§ 2 Nicht-Existenz und Regularität von $\mathcal{F}$-Minimierern bzw. $\mathcal{F}$-Extremalen

Beisp. $\boxed{1}$: Eulers Paradoxon

Wir betrachten die polynomiale Lagrange-Fkt. $F(p) := (p^2-1)^2$ und dazu $\mathcal{F}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2-1)^2 dx$ auf den beiden folgenden Funktionenmengen:

$$\mathcal{C}_1 := \{ u \in Lip([0,1],\mathbb{R}) \mid u(0)=0,\ u(1)=0 \} \text{ und}$$
$$\cup$$
$$\mathcal{C}_2 := \{ u \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \mid u(0)=0,\ u(1)=0 \}$$

Die Funktion $u^*(x) := \frac{1}{2} - |x-\frac{1}{2}|$ ist Lipschitz-stetig, erfüllt $u^*(0) = 0 = u^*(1)$, ist somit in $\mathcal{C}_1$ enthalten und hat außerdem die Eigenschaft

$$u^*(x)' = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,\frac{1}{2}) \\ -1 & \text{für } x \in (\frac{1}{2},1] \end{cases}, \text{ also insbesondere}$$

$$|u^*(x)'|^2 \equiv 1 \quad \forall x \in [0,1] \setminus \{\tfrac{1}{2}\}$$

Da offenbar $\mathcal{F} \geq 0$ auf $\mathcal{C}_1$ gilt, sehen wir also

$$0 = \mathcal{F}(u^*) = \inf_{\mathcal{C}_1} \mathcal{F},$$ daß also u^* ein globaler

Minimierer von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{C}_1$ ist.

In einer Übungsaufgabe konstruiere man nun eine Folge von C^1-Funktionen u_n^* auf $[0,1]$ mit $|\mathcal{F}(u_n^*) - \underbrace{\mathcal{F}(u^*)}_{=0}| \longrightarrow 0$, $u_n^*(0) \equiv 0 \equiv u_n^*(1)$,

$$\sup_{[0,1]} |u_n^* - u^*| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$ sodaß

sich insbesondere $\inf_{\mathcal{C}_2} \mathcal{F} = 0$ ergibt.

Nun kann es jedoch keine Funktion $v^* \in \mathcal{C}_2$ mit $\mathcal{F}(v^*) = \inf_{\mathcal{C}_2} \mathcal{F} = 0$ geben, da diese demnach $|(v^*)'| \equiv 1$ auf $[0,1]$ erfüllen müßte, sodaß zusammen mit $v^*(0) = 0$ und $v^* \in C^1([0,1])$ nur die beiden Möglichkeiten $v^*(x) = x$ oder $= -x$ in Konflikt mit $v^*(1) = 0$ übrig blieben!

Die Funktionenmenge $\mathcal{C}_2$ stellt sich somit für die Existenz eines globalen Minimierers von $\mathcal{F}$ als zu klein heraus! $\square$

<u>Beispiel $\boxed{2}$</u>: Youngs Zig-Zag-Approximation

Nun betrachten wir die Lagrange-Funktion

$F(z,p) := (1+z^2)\left(1+(p^2-1)^2\right)$ und dazu

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 \left(1+u(x)^2\right)\left(1+\left(u'(x)^2-1\right)^2\right) dx$$

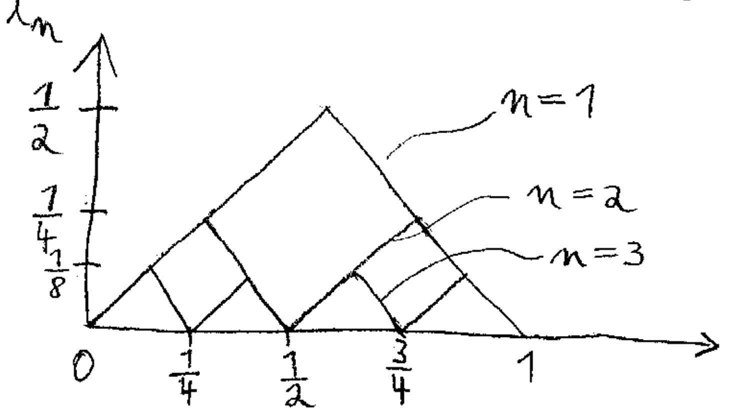
auf $\mathcal{C} := \{ u \in Lip([0,1],\mathbb{R}) \mid u(0)=0,\ u(1)=0 \}$.

Zunächst sieht man $\mathcal{F} \geq 1$ auf $\mathcal{C}$, und

die Folge $u_n(x) := \frac{1}{2^n} - \left| x - (2k+1)\frac{1}{2^n} \right|$

für $x \in \left[k\frac{1}{2^{n-1}}, (k+1)\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ und

$k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1$



hat die Eigenschaften

$u_n \in \mathrm{Lip}([0,1])$, $u_n(0) = 0 = u_n(1)$, also $u_n \in \mathcal{C}$,

$$|u_n'| \equiv 1 \quad \text{auf } [0,1] \setminus \{ k/2^n \}_{k=1,\dots,2^n-1} \quad (*)$$

und
$$\int_0^1 |u_n(x)|^2 dx = 2^n \int_0^{2^{-n}} x \, dx$$
$$= 2^n \frac{1}{2} 2^{-2n} = 2^{-(n+1)}. \quad (**)$$

Kombinieren wir $(*)$ mit $(**)$, so erhalten wir

$$\mathcal{F}(u_n) = \int_0^1 1 + u_n(x)^2 dx = 1 + 2^{-(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

Die „Zig-Zag-Folge" $\{u_n\}$ stellt sich somit als „Infimalfolge" für $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$ heraus:

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{F}(u_n) = 1 = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \quad !$$

Offenbar kommt der gleichmäßige Limes $u^* \equiv 0$ der Infimalfolge $\{u_n\}$ nicht als globaler Minimierer von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{C}$ in Frage, da zwar $u^* \in \mathcal{C}$ jedoch $\mathcal{F}(u^*) = \int_0^1 (1+0)(1+(-1)^2) dx = 2$ gilt! Und in der Tat kann es überhaupt keinen globalen Minimierer v^* von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$ geben, da $\mathcal{F}(v^*) = 1$ einerseits $v^* \equiv 0$ und andererseits $(v^*)' \equiv \pm 1$ $\mathcal{L}^1$-f.ü. auf $[0,1]$ impliziert. v^* müßte also aus unendlich vielen, unendlich kleinen „Sägezähnen" bestehen und kann insbesondere nicht aus $\mathrm{Lip}([0,1])$ sein!

Die Funktionenmenge $\mathcal{C}$ ist hier also zur Auffindung eines $\mathcal{F}$-Minimierers wesentlich zu klein!

Wäre übrigens die Lagrange-Funktion $F(z,p) = (1+z^2)\left(1+(p^2-1)^2\right)$ auf einer konvexen Umgebung Ω von $[0,\frac{1}{2}] \times \{\pm 1\}$, also z.B. auf $\Omega := (-\varepsilon, 1) \times (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, strikt konvex, so folgte aus einem „Unterhalbstetigkeits-Resultat" von Serrin: $\mathcal{F}(0) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) = 1$ $\lightning$ zu $\mathcal{F}(0) = 2$.

Tatsächlich ist F auf Ω <u>nicht konvex</u> !

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, eine möglichst einfache Zusatzbedingung an eine Lagrange-Funktion F zu finden, welche garantiert, daß eine schwache $\mathcal{F}$-Extremale $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, welche also nur $\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ erfüllt, bereits von der Klasse $C^2(I, \mathbb{R}^n)$ ist und somit sogar die (ELG) $L_F(u) \equiv 0$ löst:

Aus $$0 = \delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \int_a^b F_p(x,u,u')\,\varphi'(x) + F_z(x,u,u')\,\varphi\,dx$$

$$(*) \qquad \underset{\text{P.I.}}{=} \int_a^b \left(F_p(x,u,u') - \int_a^x F_z(t,u,u')\,dt \right) \varphi'(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$$

kann zwar keine weitere Information mittels des FLdVR = Lemma 1.2 gefolgert werden, jedoch mittels des folgenden Lemmas von Du Bois-Reymond:

Lemma 2.1

Sei $f \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ und erfülle $\int_a^b f \cdot \varphi' dx = 0$ $\forall \varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$, so ist bereits $f \equiv c \in \mathbb{R}^n$ auf I.

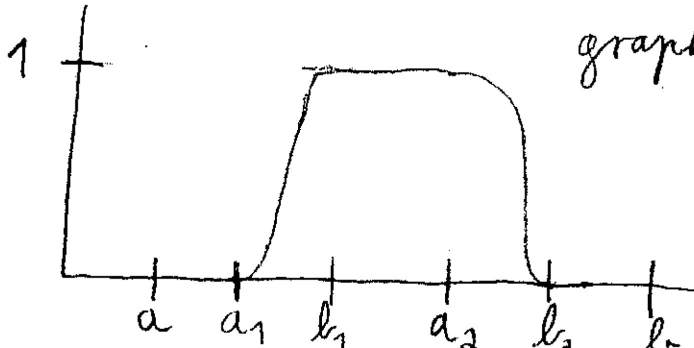
Beweis: Da wir insbesondere mit Funktionen der Form $\varphi(x) = e_i \cdot \xi(x)$, für $e_i := (0, -, 1, -, 0)$ und $\xi \in C_c^1(\mathring{I})$, in $\int_a^b f \cdot \varphi' dx = 0$ testen dürfen, reicht es, die Behauptung für $n = 1$ zu beweisen.

Wir wählen nun 4 beliebige Punkte a_1, b_1, a_2, b_2 in $\mathring{I}$ mit $a < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < b$ und eine beliebige „Hügelfunktion" $\bar{\varphi} \in C_c^1(\mathring{I})$, welche

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [b_1, a_2] \\ 0 & , x \in [a, a_1] \cup [b_2, b] \end{cases}$$

und

$\bar{\varphi}(x) \in (0, 1)$ für $x \in (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$ mit $\bar{\varphi}' > 0$ auf (a_1, b_1) und $\bar{\varphi}' < 0$ auf (a_2, b_2) erfüllt, also



Wir erhalten durch Testen mit $\bar{\varphi}$:

$$0 = \int_{a_1}^{b_1} f \cdot \bar{\varphi}' \, dx + \int_{a_2}^{b_2} f \cdot \bar{\varphi}' \, dx.$$

Der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Integralrechn. liefert außerdem Zwischenwerte $\xi_1 \in (a_1, b_1)$, $\xi_2 \in (a_2, b_2)$, sodaß

$$\int_{a_i}^{b_i} f \bar{\varphi}' dx = f(\xi_i) \int_{a_i}^{b_i} \bar{\varphi}' dx, \quad i = 1,2, \text{ gilt,}$$

also anhand der Konstruktion von $\bar{\varphi}$:

$$0 = f(\xi_1) - f(\xi_2).$$

Nun dürfen wir $b_1 \searrow a_1$ und $b_2 \searrow a_2$ streben lassen, währenddessen $\xi_1 \searrow a_1$ und $\xi_2 \searrow a_2$ konvergiert, also $0 = f(a_1) - f(a_2)$, für beliebige Punkte $a_1 < a_2$ in $\mathring{I}$, was in der Tat $f \equiv \text{const.}$ auf I beweist. $\square$

Wenden wir dieses Lemma auf Gleichung $(*)$ an, so erhalten wir sofort:

Theorem 2.2:

Sei $F \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ bloß eine schwache F-Extremale, so gibt es immerhin eine Konstante $c \in \mathbb{R}^n$, sodaß

$$F_p(x, u, u') - \int_a^x F_z(t, u, u')\, dt \equiv c \quad \text{auf } I$$

und somit $F_p(\cdot, u, u') \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und damit

$$\frac{d}{dx}\left(F_p(x, u, u')\right) - F_z(x, u, u') \equiv 0 \quad \text{auf } I \text{ gilt.} \qquad \square$$

(ELG)*

Man beachte, daß die obige Gleichung erst dann zur (ELG) $L_F(u) \equiv 0$ wird, falls man $F_p \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ weiß oder zeigen kann, sodaß man nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} F_p(x, u, u') = F_{px}(x, u, u') + D_z F_p(-) \cdot u'(x) + D_p F_p(x, u, u') \cdot u''(x)$$

ausdifferenzieren darf!

Das Theorem 2.2. kann nun mit dem folgenden Spezialfall des Satzes über „Implizite Funktionen" kombiniert werden:

<u>Hilfssatz 2.3</u> (Satz über implizite Fktionen)

Sei $G(x,p): \overset{\text{offen}}{U} \subset \mathring{I} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 mit $\det D_p G(x,p) \neq 0$, sodaß also die Jacobi-Matrize

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial p_1} & \frac{\partial G_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial p_1} & \frac{\partial G_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}(x,p)$$

in jedem Punkt (x,p) aus der offenen Umgebung U der Nullstellenmenge $\mathcal{N}_G := \{(x,p) \in U \mid G(x,p) = 0\}$ invertierbar sei. Dann existieren zu einem beliebig fixierten Pkt $(x^*,p^*) \in \mathcal{N}_G$: $\varepsilon > \delta_1^*, \delta_2^* > 0$ und eine C^1-Fkt. $v: (x^* - \delta_1^*, x^* + \delta_2^*) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sodaß gerade $\mathcal{N}_G \cap B_\varepsilon(x^*, p^*) = \{(x, V(x)) \mid x \in (x^* - \delta_1^*, x^* + \delta_2^*)\}$

$$\equiv \operatorname{graph}(V)$$

gilt. M.a.W.: Die Nullstellenmenge $\mathcal{N}_G$ läßt sich um jeden ihrer Punkte lokal über einem kleinen Intervall in C^1-Weise „scannen" bzw. als Graph einer C^1-Fktion $V : (x^* - \delta_1^*, x^* + \delta_2^*) \to \mathbb{R}^n$ darstellen. Insbesondere ist $\mathcal{N}_G$ eine 1-dim. C^1-Mannigfaltigkeit! $\square$

<u>Theorem 2.4 (1. Regularitätssatz)</u>

Sei $F \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $F_p \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine Lagrange-Funktion und $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine nur schwache F-Extremale mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess}_p F(x, u(x), u'(x)) \equiv D_p F_p(x, u(x), u'(x))$ auf $\mathring{I}$ invertierbar ist. Dann ist bereits $u \in C^2(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ und löst die (ELG) $L_F(u) = 0$ auf $\mathring{I}$.

<u>Bew.</u>: Die Funktion $\pi(x) := \int_a^x F_z(t, u, u')\,dt$

ist aus $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, und nach Theorem 2.2 existiert ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$, sodaß u die Gleichung

$$F_p(x, u(x), u'(x)) - \pi(x) - c = 0 \quad \forall x \in I \text{ löst.}$$

Die Fktion $G(x,p) := F_p(x, u(x), p) - \pi(x) - c$ von $I \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ ist somit ebenfalls aus C^1 und erfüllt nach Voraussetzung an F und u:

$$\det G_p(x, u'(x)) \equiv \det D_p F_p(x, u(x), u'(x)) \neq 0, \ \forall x \in \mathring{I},$$

und außerdem gerade $G(x, u'(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in I$, also daß $\mathrm{graph}(u') \subset \mathcal{N}_G$ ist.

Da G_p auf $I \times \mathbb{R}^n$ stetig ist, existiert eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von $\mathrm{graph}(u'|_{\mathring{I}})$ in $\mathring{I} \times \mathbb{R}^n$, sodaß $\det G_p(x,p) \neq 0 \ \forall (x,p) \in \mathcal{U}$ gilt.

Zumindest auf die Einschränkung von G auf $\mathcal{U}$ kann nun der Hilfssatz 2.3 angewandt werden! Wegen $\mathrm{graph}(u'|_{\mathring{I}}) \subset \mathcal{N}_{G|_{\mathcal{U}}}$ liefert dieser zu jedem fixierten Punkt $(x^*, p^*) \in \mathrm{graph}(u'|_{\mathring{I}})$ ein Tripel $\varepsilon > \delta_1^*, \delta_2^* > 0$ und eine C^1-Fktion $V : (x^* - \delta_1^*, x^* + \delta_2^*) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathrm{graph}(u') \cap B_\varepsilon(x^*, p^*) \subset \Lambda_{G|_U} \cap B_\varepsilon(x^*, p^*) \underset{\text{Hilfs-Th. 2.3}}{=} \mathrm{graph}(V),$$

und somit für ein $\delta^* \in (0, \min(\delta_1^*, \delta_2^*))$:

$$\{(x, u'(x)) \mid x \in (x^* - \delta^*, x^* + \delta^*)\} \left(\subset \mathrm{graph}(u') \cap B_\varepsilon(x^*, p^*)\right)$$

$$\subset \{(x, V(x)) \mid x \in (x^* - \delta_1^*, x^* + \delta_2^*)\}$$ und somit

$$u'(x) = V(x) \quad \forall x \in (x^* - \delta^*, x^* + \delta^*).$$

Da V eine C^1 Fkt. ist, stellt sich also $u \in C^2((x^* - \delta^*, x^* + \delta^*), \mathbb{R}^n)$ heraus, und da wir $x^* \in \mathring{I}$ beliebig wählen konnten, erhalten wir in der Tat $u \in C^2(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$. Insbesondere können wir nun in der Gleichung $(ELG)^*$ für λ in Theorem 2.2 nach der Kettenregel durchdifferenzieren und erhalten $L_F(u) \equiv 0$ auf $\mathring{I}$. □

Als explizite Anwendung dieses Regularitätssatzes notieren wir das für die „Analytische Mechanik" aus Beispiel $\boxed{2}$ in §1 wichtige

Korollar 2.5

Ist $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ bloß eine schwache Extremale eines Wirkungsfunktionals

$$S(u) := \int_a^b \frac{1}{2}\langle \dot{u}, A(t,u)\cdot\dot{u}\rangle + \langle B(t,u(t)), \dot{u}\rangle + U(t,u)\,dt$$

also zur Lagrange-Funktion

$$F(t,z,v) := \frac{1}{2}\langle v, A(t,z)v\rangle + \langle B(t,z), v\rangle + U(t,z)$$

mit $A(t,z) \in GL_n(\mathbb{R}) \cap Sym_n(\mathbb{R})$ aus C^1 sowie $B, U \in C^1(I\times\mathbb{R}^n)$, so ist u bereits von der Klasse $C^2(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ und löst die (ELG) auf $\mathring{I}$:

$$0 \equiv L_F(u)(t) = \frac{d}{dt}\left(A(t,u)\cdot\dot{u} + B(t,\dot{u})\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_z^{ij}(t,u(t))\cdot\dot{u}^i\dot{u}^j(t) - \sum_{i=1}^{n} B_z^i(t,u(t))\cdot\dot{u}^i(t) - U_z(t,u(t)).$$

Beweis:

Wir haben $F_v(t,z,v) = A(t,z)\cdot v + B(t,z)$ aus $C^1(I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, da $A\in C^1(I\times\mathbb{R}^n, (GL_n\cap Sym_n)(\mathbb{R}))$ und $B\in C^1(I\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ und außerdem $Hess_v F(t,z,v) = A(t,z)$ invertierbar sogar für beliebige $(t,z,v)\in I\times\mathbb{R}^{2n}$, also insbesondere $\det Hess_v F(t,u(t),\dot{u}(t))\neq 0 \quad \forall t\in \mathring{I}$.

Somit folgt die Beh. sofort aus Th. 2.4. $\square$