

# Variationsrechnung I

## § 0 Historische Einführung

Beispiel 1: Eine Punktmasse  $X$  mit Masse  $M$  im  $\mathbb{R}^3$  befinde sich in einem Kraftfeld  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  bzw. sei beeinflusst durch ein Kraftpotential  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F = -\nabla V$ . Newton's 2. Gesetz besagt, daß  $F$  eine Beschleunigung der Punktmasse  $X$  verursacht, sodaß sich  $X$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  vermöge

der Differ. gleich. 
$$M \ddot{X}(t) = F(X(t)) \quad (N)$$
$$\equiv -\nabla V(X(t))$$

zu bewegen hat.

Frage: Warum sollte dieses Gesetz tatsächlich gelten? In welchem Sinne ist eine durch (N) bestimmte Bewegung optimal?

Idee: Man führt den Begriff der kinetischen Energie  $T(v) := \frac{1}{2} M |v|^2$  und der freien

Energie

$L(x, v) := T(v) - V(x)$  ein und betrachtet die "Wirkung"

$$S(X) := \int_{t_1}^{t_2} L(X(t), \dot{X}(t)) dt$$

des Massenpunktes  $X$ .

Wie verhält sich  $S$  bei einer Störung von  $X$

durch eine beliebige "Variation"  $\varphi: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

d. h. wie ändert sich  $S(X + \varepsilon \varphi)$  nahe  $\varepsilon = 0$ ?

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varepsilon} L(X + \varepsilon \varphi, \dot{X} + \varepsilon \dot{\varphi}) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \nabla_x L(X + \varepsilon \varphi, \dot{X} + \varepsilon \dot{\varphi}) \cdot \varphi$$

$$+ \nabla_v L(\text{---} \text{---} \text{---}) \cdot \dot{\varphi} dt$$

$$\Rightarrow \delta S(X, \varphi) := \left. \frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon \varphi) \right|_{\varepsilon=0} =$$

1. Variator von  $S$  in  $X$  (2)

$$= \int_{t_1}^{t_2} \nabla_x L(\underline{X}, \dot{\underline{X}}) \cdot \varphi + \nabla_v L(\underline{X}, \dot{\underline{X}}) \cdot \dot{\varphi} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} -\nabla_x V(\underline{X}) \cdot \varphi + M \dot{\underline{X}} \cdot \dot{\varphi} dt$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} - \int_{t_1}^{t_2} (\nabla_x V(\underline{X}) + M \ddot{\underline{X}}) \cdot \varphi dt$$

↗ falls  $\varphi(t_1) = 0 = \varphi(t_2)$ , also z.B.  $\varphi \in C_c^1((t_1, t_2))$

Erheben wir also die Forderung

„Wirkung  $S$  möge auf den Bewegungen  $\underline{X}(t)$  im Potential  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kritisch oder stationär sein“

Zu einem Axiom („Hamilton-Prinzip“), so

erhalten wir für  $\underline{X}(t)$  die Bedingung:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S(\underline{X}, \varphi) = - \int_{t_1}^{t_2} (\nabla_x V(\underline{X}) + M \ddot{\underline{X}}) \cdot \varphi dt$$

$$\forall \varphi \in C_c^1((t_1, t_2), \mathbb{R}^3)$$

$$\Rightarrow M \ddot{\underline{X}}(t) = -\nabla_x V(\underline{X}) = F(\underline{X}(t)) \text{ auf } (t_1, t_2)$$

also Newton's Gesetz (N)!

2) Pendelbewegung von  $X$  im  $\mathbb{R}^2$ :

Hier ist also  $X(t) = R \begin{pmatrix} \sin \theta(t) \\ 1 - \cos \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Auslenkung} \\ \text{Höhe} \end{pmatrix}$

$T(\dot{X}(t)) = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}(t)^2$  und das übliche

Gravitationspotential

$$V(X(t)) = M g \underbrace{[R(1 - \cos \theta(t))]}_{\text{"Höhe" von } X(t)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{S(X(t))}_{S(\theta(t))} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}(t)^2 - M g R (1 - \cos \theta(t)) dt$$

mit aus  $0 \stackrel{!}{=} \delta S(\theta, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^1((t_1, t_2), \mathbb{R})$

resultierenden Newton-Gleichungen:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} S(\theta + \varepsilon \varphi) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} M R^2 \dot{\theta}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) - M g R \sin \theta(t) \cdot \varphi(t) dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} (M R^2 \ddot{\theta}(t) + M g R \sin \theta(t)) \varphi(t) dt$$

$$\Leftrightarrow R \ddot{\theta} + g \sin \theta \stackrel{(4)}{=} 0 \quad \text{auf } (t_1, t_2).$$

Nehmen wir  $|\dot{\theta}(t_1)| \ll 1$  und somit  
 $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$  für  $t \in (t_1, t_2)$  an, so  
 erhalten wir, daß  $\Sigma(t) = R \begin{pmatrix} \sin \theta(t) \\ 1 - \cos \theta(t) \end{pmatrix}$

für Lösungen  $\theta$  von  $R \ddot{\theta} = -g \theta$  die  
 Bewegung eines leicht ausgelenkten Pendels  
 im  $\mathbb{R}^2$  beschreibt, also  $\Sigma(t) \approx R \begin{pmatrix} \sin \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t \\ 1 - \cos \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t \end{pmatrix}$ .

### 3 Isoperimetrisches Problem

Es seien zwei Punkte  $P_1 = (a_1, b_1)$ ,  $P_2 = (a_2, b_2)$   
 im  $\mathbb{R}^2$  und eine verbindende Kurve  $\tilde{\gamma}$  als  
 Graph von  $y = f(x)$  mit  $f(a_1) = b_1$ ,  $f(a_2) = b_2$   
 vorgegeben. Sei außerdem  $c > |P_1 - P_2|$   
 eine feste reelle Zahl.

Frage: Welche Gestalt hat diejenige Ver-  
 bindungskurve  $\gamma$  von  $P_1$  und  $P_2$ , welche

als  $b_1, b_2$  einer Funktion aus der Klasse

$$S_f := \{ v \in C^2([a_1, a_2]), v(a_i) = b_i, i=1,2, f < v \}$$

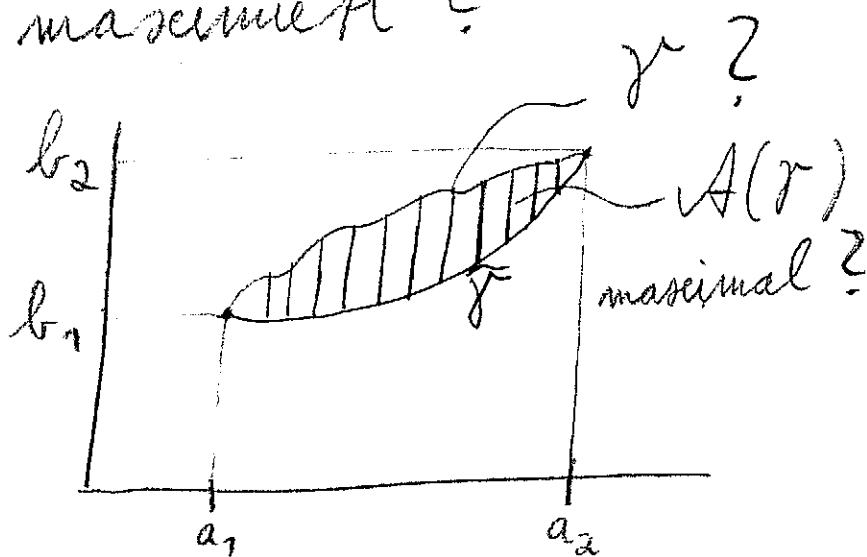
geschrieben werden kann, also „über  $\tilde{f}$  liegt“,

und bei vorgegebener Länge

$$c \stackrel{!}{=} L(\gamma) = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + |v'|^2} dx$$

Flächeninhalt  $A(\gamma) := \int_{a_1}^{a_2} (v - f)(x) dx$

Zwischen sich und  $\tilde{f}$  maximiert?



Dies ist ein einfaches Beispiel eines

„Optimierungsproblems“, nämlich

$$A(v) \rightarrow \text{Max. innerhalb } S_f, (0)$$

mit „Nebenbedingung“, nämlich  $L(\gamma) \stackrel{!}{=} c$ .

(5)

graph(v)

Wir werden sehen, daß nur Funktionen  
 $v \in \mathcal{P}_f$  (mit  $\text{graph}(v) = \gamma$ ) dieses Problem  
 lösen können, welche kritische Punkte

der Wirkung  $S(v) := A(v) + \lambda L(v)$   

$$\equiv \int_{a_1}^{a_2} v - f + \lambda \sqrt{1 + |v'|^2} dx$$

für  $v \in \mathcal{P}_f$  sind, d. h. welche

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S(v, \varphi) = \frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \int_{a_1}^{a_2} (v + \varepsilon \varphi) - f + \lambda \sqrt{1 + |v' + \varepsilon \varphi'|^2} dx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \varphi + \lambda \frac{v' \varphi'}{\sqrt{1 + |v'|^2}} dx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \left( 1 - \lambda \left( \frac{v'}{\sqrt{1 + |v'|^2}} \right)' \right) \varphi dx$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty((a_1, a_2))$$

und somit  $\left( \frac{v'}{\sqrt{1 + |v'|^2}} \right)' = \frac{1}{\lambda} \equiv \text{konstant}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \text{Krümmung von } \text{graph}(v) = \gamma}$

(7)

für einen „Lagrange-Multiplikator“  $\lambda \in \mathbb{R}$  erfüllen. Die gesuchte Kurve  $\gamma$ , welche also bei vorgegebener Länge  $c > |P_1 - P_2|$  den Flächeninhalt  $A(v)$  zwischen sich und  $\tilde{\gamma}$  maximiert, müßte konstante Krümmung haben, also ein Stück eines Kreises sein, vorausgesetzt, daß überhaupt eine Lösung des Problems (0) in  $\mathcal{L}_f$  existiert!

[4] Sei allgemeiner  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit  $C^2$ -Rand und  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine vorgegebene  $C^2$ -Funktion. Wir suchen innerhalb der Randwertklasse  $\mathcal{R}_f := \left\{ v \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \forall \partial\Omega = f \end{array} \right\}$



einen Minimierer  $v^*$  der Oberfläche

$$A(\text{graph}(v)) \equiv A(v) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dv|^2} dx$$

des Graphen von  $v$  bei vorgegebenem

$$\text{Volumen } V(v) := \int_{\Omega} v(x) dx =: c!$$

Wir werden für  $v^*$  die notwendige Beding.

$$\delta(A + \lambda V)(v^*, \varphi) \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dv^* + \varepsilon D\varphi|^2} + \lambda(v^* + \varepsilon\varphi) dx$$

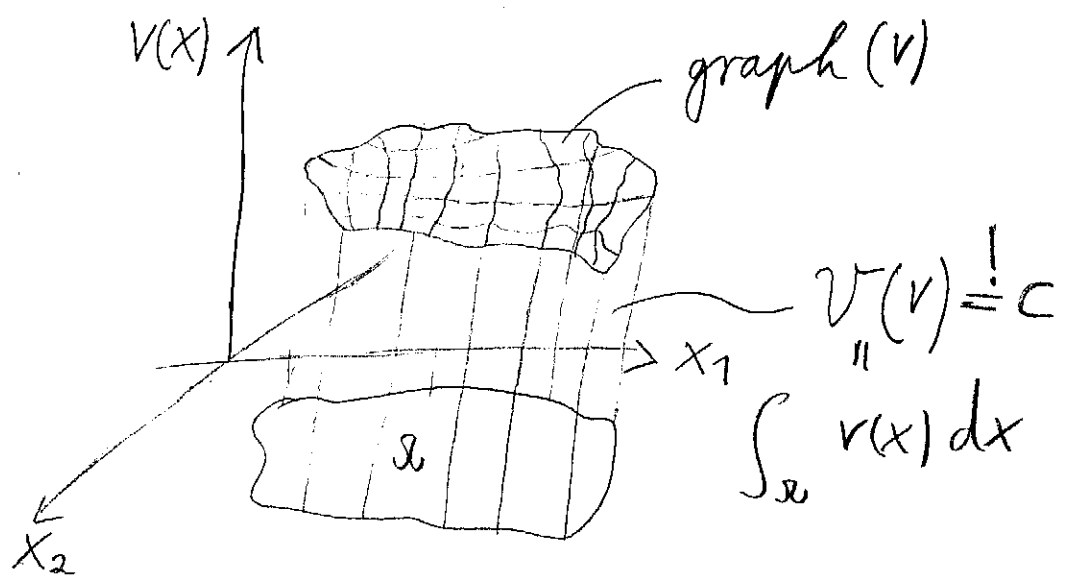
für ein  $\lambda \in \mathbb{R} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega),$

und somit 
$$\text{div} \left( \frac{Dv^*}{(1 + |Dv^*|^2)^{1/2}} \right) \equiv \lambda \text{ auf } \Omega.$$

(falls  $v^*$  sogar  $\in C^2(\Omega)$  ist!) herleiten.

Da  $\frac{1}{n} \text{div} \left( \frac{Dv}{(1 + |Dv|^2)^{1/2}} \right)(x)$  gerade die mittlere Krümmung  $H(x, v(x))$  des Graphen

von  $v$  im Punkt  $(x, v(x))$  berechnet,  
 muß also jeder  $C^2$ -Minimierer  $v^*$   
 der Oberfläche  $A$  aller Graphen von  
 Funktionen aus  $R_f$  bei vorgegebenem  
 Volumen  $V \stackrel{!}{=} c$  eine konstante mittlere  
 Krümmung  $H(x, v^*(x)) \equiv \frac{\lambda}{n}$  seines Graphen  
 bewirken!



5 Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit  $C^1$ -Rand  $\partial\Omega$   
 mit äußerer Einheitsnormalen  $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  
 so ist  $\vec{\nu} := (\nu, 0)$  die äußere Einheitsnormale  
 an den Zylinder  $\Omega \times \mathbb{R}$  über  $\Omega$ .

Ähnlich wie in Beispiel [4] muß jede „Extremale“  $u^*$  des Oberflächenfunktional  $A$  bei vorgegebenem Volumen  $V$  innerhalb der größeren Funktionenklasse  $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+)$ , also bei „freien Randwerten“, ein kritischer Punkt des Funktional  $A(u) + \lambda V(u)$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$   $= \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} + \lambda u \, dx$  sein,

also  $0 \stackrel{!}{=} \delta(A + \lambda V)(u^*, \varphi)$ ,  $\forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ ,

und somit nicht nur

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du^*}{(1 + |Du^*|^2)^{1/2}} \right) \equiv \lambda \quad \text{auf } \Omega, \text{ sondern}$$

auch noch  $v \cdot \frac{Du^*}{(1 + |Du^*|^2)^{1/2}} \equiv 0$  entlang  $\partial\Omega$  (NRB)

erfüllen. Da  $\frac{1}{(1 + |Du^*|^2)^{1/2}} (Du^*, 1) =: \vec{n}_{u^*}$  die nach oben weisende Einheitsnormale an  $\operatorname{graph}(u^*)$  ist, bedeutet die (NRB) also gerade:

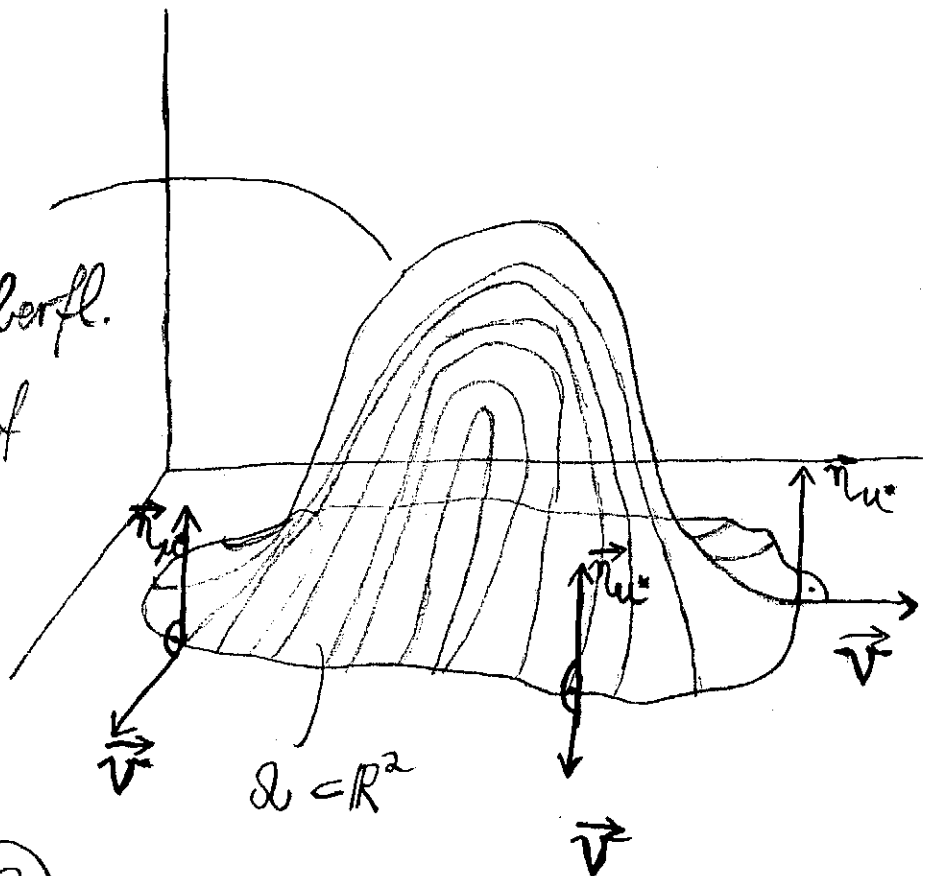
$$0 \equiv \vec{v} \cdot \vec{n}_{u^*} \equiv \cos \angle(\vec{v}, \vec{n}_{u^*}) \quad \text{entlang } \partial\Omega$$

$$= \text{Winkel zwischen } \partial\Omega \times \mathbb{R} \text{ und}$$

$$\text{somit} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi\mathbb{Z}} \quad \text{graph}(u^*),$$

sodaf also jeder „kritische Punkt“  $u^*$  von  $A$  bei vorgegebenem Volumen  $V \equiv c$  und „freien Randwerten“ die überraschende Eigenschaft hat, daß sein Graph senkrecht auf dem Zylinder-mantel  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$  entlang  $\partial\Omega$  treffen muß, eine sogenannte „natürliche Randbedingung“ erfüllen muß.

graph( $u^*$ )  
mit stationärer Oberfl.  
trifft senkrecht auf  
 $\partial\Omega \times \mathbb{R}$



Kritische Punkte des Funktionals

$$F(u) := A(u) + \lambda V(u) - \cos \gamma \int_{\partial \Omega} u \, d\mathcal{H}^1, \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}),$$

mit „freien Randwerten“, also  $u^* \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$

$$\text{mit } \delta F(u^*, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$$

erfüllen hingegen die NR-Bedingung

$$\vec{\nu} \cdot \eta_{u^*} \equiv \cos \gamma \quad \text{entlang } \partial \Omega, \text{ für}$$

den zu wählenden Winkel  $\gamma$ , sodaß

also  $\text{graph}(u^*)$  im Winkel  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2})$  auf  
den Zylinderrand  $\partial \Omega \times \mathbb{R}$  aufzutreffen  
hat, wie dies gerade bei Oberflächen  
von Wassertropfen in dünnen Röhren  
 $B_\varepsilon^2(0) \times \mathbb{R}$  experimentell beobachtet werden  
kann! (Kapillaritäts-Phänomene)