§1 Eindimensionale Variationsintegrale

Auf einer fixierten offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, betrachten wir eine sogenannte „Lagrange-Funktion"

$F = F(x, z, p) \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und außerdem die Menge aller „Kurven"

$$M_{[P,Q]} := \left\{ u \in C^1(\underbrace{[a,b]}_{=:I}, \mathbb{R}^n) \;\middle|\; (x, u(x), u'(x)) \in \mathcal{U},\ \forall x \in I \ [\text{und } u(a) = P,\ u(b) = Q] \right\}$$

welche zwei vorgegebene Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ miteinander verbinden.

Definition 1.1

i) Wir nennen $\mathcal{F}(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x))\, dx$

das zur Lagrange-Funktion $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ gehörende „Variations-Integral" auf der Menge $M_{P,Q}$ der P mit Q verbindenden Kurven in $\mathcal{U}$.

b) Für ein „Variations-Vektorfeld" $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ gilt für die „Variation" bzw. „Störung" $u + \varepsilon\varphi$ noch immer $(x, (u+\varepsilon\varphi)(x), (u'+\varepsilon\varphi')(x)) \in \mathcal{U}$, falls $|\varepsilon| < \varepsilon_0 \ll 1$ sodaß wir die „erste Variation"

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) := \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi)$$

von $\mathcal{F}$ um u „in Richtung von φ" bilden dürfen.

c) Erfüllt ein $u \in M_{\boxed{P,Q}}$ die Integralgleich.

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0 \quad , \ \forall\, \varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n),$$

so nennen wir u einen „kritischen" bzw. „stationären" Punkt von $\mathcal{F}$ [in $M_{P,Q}$], oder auch eine „schwache $\mathcal{F}$-Extremale".

Lemma 1.1

Für beliebiges $u \in M_{[P,Q]}$ und $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\delta \mathcal{F}(u, \varphi) = \int_I F_z(x, u, u') \cdot \varphi(x) + F_p(x, u, u') \cdot \varphi'(x) \, dx$$

Ist außerdem $F_{p_j} \in C^1(\mathcal{U})$, $j = 1, \ldots, n$, und $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$, so hat man

$$\delta \mathcal{F}(u, \varphi) = \int_I \left(F_z(x, u, u') - \frac{d}{dx} F_p(x, u, u') \right) \cdot \varphi \, dx$$

$$+ \; F_p(x, u, u') \cdot \varphi(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

(Hierbei bezeichne $F_z := \nabla_z F = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right)$ und $F_p := \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_n} \right)$.)

Beweis: Anhand der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(x, u + \varepsilon \varphi, u' + \varepsilon \varphi') \qquad (*)$$

$$= F_z(x, u + \varepsilon \varphi, u' + \varepsilon \varphi') \cdot \varphi(x) + F_p(x, u + \varepsilon \varphi, u' + \varepsilon \varphi') \varphi'$$

und somit nach dem Satz über die Differenzierbarkeit von Integralen, die von einem

Parameter $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ abhängen:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi) = \int_I \frac{d}{d\varepsilon} F(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi')\, dx$$

$$\underset{(*)}{=} \int_I F_z(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi')\cdot\varphi(x) + F_p(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi')\cdot\varphi'(x)\, dx,$$

also

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \int_I F_z(x,u,u')\cdot\varphi(x) + F_p(x,u,u')\cdot\varphi'(x)\,dx$$

Ist nun außerdem $F_{p_1}, \dots, F_{p_n} \in C^1(\mathcal{U})$ und $u \in C^2(I,\mathbb{R}^n)$, so dürfen wir partiell integrieren:

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \int_I \left(F_z(x,u,u') - \frac{d}{dx}F_p(x,u,u')\right)\varphi(x)\,dx + F_p(x,u,u')\cdot\varphi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

$\square$

Bei Betrachtung dieses letzten Ausdrucks stellt sich die Frage, ob eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale u, welche also $\delta\mathcal{F}(u,\varphi)=0$ $\forall \varphi \in C_c^1(I,\mathbb{R}^n)$ erfüllt, nützlichere

(Differential-)Gleichungen auf I erfüllt.
In der Tat trifft dies zu anhand des

<u>Lemma 1.2</u> (Fundamental-Lemma der Variations-Rechnung)

Für eine beliebige stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}^n$ folgt aus $\int_I f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = 0$, $\forall \varphi \in C_c^0(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$, bereits $f \equiv 0$ auf I.

<u>Beweis</u>: Wählen wir speziell ein φ der Form $\varphi = \eta \cdot e_j$, mit $e_j = (0, \ldots, \overset{(j)}{1}, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, und zeigen wir, daß dann aus $\int_I f_j\, \eta\, dx = 0$ $\forall \eta \in C_c^0(I)$ bereits $f_j \equiv 0$ auf I folgt.

Angenommen, es existiert ein Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f_j(\xi) \neq 0$, beispielsw. $f_j(\xi) > 0$.
Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und dazu ein Teilintervall $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, auf welchem

$f(x) \geq \varepsilon$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$, erf. ist. Sei nun

$$\eta(x) := \begin{cases} (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 & , \text{ für } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & , \text{ für } x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}.$$

Da $\eta \in C_c^1(\mathring{I})$, müßte nach Voraussetzung $\int_I f_j \eta \, dx = 0$ gelten, jedoch erhielten wir nun $\int_I f_j \eta \, dx = \int_\alpha^\beta f_j \eta \, dx \geq \varepsilon \int_\alpha^\beta \eta \, dx$

per Konstr. von η. $\longrightarrow > 0$ ↯

Somit muß $f_j \equiv 0$ auf (a, b), also auf $[a, b]$, für jedes $j = 1, \ldots, n$ gelten. $\square$

Lemma 1.3

Sei $F \in C^1(U)$ und außerdem $F_{p_1}, \ldots, F_{p_n} \in C^1(U)$ und $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$.

i) Ist u eine schwache F-Extremale, so erfüllt sie die „Euler-Lagrangeschen" Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx} F_{p_j}(x,u,u') = F_{z_j}(x,u,u'), \; j=1,\ldots,n, \text{ auf } I. \tag{ELG}$$

(ii) Gilt sogar $\delta \mathcal{F}(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$, so erfüllt u nicht nur die EL-Gleich. auf I, sondern die folgenden „natürlichen Randbedingungen" in $x=a$ und $x=b$:

$$F_{p_j}(x, u(x), u'(x)) = 0 \quad, \; j=1,\ldots,n. \tag{NRB}$$

<u>Beweis</u>:
Wegen

$$\delta \mathcal{F}(u,\varphi) = \int_a^b \Big(F_z(x,u,u') - \frac{d}{dx} F_p(x,u,u')\Big) \cdot \varphi(x)\, dx \tag{$*$}$$
$$+ F_p(x,u,u') \cdot \varphi(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

nach Lemma 1.1 ergibt sich aus $\delta \mathcal{F}(u,\varphi) = 0$, für jedes $\varphi \in C_c^1(I,\mathbb{R}^n)$, anhand von Lemma 1.2 sofort das System der ELG auf I, also (i).
Falls sogar beliebige Variations-VF $\varphi \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ zugelassen sind, erhalten wir zunächst

diese ELG für u, setzen diese dann in (*) ein und sehen $0 = \sum_{j=1}^{n} F_{p_j}(x,u,u') \cdot \varphi_j(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$

Wählen wir also ein φ mit $\varphi_1(a)=1$, $\varphi_1(b)=0$ und $\varphi_j(a)=0=\varphi_j(b)$ für $j=2,\dots,n$, so ergibt sich $F_{p_1}(a,u(a),u'(a))=0$. Analog erhalten wir $F_{p_1}(b,u(b),u'(b))=0$ und die übrigen $2(n-1)$ natürlichen Randbedingungen in (ii)

$\square$

Definition 1.2

i) Man kürzt die ELG eines $u \in C^2(I,\mathbb{R}^n)$ zu F durch $L_F(u) := F_z(\cdot,u,u') - \frac{d}{dx} F_p(\cdot,u,u') \equiv 0$ ab und nennt $L_F(u)$ den Eulerschen Differentialoperator von u zu F.

ii) Wir nennen eine Lösung $u \in C^2(I,\mathbb{R}^n) \cap M_{[P,Q]}$ von $L_F(u) \equiv 0$ auf I eine „starke

$\mathcal{F}$ – Extremale "[in $M_{P,Q}$].

Theorem 1.4

i) Ist $u \in M_{P,Q}$ ein lokaler Minimierer oder Maximierer von $\mathcal{F}$, d. h. gilt entweder

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \text{ oder } \mathcal{F}(u) \geq \mathcal{F}(v), \ \forall v \in M_{P,Q}$$

mit $\|u-v\|_{C^1(I)} < r$ für ein $r>0$,

so folgt $\delta \mathcal{F}(u, \varphi) = 0$, $\forall \varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, also insb. $\forall \varphi \in C^1_c(I, \mathbb{R}^n)$, sodaß im Falle $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n) \cap M_{P,Q}$ sogar u eine starke $\mathcal{F}$- Extremale in $M_{P,Q}$ ist.

ii) Gilt sogar $\mathcal{F}(u) \leq$ bzw. $\geq \mathcal{F}(v)$ für beliebige $v \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\|u-v\|_{C^1(I)} < r$, so folgt $\delta \mathcal{F}(u, \varphi) = 0$, $\forall \varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, sodaß solch ein $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ außer den (ELG) auf I noch die (NRB) in a, b erfüllt.

Beweis: i) Sei $\varphi \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ beliebig gewählt. Für $\varepsilon \in \left(-\frac{r}{\|\varphi\|_{C^1(I)}}, \frac{r}{\|\varphi\|_{C^1(I)}}\right)$ gilt dann $\|(u+\varepsilon\varphi)-u\|_{C^1(I)} = |\varepsilon| \, \|\varphi\|_{C^1(I)} < r$ und $u+\varepsilon\varphi \in M_{P,Q}$, also $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi)$ bzw. $\mathcal{F}(u) \geq \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi)$ $\forall \varepsilon \in \left(-\frac{r}{\|\varphi\|_{C^1(I)}}, \frac{r}{\|\varphi\|_{C^1(I)}}\right)$. In beiden Fällen folgt:

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) \equiv \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi) = 0.$$

Ist $u \in C^2(I,\mathbb{R}^n) \cap M_{P,Q}$, so erfüllt also u die (ELG): $L_{\mathcal{F}}(u) \equiv 0$ auf I nach Lemma 1.3 (i), ist also eine starke $\mathcal{F}$-Extremale.

ii) Wählen wir $\varphi \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ beliebig und $|\varepsilon| < \frac{r}{\|\varphi\|_{C^1(I)}}$, so gilt wieder $\|u+\varepsilon\varphi - u\|_{C^1(I)} < r$ und $u+\varepsilon\varphi \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$, sodaß wir aus der Voraussetzung bereits die beiden Ungleichungen $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi)$ bzw. $\mathcal{F}(u) \geq \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi)$ $\forall \varepsilon \in \left(-\frac{r}{\|\varphi\|_{C^1(I)}}, \frac{r}{\|\varphi\|_{C^1(I)}}\right)$ und somit wieder

$\delta \mathcal{F}(u,\varphi) = 0$, nun aber $\forall \varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ohne Randbedingungen an φ erhalten.

Ist also bekannt, daß $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n) \cap M_{[P,Q]}$ ist, so muß u anhand von Lemma 1.3 (ii) sowohl die (ELG) auf I als auch die (NRB)

$$F_{p_j}(x, u(x), u'(x)) = 0, \; j = 1, \dots, n, \text{ in } x = a, b$$

erfüllen.

$\square$

Beispiel $\boxed{1}$:

Wir statten die (x,z)-Ebene mit einer variablen Dichte $w(x,z) > 0$ aus und möchten die Parametrisierungen $(x, u(x))$ von Lichtstrahlen durch das sich ergebende isotrope Medium vorhersagen, indem wir dem Huygensschen oder Fermatschen Prinzip vertrauen, daß ein beliebiger Lichtstrahl der Graph einer Extremalen u des durch w gedehnten bzw. gestauchten Längenfunktionals

$$\mathcal{L}^w(v) := \int_a^b w(x, v(x)) \sqrt{1+v'(x)^2}\, dx,$$

für beliebig wählbare Intervallgrenzen $a<b$, sein muß. Dringt also ein Lichtstrahl in den Bereich $\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b\} =: E_{a,b}$ hinein, so vermuten wir, seinen Verlauf innerhalb $E_{a,b}$ als Graphen einer Extremalen von $\mathcal{L}^w$ vorhersagen zu können.

a) Die Dichte w hängt nicht von z ab.

In diesem Fall ist also $\mathcal{L}^w$ ein Spezialfall von Funktionalen $\mathcal{F}$ deren Lagrange-Funktion F nur von x und p abhängt.

Jede (starke) Extremale eines solchen $\mathcal{F}$ genügt also den (ELG): $\left(F_p(x, u'(x))\right)' \equiv 0$ auf $I=[a,b]$,

also $F_p(x, u'(x)) \equiv$ konstant auf I.

Gibt man also noch eine Anfangsgeschwindigkeit

$v_0 \overset{!}{=} u'(a) \in \mathbb{R}$, so gilt für $c := F_p(a, v_0)$:

$$F_p(x, u'(x)) \equiv c \quad \text{auf ganz } I.$$

In unserem Beispiel ist $F(x,p) := w(x)\sqrt{1+p^2}$, sodaß also jeder Lichtstrahl der Graph einer Lösung $u \in C^2(I, \mathbb{R})$ von

$$w(x)\,\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \equiv \text{const. auf } I \text{ sein muß.}$$

$$\Longrightarrow \quad w^2(x)\,u'(x)^2 = c^2 + c^2 u'(x)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad u'(x) = \pm \frac{c}{\sqrt{w^2(x) - c^2}}, \text{ falls } w^2 > c^2 \text{ auf } I.$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = u(a) \pm \int_a^x \frac{c}{(w(t)^2 - c^2)^{1/2}}\,dt. \quad (*)$$

Insbesondere für ein Medium mit konstanter Dichte $w \equiv k$ ergibt sich aus $(*)$, daß Lichtstrahlen Graphen linearer Funktionen

$$u(x) = u(a) \pm (x-a)\,\frac{c}{(k^2 - c^2)^{1/2}},$$ also Geraden sind, was mit dem „physikalischen Experiment"

offenbar übereinstimmt.

b) Falls die Dichte w hingegen von z, nicht aber von x abhängt, so ist $\mathcal{L}^w$ das Funktional der Lagrange-Funktion $w(z)\sqrt{1+p^2} =: F(z,p)$.

Auf diesen Fall ist der folgende grundlegende „Energie-Erhaltungs-Satz" anwendbar:

Theorem 1.5

Sei $F \in C^1(\overset{(z,}{\mathbb{R}^n} \times \overset{p)}{\mathbb{R}^n})$ nur von den Variablen z und p abhängig und $F_p \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, so gilt für jede starke F-Extremale, d.h. für jede C^2-Lösung u von $L_F(u) \equiv 0$ auf einem Intervall $I = [a,b]$:

$$u'(x) \cdot F_p(u(x), u'(x)) - F(u(x), u'(x)) \equiv \text{const. auf } I, \qquad (E)$$

also daß die sogenannte „Energie-Funktion"

$$\Phi(z,p) := p \cdot F_p(z,p) - F(z,p)$$

entlang der Lösung $(z,p) = (u(x), u'(x))$ für $x \in I$ erhalten bzw. konstant bleibt.

Beweis: Die Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Phi(u(x), u'(x)) = {} & u''(x) \cdot F_p(u,u')(x) \\ & + u'(x)\left(F_p(u,u')(x)\right)' - F_z(u,u')(x)\, u'(x) \\ & - F_p(u,u')(x) \cdot u''(x) \\ = {} & u'(x)\left(-L_F(u)(x)\right) \equiv 0, \quad \forall x \in I. \qquad \square\end{aligned}$$

Der Gewinn dieser Einsicht besteht in der Reduktion einer Diff.gleichung 2. Ordnung, nämlich $L_F(u) \equiv 0$, auf eine von nur 1. Ordn., nämlich auf die „Energie-Gleichung" (E), welche eventuell leichter nach $u(x)$ explizit aufgelöst werden kann.

Im Spezialfall $F(z,p) := w(z)\sqrt{1+p^2}$

lautet nun die Gleichung (E):

$$u'(x)\frac{w(u(x))\,u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} - w(u(x))\sqrt{1+u'(x)^2} \equiv \text{const.}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\cancel{w(u(x))\,u'(x)^2} - w(u(x)) - \cancel{w(u(x))\,u'(x)^2}}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \equiv \text{const.}$$

$$\Longrightarrow \quad u'(x)^2 = \frac{1}{c^2}\,w(u(x))^2 - 1\,, \quad \forall x \in I\,, (*)$$

somit $$u(x) = \pm\frac{1}{c}\int_a^x \sqrt{w(u(t))^2 - c^2}\,dt + u(a)\,, (**)$$

falls $w(u(x))^2 \geq c^2$ und falls entweder $u'(x) \geq 0$ oder $u'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$ gilt, sodaß entweder $u'(x) = \frac{1}{c}\sqrt{w(u(x))^2 - c^2}$ oder $u'(x) = -\frac{1}{c}\sqrt{w(u(x))^2 - c^2}$ $\forall x \in I$ erf. ist.

Für explizit gegebenes $w(z)$ läßt sich nun entweder die Diffgleich. (*) oder die Integralgleich. (**) nach u auflösen.

Beispiel $\boxed{2}$ Hamilton-Prinzip der Mechanik

Zur Lösung einfacher Problemstellungen aus der „analytischen Mechanik", in denen der zeitliche Verlauf bzw. die Bewegung endlich vieler Massepunkte im $\mathbb{R}^3$ unter dem Einfluß eines Kraftpotentials exakt ermittelt werden soll, erwies es sich als erfolgreich, den folgenden abstrakten Ansatz, das „Hamilton-Prinzip", anzuwenden:

Wir betrachten ein „physikalisches System", welches sich durch den zeitlichen Verlauf von n Koordinaten-Funktionen

$t \longmapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t)) =: x(t)$ im $\mathbb{R}^n$

beschreiben läßt, indem wir zusätzlich den $\mathbb{R}^n$ (streng genommen dessen Tangentialbündel) nicht mit dem euklidischen

Skalarprodukt $\langle v, \tilde{v}\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{v}_i$ sondern mittels eines nicht-euklidischen Skalarprod.

$$\langle v, \tilde{v}\rangle_A := \langle v, A(z)\tilde{v}\rangle = \sum_{j,i=1}^{n} A_{ij}(z)\, v_j \tilde{v}_i$$

mit einer C^1-Funktion $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R})$ ausstatten. Wir „verzerren" also den $\mathbb{R}^n$, indem wir in jedem seiner Punkte z die Länge eines in z startenden Vektors v nicht durch $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ sondern durch $\sqrt{\langle v, A(z)v\rangle}$ und den Winkel γ zwischen zwei in z startenden Vektoren $v, \tilde{v}$ nicht durch $\langle v, \tilde{v}\rangle = \cos\gamma\, |v|\,|\tilde{v}|$ sondern durch $\langle v, A(z)\tilde{v}\rangle = \cos\gamma\, |v|\,|\tilde{v}|$ messen, wobei $A(z)$ eine von z abhängige symmetrische, positiv definite Matrix sei.

Zahlreiche konkrete Beispiele belegen die Korrektheit des

Hamilton-Prinzip

Die Gesamtbewegung $x(t) = (x_1, \ldots, x_n)(t)$ eines „physikalischen Systems" im „verzerrten Raum" $(\mathbb{R}^n, \langle -, A(\cdot) - \rangle)$ unter dem Einfluß eines konservativen Kraftfeldes $K = -\nabla_z V$, also eines Potentials $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, muß eine (schwache) Extremale des Wirkungsfunktionals

$$S(u) := \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \langle \dot{u}, A(u(t)) \dot{u} \rangle - V(u(t))\, dt$$

im Zeitraum $[t_1, t_2] =: I$ sein.

Weiß man also, daß $x \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ gilt, so muß diese Gesamtbewegung die (ELG)

$$0 \equiv -L_F(x) \equiv \frac{d}{dt} F_v(x, \dot{x})(t) - F_z(x, \dot{x})(t) \text{ auf } I$$

der Lagrange-Funktion

$F(z,v) := \frac{1}{2}\langle v, A(z)v\rangle - V(z)$ erfüllen,

also wegen $F_v(z,v) = A(z)\cdot v$ und

$$F_z(z,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij})_z(z)\, v_i v_j - V_z(z)$$

$$A(x(t))' \cdot \dot{x}(t) + A(x(t))\cdot \ddot{x}(t) \qquad (HP)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij})_z(x(t))\,\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t) + K(x(t))$$

auf $I = [t_1, t_2]$

$\square$

Aus Theorem 1.5 wissen wir nun, daß

die „Energie-Funktion"

$\Phi(z,v) := v\cdot F_v(z,v) - F(z,v)$ die Gleichung

$$\Phi(x(t), \dot{x}(t)) \equiv \text{const. auf } I$$

erfüllt. Wegen $v\cdot F_v(z,v) = \langle v, A(z)\cdot v\rangle$

$$\Rightarrow \Phi(z,v) = \frac{1}{2}\langle v, A(z)v\rangle + V(z)$$

und wir erhalten in der Tat den bekannten

Energie-Erhaltungssatz:

Für jede C^2-Gesamtbewegung $x = (x_1, \ldots, x_n)(t)$ eines phys. Systems in $(\mathbb{R}^n, \langle -, A(\cdot) - \rangle)$ unter dem Einfluß eines konservativen Kraftfeldes $K = -\nabla_z V$ gilt die Energie-Erhaltung:

$$\frac{1}{2} \langle \dot{x}(t), A(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \rangle + V(x(t)) \equiv \text{const.}$$
auf I $\square$

Schließlich bemerken wir, daß sich die Gleichungen (HP) im Spezialfall $n = 3N$ und
$$A(z) := \operatorname{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \ldots, m_N, m_N, m_N)$$
auf die klassischen „Newton'schen Beweg. gleich."

$$m_j \cdot \ddot{x}_j(t) = -\nabla_{z_j} V(x(t)) \equiv K_j(x(t)) \quad \text{auf } I$$

mit $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3}_{N\text{-fach}}$, $j = 1, \ldots, N$

für N Punkte $\overline{x}_1(t), \ldots, \overline{x}_N(t)$ im $\mathbb{R}^3$ mit den Massen $m_1, \ldots, m_N$, welche unter dem Einfluß der Kräfte $K_j = -\nabla_{\overline{z}_j} V : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^3$ stehen und somit eine Beschleunigung erfahren, reduzieren.

Betrachten wir als Anwendung bzw. Kombination des Hamilton-Prinzips und von Th. 1.5 das Beispiel $\boxed{3}$: Die Brachystochrone

Wir fixieren zwei Punkte $A = (a, H)$, $B = (b, \overline{H})$ mit $a < b$ und $0 \leq \overline{H} < H$ in der (x, z)-Ebene und suchen nach derjenigen Kurve $\gamma(x) = (x, u(x)) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ der Klasse C^2 mit $\gamma(a) = A$ bzw. $u(a) = H$ und $\gamma(b) = B$ bzw. $u(b) = \overline{H}$, auf der eine Punktmasse $\underline{X}(t) = (x(t), z(t))$ mit Masse m unter dem Einfluß der konstanten Schwerkraft $K \equiv (0, -mg)$ mit dem Potential

$V(x,z) := mgz$ möglichst schnell von A nach B hinuntergleitet, sodaß also derjenige Zeitpunkt $\Theta = \Theta(u)$ mit $x(\theta) = b$ minimal ausfällt.

OBdA können wir unsere Suche auf zu Beginn monoton fallende Funktionen u, also mit $u'(x) < 0$ $\forall x \in (a, b_0)$, mit $a < b_0 < b$ und auf Gleitvorgänge $\underline{X}(t) = (x(t), u(x(t)))$ mit $\dot{x}(t) > 0$ $\forall t \in (0, \Theta(u)]$ einschränken. Außerdem setzen wir $\dot{\underline{X}}(0) = 0$ voraus.

Nehmen wir nun die Existenz eines solchen schnellsten Gleitvorgangs $\underline{X}(t) = (x(t), u(x(t)))$ aus $C^2((0, \Theta(u)], \mathbb{R}^2)$ an, so liefert der Energie-Erhaltungssatz aus Bsp. $\boxed{2}$ mit $A \equiv \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ und $V(x,z) = mgz$:

$$\frac{m}{2} |\dot{\underline{X}}(t)|^2 + mg\, u(x(t)) \equiv \text{const.} =: c.$$

Bezeichnen wir $h := \frac{c}{m}$, so erhalten wir also wegen $|\dot{X}(t)|^2 = \dot{x}(t)^2 + u'(x(t))^2 \dot{x}(t)^2$:

$$\frac{1}{2}\left(1+u'(x)^2\right)\dot{x}(t)^2 + g\,u(x(t)) \equiv h \quad \text{auf } [0,\theta(u)]. \qquad (*)$$

Wegen $\dot{x}(t) > 0 \ \forall t$ erhalten wir hieraus:

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{2(h - g\,u(x(t)))}{1+u'(x(t))^2}\right)^{1/2}$$

und somit für die C^2-Umkehrfunktion $t(x)$:

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{\dot{x}(t(x))} = \left(\frac{1+u'(x)^2}{2(h-g\,u(x))}\right)^{1/2}$$

Da außerdem $h = gH$ aus den Voraussetzungen $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = a$ und $u(a) = H$ in Kombination mit $(*)$ folgt, erhalten wir die Diff.glei.

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{1}{\sqrt{H-u(x)}}\,\sqrt{1+u'(x)^2}, \quad x \in (a,b],$$

sodaß wir durch deren Integration über (a,b) die Fallzeit $\theta(u)$ erhalten:

$$\Theta(u) = t(b) - \underbrace{t(a)}_{=0} = \int_a^b \frac{dt}{dx}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{H-u(x)}} \sqrt{1+u'(x)^2}\,dx .$$

Somit erweist sich die gesuchte optimale Kurve γ von A nach B als Graph eines Minimierers u des Variationsintegrals

$$\Theta(u) := \int_a^b F(u(x), u'(x))\,dx \quad \text{mit}$$

$$F(z,p) := w(z)\cdot\sqrt{1+p^2} \in C^2((-\infty,H)\times\mathbb{R}) \text{ und}$$

Dichte-Funktion $w(z) := \frac{1}{\sqrt{H-z}} > 0$, wie in Beispiel $\boxed{1}$,(b) bereits diskutiert, wobei wir OBDA $g=\frac{1}{2}$ setzten.

Aus Theorem 1.5 leiteten wir in Bsp. $\boxed{1}$ (b) bereits für C^2-Extremalen zu Lagrange-Funktionen der Gestalt $F(z,p) := w(z)\sqrt{1+p^2}$

den Erhaltungssatz

$w(u(x))^2 \equiv \underbrace{\text{const}}_{>0}\,(1+u'(x)^2)$ her, hier also

$$(1+u'(x)^2)(H-u(X)) \equiv \text{const.} =: 2r, \text{ für ein } r>0. \quad (**)$$

In einer Übungsaufgabe überlege man sich nun, daß für $z \in [H-2r, H]$ die Variablentransformation

$\tau(z) := \arccos\left(\frac{z-H}{r}+1\right)$, also $\cos\tau(z) = \frac{z-H}{r}+1$,

erlaubt und Bild$(u) \subset [H-2r, H]$ wegen $(**)$, also $\tau(u(x))$ für $x \in (a,b]$ wohldefiniert und insbeson. wie u selbst aus $C^2((a,b])$ ist.

$$\Rightarrow \quad H-u(x) = r\left(1-\cos\tau(u(x))\right)$$
$$= 2r\sin^2\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right) \qquad (***)$$

$$\overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} \quad -u'(x) = 2r\,\tau(u(x))'\sin\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1+u'(x)^2 = 1+\left(4r^2(\tau(u(x))')^2\right.$$
$$\left.\sin^2\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)\right.$$

Setzen wir weiterhin $\binom{*}{**}$ in $(**)$ ein, so sehen wir:

$$\left(1+u'(x)^2\right)\sin^2\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)\equiv 1 \quad \text{auf } (a,b].$$

Kombination der letzten beiden Gleichungen liefert:

$$1\equiv\sin^2\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)+\left(4r^2(\tau(u(x))')^2\sin^4\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)\right)\cos^2\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)$$

Wegen $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha, \forall\alpha\in\mathbb{R}$, und $\tau(u(x))\underset{(**)+\text{Def. von }\tau}{\in}[0,\pi]$ muß hieraus $4r^2(\tau(u(x))')^2\sin^4\left(\frac{\tau(u(x))}{2}\right)\equiv 1$ folgen und zusammen mit $2\sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right)=1-\cos\tau$

$$\Longrightarrow\quad\left(r\,\tau(u(x))'\left(1-\cos\tau(u(x))\right)\right)^2\equiv 1 \qquad \begin{pmatrix}**\\**\end{pmatrix}$$

Desweiteren folgt aus der Forderung, daß $u(x)$ monoton auf $(a,\underbrace{b_0}_{b_0\in(a,b)}]$ fällt, daß

$$\cos\tau(u(x))=\frac{u(x)-H}{r}+1 \text{ ebenfalls auf } (a,b_0]$$

monoton fällt und somit $\tau(u(x))$ auf $(a, b_0]$ monoton wächst (in den Grenzen $[0, \pi]$), also daß $\tau(u(x))' > 0$ auf $(a, b_0]$ gilt, und zweitens wissen wir wegen $u(x) \leq H \ \forall x$, daß

$$1 - \cos\tau(u(x)) = \frac{H - u(x)}{r} \geq 0 \quad , \forall x \in (a, b],$$

gilt. Somit liefert $\binom{**}{**}$:

$$r\, \tau(u(x))' (1 - \cos\tau(u(x))) \equiv 1 \quad \text{auf } (a, b_0] \tag{Δ}$$

und somit auf $(a, b]$!

Beachten wir noch $1 - \cos\tau(u(a)) = \frac{H - u(a)}{r}$

$u(a) = H \rightarrow \quad = 0$, so

sehen wir $\tau(u(a)) = 0 \mod 2\pi$, sodaß wir $\tau(u(a)) = 0$ annehmen dürfen und wir durch Integration von (Δ) über $(a, x]$:

$$r\,\tau(u(x)) - r \sin\tau(u(x)) = x - a \ , \ \forall x \in (a, b]$$

erhalten. Weil $x \longmapsto \tau(u(x))$ monoton wächst, und zwar auf ganz $(a, b]$ anhand von (Δ)

existiert deren Umkehrfunktion $\tau \mapsto x(\tau)$, sodaß wir schließlich die Parametrisierung

$$x(\tau) = a + r(\tau - \sin\tau) \quad \text{für} \quad \tau \in [0, \pi]$$

und zusammen mit $\cos\tau(u(x)) = \dfrac{u(x) - H}{r} + 1$ auch $u(x(\tau)) = H + r(\cos\tau - 1)$, also insgesamt

$$\gamma(\tau) = \begin{pmatrix} a + r(\tau - \sin\tau) \\ H + r(\cos\tau - 1) \end{pmatrix} \qquad (Z)$$

für $\tau \in [0, \pi]$ erhalten. Insbesondere ergibt sich $u' < 0$ auf $(a, b]$! In einer Übungsaufgabe untersuche man nun weiterhin die Gestalt der hiermit gefundenen Parametrisierung eines sogen. „Zykloidenbogens", der für $\tau = 0$ im Punkt (a, H) beginnt und dann monoton in den Punkt $(a + r\pi, H - 2r)$ für $\tau = \pi$ hinabrollt".

Man beachte, daß wir keineswegs die Existenz einer Brachystochrone bewiesen haben, sondern nur die Tatsache, daß ausschliesslich Zykloidenbögen als „C^2-Kurven schnellsten Gleitens" von A nach B mit beispielsweise der obigen Parametrisierung $\mathfrak{X}(\tau)$ in (Z) in Frage kommen.

Die Beispiele des folgenden Paragraphen warnen, daß bereits sehr simple Variationsintegrale $\mathcal{F}$ in zu klein gewählten Funktionenmengen $M_{P,Q}$ keinen (globalen) Minimierer besitzen müssen, obwohl $\inf_{M_{P,Q}} \mathcal{F} > -\infty$ ist und es sogar eine „Infimal"-Folge $\{u_n\} \subset M_{P,Q}$ mit $\mathcal{F}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{M_{P,Q}} \mathcal{F}$ gibt!