frac{\partial}{\partial z^j} g_{ik}(z) + \frac{\partial}{\partial z^k} g_{ij}(z)$ in jedem $z \in \mathbb{R}^n$ ein. Zu welchen ,,kompakten" Ausdrücken lassen sich nun zumindest die rechten Seiten der obigen (ELG)'s mittels dieser Christoffel-Symbole transformieren, wenn man erneut die Symmetrie unseres metrischen Tensors g und die Tatsache ausnutzt, dass die in diesen auftretenden Summationsindizes k, i, l systematisch ineinander umbenannt werden dürfen ? (3)

c) Auf welche prägnanten, wohlbekannten Gleichungssysteme reduzieren sich die obigen (ELG)'s und (NRB)'s nun im speziellen Falle eines von z unabhängigen metrischen Tensors $g_{ik}(z) \equiv g_{ik} \in \mathrm{Sym}^+_n(\mathbb{R})$? Gibt es überhaupt (im Hinblick auf Aufgabe 15) nicht-konstante Lösungen $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ von „$\delta\mathcal{D}_g(u,\varphi) = 0 \;\; \forall\, \varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$" bei konstantem metrischen Tensor (g_{ik}) ? Könnte hier vielleicht Herr Prof. Hopf als schlauer Weihnachtsmann klärend zu Rate eilen ? Und in welcher erhellenden Rolle tauchen die Komponenten von $\nu(x)$ in Bezug auf die Fragestellung auf, ob die m Tangentialvektoren $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}(x)$ einer Lösung u der (NRB)'s (entlang $\partial\Omega$) in einem beliebig fixierten Randpunkt $x \in \partial\Omega$ linear unabhängig sein können ? (4)

Abgabe: Am 11.01.11 in der Übung, bitte ! Nochmals einen gesegneten Weihnachts-Braten und einen guten Rutsch !