§ 3 Eindimensionale Variationsrechnung mit Nebenbedingungen

Teil I) Isoperimetrische Probleme

In Verallgemeinerung der klassischen isoperimetrischen Probleme aus den Beispielen $\boxed{3}$ und $\boxed{4}$ aus § 0 betrachten wir die folgende Problemstellung: Es sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ offen, F und G zwei Lagrange-Fktionen aus $C^1(\mathcal{U})$, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ die zu F und G gehörenden Funktionale und

$$M_{P,Q}(\mathcal{G} \equiv c) := \left\{ u \in C^1(\underbrace{[a,b]}_{=I}, \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} (x, u(x), u'(x)) \in \mathcal{U} \;\; \forall x \in I \\ u(a) = P,\; u(b) = Q,\; \underline{\mathcal{G}(u) = c} \end{array} \right\}.$$

Welche notwendige Bedingung muss eine Funktion $v \in M_{P,Q}(\mathcal{G} \equiv c)$ erfüllen, um ein lokales Minimum von $\mathcal{F}$ innerhalb $M_{P,Q}(\mathcal{G} \equiv c)$
oder Maximum

zu sein, d.h. um

$\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(u)$ bzw. $\mathcal{F}(v) \geq \mathcal{F}(u)$ für alle $u \in M_{P,Q}$ mit $\|u-v\|_{C^1(\bar{I})} < r$ unter der Nebenbedingung $\mathcal{G}(u) = c$ zu erfüllen?

In Bsp. $\boxed{3}$ aus §0 war also $\mathcal{F}$ ein Flächeninhalt A, welcher in $M_{b_1,b_2}(\mathcal{G} \equiv c)$ zu maximieren war, und $\mathcal{G}$ eine Kurvenlänge $\mathcal{L}$, die durch $\mathcal{L} \overset{!}{\equiv} c$ die isoperimetrische Nebenbedingung darstellte.

Wir bauen das zu erreichende Resultat auf:

<u>Lemma 3.1</u> (Lagrange-Multiplikatoren-Satz)

Seien $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $g_1, \ldots, g_r \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ Funktionen auf einer offenen Teilmenge Ω eines $\mathbb{R}^N$, $0 < r < N$, und $x_0 \in \Omega$ ein Punkt mit der Eigenschaft:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \nabla g_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla g_r(x_0) \end{pmatrix} = r.$$

Gilt nun entweder

$f(x_0) \leq f(x)$ oder $f(x_0) \geq f(x)$ für alle x aus der $(N-r)$-dimensionalen U-Mannigfaltigkeit $M_{g_1,\dots,g_r} := \{ x \in B_\delta(x_0) \mid g_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,r \}$ des $\mathbb{R}^N$, so muß x_0 ein kritischer Punkt einer Linearkombination $f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_r g_r$, also $0 = \nabla f(x_0) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \nabla g_j(x_0)$, für gewisse „Lagrange-Multiplikatoren" $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ sein. $\square$

__Theorem 3.2__

Sei $v \in M_{P,Q}(\mathcal{G} \equiv c)$ ein lokaler Minimierer oder Maximierer von $\mathcal{F}$ innerhalb $M_{P,Q}(\mathcal{G} \equiv c)$, gelte also $\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(u)$ oder $\mathcal{F}(v) \geq \mathcal{F}(u)$ für alle $u \in M_{P,Q}$ mit $\|u - v\|_{C^1(\overline{I})} < r \ll 1$ unter der Nebenbedingung $\mathcal{G}(u) \equiv c$, dann gibt es einen „Lagrange-Multiplikator" $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß v eine schwache Extremale des Funktionals $\mathcal{F} + \lambda\,\mathcal{G}$ ist, sodaß also $\delta(\mathcal{F}+\lambda\mathcal{G})(v,\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ erfüllt ist, falls man garantieren kann, daß $\delta\mathcal{G}(v,\psi) \neq 0$ für zumindest ein $\psi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ gilt.

Sind zudem $v \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ und $F, G \in C^2(\mathcal{U})$, so muß v die (ELG): $L_{(F+\lambda G)}(v) \equiv 0$ auf I erfüllen.

<u>Beweis:</u> Nach Voraussetz. an $\mathcal{G}$ existiert ein $\psi^* \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ mit $\delta\mathcal{G}(v,\psi^*) = 1$. Für ein beliebiges $\varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ betrachten wir

$$f(\varepsilon, t) := \mathcal{F}(v + \varepsilon\varphi + t\psi^*) \text{ und}$$
$$g(\varepsilon, t) := \mathcal{G}(v + \varepsilon\varphi + t\psi^*) \text{ für } (\varepsilon, t) \text{ aus}$$

$\mathcal{U} := (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-t_0, t_0)$ und hinreichend kleine

$\varepsilon_0, t_0 > 0$, so daß noch $\|\varepsilon\varphi + t\psi^*\|_{C^1(I)} < r$ und

$\big(x, (v+\varepsilon\varphi+t\psi^*)(x), (v'+\varepsilon\varphi'+t\psi^{*\prime})(x)\big) \in \mathcal{U}$, $\forall x \in I$, gilt.

Aus unserer Voraussetzung an v folgt nun

$$f(0,0) = \mathcal{F}(v) \leq \text{bzw.} \geq f(\varepsilon, t)$$

für diejenigen $(\varepsilon, t) \in \Omega$, die $g(\varepsilon, t) = c$ erfüllen. Wegen

$$\nabla g(\varepsilon, t)\Big|_{(\varepsilon,t)=(0,0)} = \big(\delta\mathcal{G}(v,\varphi), \delta\mathcal{G}(v,\psi^*)\big)$$
$$= \big(\delta\mathcal{G}(v,\varphi), 1\big) \neq (0,0)$$

ist also der Punkt $(0,0)$ ein lokaler Minimierer bzw. Maximierer der Einschränkung von f auf die 1-dimensionale U-Mfkeit

$M := \{(\varepsilon, t) \in B_\rho(0,0) \,|\, g(\varepsilon, t) = c\} \subset \Omega$, für ein $\rho \ll 1$.

Somit liefert Lemma 3.1 die Existenz eines Lagrange-Multiplikators $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß

$$\nabla f(0,0) + \lambda \nabla g(0,0) = (0,0), \text{ d. h. also}$$

$$\begin{pmatrix} \delta \mathcal{F}(v,\varphi) \\ \delta \mathcal{F}(v,\varphi^*) \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \delta \mathcal{G}(v,\varphi) \\ \delta \mathcal{G}(v,\varphi^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\, \delta \mathcal{G}(v,\varphi) \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

erfüllt ist, $\forall \varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$.

Die erste dieser beiden Gleichungen besagt gerade $\delta(\mathcal{F} + \lambda \mathcal{G})(v,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ und die zweite, daß λ unabh. von φ ist!

Im Falle $v \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ folgen somit hieraus die (ELG): $L_{F+\lambda G}(v) \equiv 0$ mittels Lemma 1.3. $\square$

In einer Übungsaufgabe leite man dem obigen Beweis folgend noch die folgende leichte Verallgemeinerung von Theorem 3.2 her:

Theorem 3.3

Sei $v \in M_{P,Q}(\mathcal{G}_1 \equiv c_1, \mathcal{G}_2 \equiv c_2, \dots, \mathcal{G}_r \equiv c_r)$ ein lokaler Extremierer von $\mathcal{F}$ innerhalb $M_{P,Q}(\mathcal{G}_i \equiv c_i, i = 1, \dots, r)$, gelte also $\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(u)$ oder $\mathcal{F}(v) \geq \mathcal{F}(u)$ für alle $u \in M_{P,Q}$ mit $\|u-v\|_{C^1(\bar{I})} < \delta \ll 1$ unter r isoperimetrischen Nebenbedingungen $\mathcal{G}_j(u) \overset{!}{=} c_j$, $j=1,\dots,r$, dann gibt es r Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{R}$, sodaß

$$0 = \delta\Big(\mathcal{F} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathcal{G}_j\Big)(v,\varphi)$$

$$\equiv \delta\mathcal{F}(v,\varphi) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, \delta\mathcal{G}_j(v,\varphi), \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathring{I},\mathbb{R}^n)$$

von v erfüllt wird, falls man die Existenz von r Funktionen $\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_r^* \in C_c^1(\mathring{I},\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $\operatorname{Rang}\Big(\big(\delta\mathcal{G}_j(v,\psi_\ell^*)\big)_{j,\ell=1,\dots,r}\Big) = r$ garantieren kann.

$\square$

<u>Beispiel $\boxed{1}$</u>

Wir fixieren zwei Punkte $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ und möchten diejenige Form analytisch verstehen, die ein Seil S der Länge $c > |P_1 - P_2|$ unter Einfluß der Schwerkraft anzunehmen versucht, nachdem es an seinen Endpunkten in P_1 und P_2 befestigt worden ist. Jeder Punkt $(x,y) \in S$ versucht seine potentielle Energie-Dichte $V(x,y) = \varsigma_S(x,y)\, g\, y$ zu minimieren, sodaß nach Hamiltons Prinzip die potentielle Energie

$$V(S) := \int_S \varsigma_S(x,y)\, g\, y \, ds$$ des gesamten Seils

möglichst gering ausfällt!

Nehmen wir also an, daß nur Formen für S in Frage kommen, die als Graphen von Funktionen aus $M_{b_1,b_2} := \{ u \in C^1([a_1, a_2], \mathbb{R}_+) \mid u(a_i) = b_i \}$ dargest. werden können und daß S eine konstante Dichte ς_0 hat, so werden wir auf das folgende

„isoperimetrische Problem" genannt.

Minimiere das Funktional

$$V(u) := \varrho g \int_{\mathrm{graph}(u)} y \, ds \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{Flächen-Formel})}}{=} \varrho g \int_{a_1}^{a_2} u(x) \sqrt{1+u'(x)^2} \, dx$$

in M_{b_1, b_2}

unter der Nebenbedingung:

$$\underbrace{\mathcal{L}(\mathrm{graph}(u))}_{\mathcal{L}(u)} = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+u'(x)^2} \, dx \stackrel{!}{=} c$$

Es ist $\delta \mathcal{L}(u, \varphi) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} \cdot \varphi'(x) \, dx \neq 0$

falls $u \not\equiv$ Konstant und $\varphi \in C_c^1((a_1, a_2))$ adäquat gewählt wird. Somit folgt aus Theorem 3.2:

Ist u ein lokaler Minimierer von V in M_{b_1, b_2} unter der Bedingung $\mathcal{L}(u) \stackrel{!}{=} c$, also $S = \mathrm{graph}(u)$ eine mögliche Gestalt des hängenden Seils zwischen P_1 und P_2, so muß u

$$\delta(V + \lambda \mathcal{L})(u, \varphi) \stackrel{!}{=} 0,$$ also mit Aufg. 2

$$0 = \varrho g \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+u'(x)^2}\cdot \varphi(x) + u(x)\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\varphi'(x)\,dx$$

$$+ \lambda \int_{a_1}^{a_2} \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \varrho g \sqrt{1+u'(x)^2}\cdot\varphi(x) + (\varrho g u(x)+\lambda)\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\varphi'(x)\,dx$$

erfüllen, für ein $\lambda\in\mathbb{R}$ und $\forall\, \varphi\in C_c^1((a_1,a_2))$.

Ist dieses $u\in C^2([a_1,a_2])$, so erfüllt also $\tilde u(x) := \varrho g u(x)+\lambda$ die ELG:

$$\sqrt{(\varrho g)^2+\tilde u'(x)^2} - \left(\frac{\tilde u\,\tilde u'(x)}{\sqrt{(\varrho g)^2+\tilde u'(x)^2}}\right)' \equiv 0 \quad \text{auf } [a_1,a_2]$$

$$\underset{\text{Aufg. 2}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{((\varrho g)^2+\tilde u'(x)^2)^2 - (\varrho g)^2\tilde u'(x)^2 - \tilde u'(x)^4 - (\varrho g)^2\tilde u\,\tilde u''(x)}{((\varrho g)^2+\tilde u'(x)^2)^{3/2}} \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cancel{(\varrho g)^2}\left((\varrho g)^2 + \tilde u'(x)^2 - \tilde u\,\tilde u''(x)\right) = 0 \qquad (*)$$

$$\forall\, x\in[a_1,a_2].$$

Aus Aufg. 2 wissen wir, daß alle C^2-Fktionen der Form $\tilde u(x) := \varrho g \beta \cosh\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right)$ die Gleichung $(*)$ lösen.

Falls also ein zwischen P_1 und P_2 aufgehängtes Seil S der Graph einer C^2-Funktion u ist, so folgt

$$u(x) = \beta \cosh\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right) - \frac{\lambda}{\varrho g},$$

wobei sich die drei Parameter $\beta > 0, x_0, \lambda \in \mathbb{R}$ eindeutig anhand der drei Gleichungen:

$$b_i \overset{!}{=} \beta \cosh\left(\frac{a_i - x_0}{\beta}\right) - \frac{\lambda}{\varrho g}, \quad i = 1, 2$$

$$c \overset{!}{=} \mathcal{L}(u) = \int_{a_1}^{a_2} (1 + u'(x)^2)^{1/2} dx = \beta \sinh\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right)\Big|_{x=a_1}^{x=a_2}$$

bestimmen lassen! Insbes. ist S eine Kettenlinie.

Teil II Holonome Zwangsbedingungen

Wir wollen nun eine notwendige Bedingung für lokale Mini-/Maximierer von Variationsfunktionalen $\mathcal{F}$ auf einer „eingeschränkten Funktionenmenge" der Form

$$M_{P,Q}(G \equiv 0) := \left\{ u \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} G(x, u(x)) \equiv 0, \forall x \in [a,b] \\ u(a) = P, \; u(b) = Q \end{array} \right\}$$

entwickeln, wobei $G : [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$, $1 \leq r < n$, eine C^2-Abbildung mit Rang $D_z G \equiv r$ und somit $\mathcal{N}(x) := \{ z \in \mathbb{R}^n \mid G(x,z) \equiv 0 \}$ eine durch $x \in [a,b]$ parametrisierte Schar $(n-r)$-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten (der Kl. C^2) des $\mathbb{R}^n$ sei. Wir stellen uns also die durch viele Problemstellungen der <u>anal. Mechanik</u> motivierte <u>Frage:</u>

Welche (gewöhnliche) Differ.gleichung bzw. Integralgleichung muß eine C^2- bzw. C^1-Fktion u lösen, falls sie zum Einen gezwungen wird, zu jedem Zeitpunkt $x \in [a,b]$ in die Mftigkeit $\mathcal{N}(x)$ abzubilden, und zum Anderen $\mathcal{F}(u) \leq$ oder $\geq \mathcal{F}(v)$, für alle derart „gezwungenen" $v \in M_{P,Q}(G\equiv 0)$ mit $\|v-u\|_{C^1(I)} < \varepsilon$, erfüllt?

<u>Definition 3.1</u>: Sei $u \in M_{P,Q}(G \equiv 0)$, so nennen wir ein $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ein „tangentielles Vektorfeld entlang u", falls es $\varphi(x) \in T_{u(x)}\mathcal{N}(x)$, $\forall x \in I$, erf.

<u>Lemma 3.4</u> (FLdVR bei holon. Zwangsbedingungen)

Falls für ein $\Psi \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ $\int_a^b \Psi(x) \cdot \varphi(x)\, dx = 0$ für jedes tangentielle Vektorfeld $\varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ entlang einem festen $u \in M_{P,Q}(G \equiv 0)$ gilt, so folgt $\Psi(x) \in T^{\perp}_{u(x)} \Lambda(x) \equiv$ Normalraum an $\Lambda(x)$ in $u(x)$,

d. h. so muß $\Psi(x)$ senkrecht zum Tangentialraum $T_{u(x)}\Lambda(x)$ stehen, $\forall x \in I$.

<u>Beweis</u>:

Wir fixieren einen Zeitpunkt $x_0 \in \mathring{I}$. Da $G \in C^2(I \times \mathbb{R}^n)$ existiert eine Umgebung $I_0 \times U$ von $(x_0, u(x_0))$ und C^1 Vektorfelder $\tau_1(x,\cdot), \ldots, \tau_{n-r}(x,\cdot), \nu_{n-r+1}(x,\cdot), \ldots, \nu_n(x,\cdot)$ auf U, sodaß für jedes $x \in I_0$ $\{\tau_j(x,z)\}_{j=1,\ldots,n-r}$ eine Orthonormalbasis von $T_z\Lambda(x)$ und $\{\nu_{n-r+1}(x,z), \ldots, \nu_n(x,z)\}$ eine Orthonormalbasis von $T_z^{\perp}\Lambda(x)$, an jedem $z \in U \cap \Lambda(x)$, liefert.

Die Einschränkung von ψ auf I_0 hat somit die Gestalt

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{n-r} a_j(x)\,\tau_j(x,u(x)) + \sum_{k=n-r+1}^{n} b_k(x)\,\nu_k(x,u(x))$$

für $a_j, b_k \in C^0(I_0)$, und für beliebige Test-Fktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r} \in C_c^1(I_0)$ ist

$$\varphi(x) := \sum_{j=1}^{n-r} \varphi_j(x)\,\tau_j(x,u(x))$$

ein entlang u tangentielles Vektorfeld, erf. also $\varphi(x) \in T_{u(x)}\mathcal{N}(x)$ $\forall x \in I_0$ und ebenso $\forall x \in I \setminus I_0$ wegen $\varphi \equiv 0$ auf $I \setminus I_0$.

$$\Rightarrow 0 = \int_a^b \psi(x)\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{I_0} \sum_{j=1}^{n-r} a_j(x)\,\varphi_j(x)\,dx,$$

sodaß $a_j \equiv 0$ auf I_0 für $j = 1, \dots, n-r$ aus dem Lemma 1.2 = FLdVR und somit $\psi(x) \in T^{\perp}_{u(x)}\mathcal{N}(x)$ für jedes $x \in I_0$ folgt. Da $x_0 \in \mathring{I}$ beliebig fixiert wurde, erhalten wir also die Behauptung zunächst $\forall x \in \mathring{I}$ und somit $\forall x \in I$. $\square$

Sei nun $F \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ eine bel. Lagrange-Funktion und $\mathcal{F}(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x))\,dx$, so gilt

<u>Theorem 3.5</u> (Für den Fall $G = G(z)$ unabh. von x)
Ist $u \in M_{P,Q}(G \equiv 0)$ ein lokaler Mini- oder Maximierer von $\mathcal{F}$ innerhalb $M_{P,Q}(G \equiv 0)$, erfüllt also

$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$ oder $\mathcal{F}(u) \geq \mathcal{F}(v)$ für alle

$v \in M_{P,Q}(G \equiv 0)$ mit $\|u - v\|_{C^1(I)} < \varepsilon \ll 1$, so muß

$\delta \mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ für jedes entlang u tangent. Vektorfeld $\varphi \in C^1_c(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ gelten.

<u>Beweis:</u> Wir wählen solch ein tang. VF $\varphi \in C^1_c(\mathring{I})$ beliebig. Der Beweis beruht auf der Konstruktion einer C^1-Abb.

$w : I \times (-\delta, \delta) \longrightarrow \Lambda = \{ z \in \mathbb{R}^n / G(z) = 0 \}$ mit:

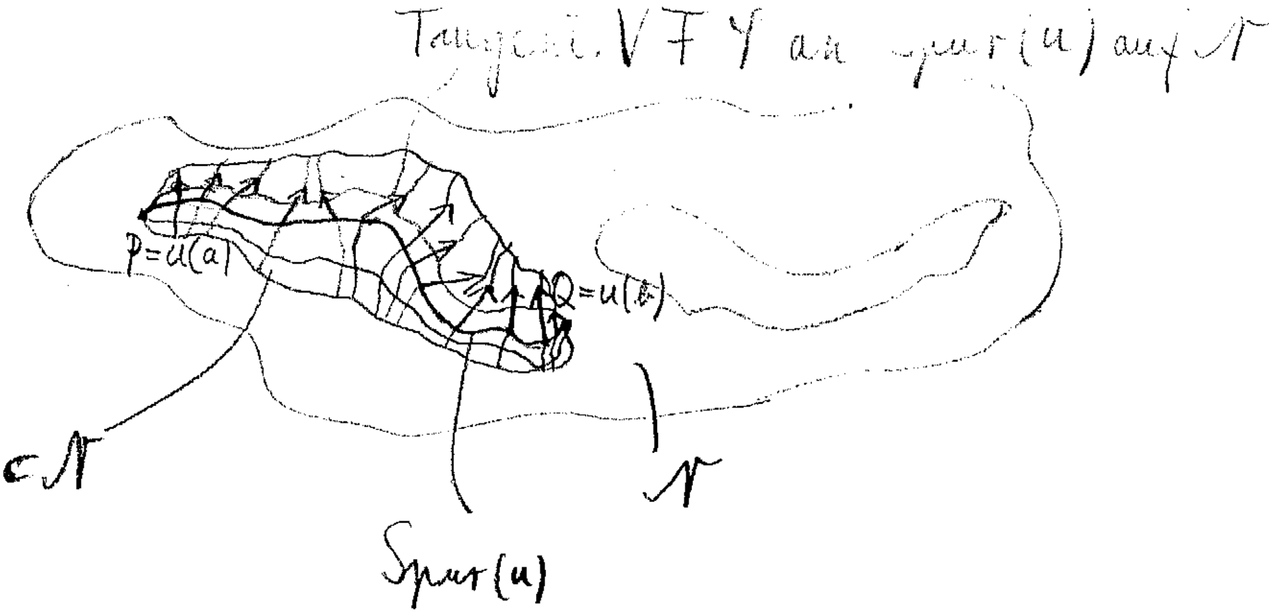
i) $w \in C^1(I \times (-\delta, \delta), \mathbb{R}^n)$ und $\text{Bild}(w) \subset \Lambda$

ii) $w(x, 0) = u(x)$, $\forall x \in I$.

iii) $\frac{\partial}{\partial t} w(x, 0) = \varphi(x)$ und $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} w(x,0) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} w(x,0) = \varphi'(x)$

iv) $w(a, t) = u(a) = P$ und $w(b, t) = u(b) = Q$, $\forall |t| < \delta$

Bild:



Nun zur Konstruktion von w:
Wir wählen auf einer offenen Umgebung $U \cap \mathcal{N}$ von Spur(u) in $\mathcal{N}$ ein Tangentialvektorfeld $\Phi : U \cap \mathcal{N} \to \mathbb{R}^n$ an $\mathcal{N}$ aus $C^1_c(U \cap \mathcal{N}, \mathbb{R}^n)$, welches $\Phi(u(x)) \overset{!}{=} \varphi(x)$ in jedem $x \in I$ erfüllt, also welches φ entlang u fortsetzt. Zu Φ betrachten wir den entspr. Fluß $\Psi : (U \cap \mathcal{N}) \times (-\delta, \delta) \to \mathcal{N}$, der durch $\Psi(z,t) := X(t) :=$ eindeut. Lösung

des (AWP)'s $\quad \dot{X}(t) = \Phi(X(t)), \; X(0) \overset{!}{=} z$

definiert werden kann. Wie in Diffgeom. I gezeigt wurde, existiert ein Existenz-Intervall $(-\delta, \delta)$, sodaß zu jedem $z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}$ genau eine Lösung X des obigen AWP's der Klasse C^2 und mit $X(t) \in \mathcal{N}$ $\forall t \in (-\delta, \delta)$ existiert und sodaß $\Psi(\cdot, t)$ $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}$ C^1-diffeomorph auf sein Bild in $\mathcal{N}$ abbildet.

Insbesondere ist somit $\Psi \in C^1((\mathcal{U} \cap \mathcal{N}) \times (-\delta, \delta), \mathbb{R}^n)$.

Wir definieren nun $w(x,t) := \Psi(u(x), t)$ und prüfen nach: (i) sofort klar ✓

i) $w(x,0) = \Psi(u(x), 0) =$ Lösung $X(t)$ des AWP in $t=0$ zu A.Bed. $X(0) = u(x)$

also $= u(x)$ ✓

i) $\dfrac{\partial}{\partial t} w(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t} \Psi(u(x), t) = \dot{X}(t) = \Phi(X(t))$,

wobei hier X die A-Bed. $X(0) = u(x)$ hat, also

$\dfrac{\partial}{\partial t} w(x,0) = \Phi(u(x)) = \varphi(x)$ nach Vorauss. an Φ

nd es existiert $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} w(x,t)$, ist stetig und $\equiv \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} w(x,t)$!

v) $w(a,t) = \Psi(u(a), t) =$ Lös. $X(t)$ zu der A-Bed. $X(0) = u(a)$.

Wegen $\Phi(u(a)) = \varphi(a) = 0$ muß somit dieses X

einfach $\Sigma(t) \equiv \Sigma(0) = u(a) = P$ erfüllen, also

$W(a,t) \equiv P$, $\forall |t| < \delta$, und analog $W(b,t) \equiv Q, \forall t$

wegen $\varphi(b) = 0$ und $u(b) = Q$.

Für die C^1-Komposition $f(t) := \mathcal{F}(W(\cdot,t))$

erhalten wir nun wegen $W(\cdot,t) \in M_{P,Q}(G\equiv 0)$ und

$\|u - W(\cdot,t)\|_{C^1(I)} \underset{(ii)}{=} \|W(\cdot,0) - W(\cdot,t)\|_{C^1(I)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ nach (i):

$f(0) \underset{(ii)}{=} \mathcal{F}(u) \leq$ bzw. $\geq \mathcal{F}(W(\cdot,t)) = f(t)$

$\forall t \in (-t_0, t_0)$ und t_0 hinr. klein.

$$\Longrightarrow \quad 0 = f'(0) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(W(\cdot,t)) = \delta\mathcal{F}(u,\varphi), \text{ denn}$$

nach (i)–(iii): $\frac{\partial}{\partial t} W(\cdot,0) = \varphi$ und $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} W(x,0) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} W(x,0)}_{= \varphi'(x)}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(W(\cdot,t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_a^b F(x, W(x,t), W(x,t)')\,dx$$

$$= \int_a^b F_z(x,u,u') \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} W(x,0)}_{\equiv \varphi(x)} + F_p(x,u,u') \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} W(x,0)}_{\equiv \varphi'(x)}\,dx$$

$= \delta\mathcal{F}(u,\varphi)$ ✓. Hiermit ist Theorem 3.5 bewiesen $\square$

Theorem 3.6 (ELG mit holonomen Zwangsbeding.)

Sei $u \in M_{P,Q}(G \equiv 0)$, $G = G(z)$ unabh. von x, ein lokaler Mini- oder Maximierer von F innerhalb $M_{P,Q}(G \equiv 0)$ wie in Theorem 3.5 und außerdem von der Klasse $C^2(I, \mathbb{R}^n)$, so ist u eine starke Extremale zur Lagrange-Funktion

$$F^*(x, z, p) := F(x, z, p) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(x)\, G_j(z),$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in C^0(I)$ nun stetig von x abhängige „Lagrange-Multiplikator-Funktionen" sind. Falls u sogar aus $C^{s+2}(I)$, $F \in C^{s+2}(I \times \mathbb{R}^{2n})$, $G \in C^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ für ein $s > 0$ bekannt ist, so erweisen sich die $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ als $C^s(I)$-Funktionen.

Beweis:

Kombinieren wir das Resultat von Theorem 3.5 mit partieller Integration, so erhalten wir:

$$0 = \delta J(u,\varphi) = \int_a^b L_F(u)(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

für jedes entlang u tangentielle V-Feld φ an $\mathcal{N} = [G(z) = 0]$ aus $C^1_c(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$.

Aus Lemma 3.4 folgt hieraus, daß zumindest

$L_F(u)(x) \in T^{\perp}_{u(x)}\mathcal{N}$ für jedes $x \in I$ gelten muß.

Aus Diffgeom. I ist bekannt, daß die nach Voraussetzung lin. unabh. Gradienten $\nabla G_1(z), \ldots, \nabla G_r(z)$ eine Basis von $T^{\perp}_z\mathcal{N}$ in jedem $z \in \mathcal{N}$ bilden. Somit gibt es für jedes $x \in I$ eindeutige Zahlen $\tilde{\lambda}_1(x), \ldots, \tilde{\lambda}_r(x) \in \mathbb{R}$, sodaß

$$L_F(u)(x) = \tilde{\lambda}_1(x)\,\nabla_z G_1(u(x)) + \ldots + \tilde{\lambda}_r(x)\,\nabla_z G_r(u(x))$$
$$\equiv D_z G(u(x))^T \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1(x) \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_r(x) \end{pmatrix} \text{ erf. ist.} \qquad (*)$$

Wegen Rang $D_z G(z) = r$ ist $D_z G(z) \cdot D_z G(z)^T \in GL_r(\mathbb{R})$ für jedes $z \in \mathcal{N}$. Somit erhalten wir aus $(*)$:

$$\Big(D_z G(u(x))\cdot D_z G(u(x))^T\Big)^{-1}\cdot\Big(\underbrace{D_z G(u(x))}_{\in\mathbb{R}^r}\cdot\underbrace{L_F(u)(x)}_{\in\mathbb{R}^n}\Big)$$

$$=\begin{pmatrix}\tilde\lambda_1(x)\\ \vdots\\ \tilde\lambda_r(x)\end{pmatrix},\quad \forall x\in I. \qquad (**)$$

Somit sind $\tilde\lambda_1,\dots,\tilde\lambda_r$ aus $C^0(I)$ und für $\lambda_i := -\tilde\lambda_i$ erhalten wir wieder aus $(*)$ für

$$F^*(x,z,p) := F(x,z,p) + \lambda_1(x)\,G_1(z) + \dots + \lambda_r(x)\,G_r(z)$$

$$L_{F^*}(u)(x) \equiv \nabla_z F^*(x,u(x),u'(x)) - \frac{d}{dx}F_p^*(x,u(x),u'(x))$$

$$= \nabla_z F(x,u,u') + \sum_{i=1}^r \lambda_i(x)\,\nabla_z G_i(u(x))$$

$$-\frac{d}{dx}F_p(x,u(x),u'(x))$$

$$\equiv L_F(u)(x) - \sum_{i=1}^r \tilde\lambda_i(x)\,\nabla_z G_i(u(x)) \underset{(*)}{\equiv} 0 \text{ auf } I.$$

Beachtet man außerdem die Cramer'sche Regel $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\text{Adjunkte}(A)$, so folgt für jede Abbildung $A\in C^s(I, GL_r(\mathbb{R}))$ auch $A^{-1}\in C^s(I, GL_r(\mathbb{R}))$.

Setzen wir also $u\in C^{s+2}(I,\mathbb{R}^n)$, $G\in C^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ und

$F \in C^{s+1}(I \times \mathbb{R}^{n})$ für ein [illegible], so folgt

$\left(D_z G(u(\cdot)) \; D_z G(u(\cdot))^T\right)^{-1} \in C^s(I, GL_r(\mathbb{R}))$ und

$L_F(u) \in C^s(I, \mathbb{R}^n)$ und somit aus (**), daß

in der Tat $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in C^s(I)$ gilt. $\square$

<u>Beispiel $\boxed{1}$</u>: <u>Geodäten auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$</u>

Sei $N := \{z \in \Omega \mid G(z) = 0\}$ für ein $G \in C^2(\Omega)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfalt.keit eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und

$\mathcal{E}(v) := \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |\dot{v}|^2 \, dt$ die „Energie" bzw. das „Dirichlet-Integral" einer Kurve $v \in C^1(I, N)$.

Sei nun u ein lokaler Minimierer von $\mathcal{E}$ in $M_{P,Q}(G \equiv 0)$ für zwei Punkte $P, Q \in N$, so erhalten wir aus Theorem 3.6 im Falle $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$, daß u eine starke Extremale zu $E^*(t, z, p) := \frac{1}{2}|p|^2 + \lambda(t)\, G(z)$, für ein $\lambda \in C^0(I)$, ist und somit die (ELG):

$$\ddot{u}(t) = \lambda(t)\, \nabla_z G(u(t)) \in T_{u(t)}^{\perp} N \quad \forall t \in I \text{ erfüllt.}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{D}{dt}(\ddot{u}(t)) := \mathrm{Proj.}_{T_{u(t)}N}(\ddot{u}(t)) \equiv 0 \qquad \text{—''—} \qquad (\mathrm{Geo})$$

Dies ist gerade die Geodäten-Gleichung für u zu N, welche besagt, daß die orthogonale Projektion der Beschleunigung $\ddot{u}(t)$ auf den Tangent. raum $T_{u(t)}N$ zu jedem Zeitpunkt t zu verschwinden hat.

Insbesondere hat jede Lösung von (Geo), also jede „Geodäte" u, eine konstante Geschwindigkeit, da $\frac{d}{dt}|\dot{u}(t)|^2 = 2\langle \dot{u}, \ddot{u}\rangle(t) \equiv 0$ aus (Geo) folgt.

Desweiteren ist jeder lokale $\mathcal{E}$-Minimierer $u \in C^2$ in $M_{P,Q}(G\equiv 0)$ auch eine schwache Extremale des Längenfunktionals $\mathcal{L}(u) := \int_{t_1}^{t_2} |\dot{u}(t)|\, dt$ zu beliebigen entlang u tangentiellen Variations-Feldern $\varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$, falls $u \not\equiv \mathrm{const} = u(t_1)$, denn $\delta\mathcal{L}(u,\varphi)=\int_I \frac{\dot u}{|\dot u|}(t)\cdot\varphi'(t)\,dt$

$$\underset{\text{P.I.}}{=}\frac{-1}{|\dot u(t_1)|}\int_I \underbrace{\ddot u(t)}_{\in\, T^{\perp}_{u(t)}N}\cdot\underbrace{\varphi(t)}_{\in\, T_{u(t)}N}\,dt=0\,.$$

Ist nun umgekehrt $u\in C^1(I,N)$ ein lokaler Minimierer von $\mathcal{L}$ innerhalb $M_{P,Q}(G\equiv 0)$, also eine Verbindungskurve der Punkte P und Q, deren Länge bei geringfügiger Variation auf N nicht verkürzt werden kann, so erfüllt es $\delta\mathcal{L}(u,\varphi)=0$ für jedes entl. u tangent. VFeld $\varphi\in C^1_c(\mathring{I},\mathbb{R}^n)$ nach Theorem 3.5, falls $\dot u(t)\neq 0$ in jedem $t\in I$ gilt.
Im Falle $u\in C^2(I,N)$ können wir dann weiterhin aus Theorem 3.6 die „bedingten" (ELG)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot u}{|\dot u|}\right)(t)=\lambda(t)\,\nabla_z G(u(t))\in T^{\perp}_{u(t)}N,\ \forall t\in I,$$

ableiten, welche im Falle $|\dot u|\equiv\text{const.}\neq 0$ dann [illegible] $\frac{D}{dt}(\dot{u}(t)) \equiv \mathrm{Proj}_{T_{u(t)}N}(\ddot{u}(t)) \equiv 0$ ergeben.

Lokal kürzeste Verbindungskurven zweier vorgegeb. Punkte $P, Q \in N$ aus $C^2(I, N)$ sind also „Geodäten" auf N, falls sie mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden.

<u>Beispiel</u> $\boxed{2}$ Der Spezialfall $N = \mathbb{S}^{n-1}$.

Sei nun $G(z) := |z|^2 - 1$ und somit $N = \mathbb{S}^{n-1}$, und u ein lokaler $\mathcal{E}$-Minimierer aus $C^2(I, \mathbb{R}^n)$ in $M_{P,Q}(G \equiv 0)$, so erf. u die „bedingten" (ELG):

$$\ddot{u}(t) = -\lambda(t)\, u(t), \text{ für ein } \lambda \in C^0(I).$$

Aus $|u(t)|^2 \equiv 1 \implies u(t) \cdot \dot{u}(t) \equiv 0$

$$\implies |\dot{u}(t)|^2 + u(t) \cdot \ddot{u}(t) \equiv 0.$$

Also $u(t) \cdot \ddot{u}(t) \equiv -c^2$, da ja $|\dot{u}| \equiv \text{const.} = c$ auf I nach Bsp. $\boxed{1}$ gelten muß. Multipl. der (ELG) mit $u(t)$ liefert dann: $-c^2 = -\lambda(t)\,|u(t)|^2 = -\lambda(t)$.

Hier ist also die Multipl.-Fkt $\lambda \equiv c^2$ und u erfüllt $\ddot{u}(t) + c^2 u(t) \equiv 0$ auf I. (Geo $\mathbb{S}^{n-1}$)

In einer Übungsaufgabe zeige man nun, daß es für jedes Paar $P, Q \in \mathbb{S}^{n-1}$ eine C^2-Lösung u aus $M_{P,Q}(G \equiv 0)$ von (Geo $\mathbb{S}^{n-1}$) gibt, also mit $u(t_1) = P$, $u(t_2) = Q$, die innerhalb der von P und $\dot{u}(t_1)$ aufgespannten Ebene verläuft, daß also Geodäten auf der $\mathbb{S}^{n-1}$ Großkreise sind!

Beispiel $\boxed{3}$ Das D'Alembert'sche Prinzip:

In Verallgemeinerung des Hamilton-Prinzips aus Bsp. $\boxed{2}$ in §1 betrachten wir hier ein „physikalisches System", welches durch den zeitlichen Verlauf von n-Koordinaten-Funktionen $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) =: x(t) \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ beschr. werde, welche einer Anzahl von Zwangsbedingungen $G_i(x(t)) \overset{!}{\equiv} 0$, $i = 1, \ldots, r < n$, für C^2-Fktionen

$G_1, \ldots, G_r \in C^2(\mathbb{R}^n)$, mit Rang $D_z \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_r \end{pmatrix} = r$ auf $\mathbb{R}^n$, unterworfen seien. Nun besagt das

D'Alembertsche Prinzip :

Die Gesamtbewegung $x(t) = (x_1, \ldots, x_n)(t)$ eines den Zwangsbedingungen $G_i \overset{!}{\equiv} 0$, $i = 1, \ldots, r$, unterworfenen Systems im $(\mathbb{R}^n, \langle -, A(\cdot) - \rangle)$ unter dem Einfluß einer konservativen „eingeprägten" Kraft $F := -\nabla_z V$ zu einem Potential $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$, muß eine „bedingte" schwache Extremale der Wirkung

$$S(u) := \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \langle \dot{u}, A(u(t)) \dot{u} \rangle - V(u(t)) \, dt \text{ sein,}$$

also $\delta S(x, \varphi) = 0$ $\forall$ entlang x an $N := \bigcap_{i=1}^{r} [G_i(z) \equiv 0]$ tangentiellen Vektorfelder $\varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$ erfüllen.

Im Falle $A \equiv$ Konst. aus $\mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R})$ bedeutet dies also

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (A \cdot \dot{x}) \cdot \dot{\varphi}(t) - \nabla_z V(x(t)) \cdot \varphi(t) \, dt$$

für alle entl. x an N tangent. V Felder $\varphi \in C_c^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^n)$, und falls $x \in C^2(I,N)$ bekannt sein sollte, folgt aus Lemma 3.4 mittels part. Integration

(D'Alem)

$$A \cdot \ddot{x}(t) + \nabla_z V(x(t)) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t)\, \nabla_z G_j(x(t)),$$

für stetige Funktionen $\lambda_j \in C^0(I)$ (siehe Th. 3.6).

Steht insbesondere $x(t)$ für die Bewegung von N Punkten im $\mathbb{R}^3$ mit den Massen $m_1, \dots, m_N$, auf die jeweils die „eingeprägte" Kraft $F_i := -\nabla_{z_i} V : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^3$ wirke, $i = 1, \dots, N$, so ist $A := \mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N)$ zu wählen, und wir erhalten für die Bewegung der N Massepunkte $\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_N(t)$ aus (D'Alem):

$$m_1\, \ddot{\bar{x}}_1(t) = F_1(x(t)) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t)\, \nabla_{z_1} G_j(x(t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$m_N\, \ddot{\bar{x}}_N(t) = F_N(x(t)) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(t)\, \nabla_{z_N} G_j(x(t)), \in \mathbb{R}^3$$

$(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) \in \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3N}$

sodaß also die erzwungene Forderung an das gesamte System $x(t)$, sich nur auf der Untermann.falt.keit $N = \bigcap_{i=1}^{T} [G_i(z) \equiv 0]$ bewegen zu dürfen, durch die zusätzlichen, auf die Massepunkte $\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_N(t)$ wirkenden „Zwangskräfte" $\lambda_j(t) \nabla_{\bar{z}_1} G_j(x(t)), \ldots, \lambda_j(t) \nabla_{\bar{z}_N} G_j(x(t))$ realisiert, d.h. durch deren korrigierenden Einfluß bewirkt wird!