

§ 4 Lösung des 2-Körperproblems und konkrete Anwendungen des d'Alembertschen Prinzips

Wir wenden nun das Hamilton-Prinzip aus Bsp. \square in § 1 zur vollständigen Aufklärung der Frage an, auf welchen Bahnen sich ein Massenpunkt $x(t)$ der Masse m unter dem Einfluß eines Potentials $V: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ der Gestalt $V(z) := -\frac{\gamma m M}{|z|}$, welches die Gravitation einer unbeweglichen, sehr viel größeren Masse $M \gg m$ (in 0) modelliert, im \mathbb{R}^3 bewegen kann.

In Folge der Newtonschen Bewegungsgleichungen, abgeleitet aus (HP), gehorcht der Punkt $x(t)$ der gew. Differentialgleich.:

$$m \ddot{x}(t) = -\nabla_z V(x(t)) = -\frac{\gamma m M}{|x(t)|^2} \frac{x(t)}{|x(t)|} \quad (2KP)$$

①

Ist $x(t)$ eine C^2 -Lösung von (2 KP), so auch $S \cdot x(t)$, für jedes $S \in O(3)$, sodaß wir OBDA annehmen dürfen, daß die von $x_0 := x(0)$ und $v_0 := \dot{x}(0)$ aufgespannte Ebene (oder Gerade) mit dem \mathbb{R}^2 (oder mit \mathbb{R}) zusammenfällt und daß $x_0 = (R, 0, 0) \in \mathbb{R}$ gilt.

Lemma 4.1

Ist $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Lösung von (2 KP) mit $\text{Span}\{x_0, v_0\} = \mathbb{R}^2$, so gilt bereits $\text{Spur}(x) \subset \mathbb{R}^2$.

Beweis: Die dritte Komponente $x_3(t) =: h(t)$ von $x(t)$ löst das AWP 2. Ordnung

$$\ddot{h} = -\gamma M \frac{h(t)}{\left((x_1^2 + x_2^2 + h^2)(t)\right)^{3/2}} \quad \text{mit } h(0) = 0 = \dot{h}(0).$$

Mittels Theorem 4.3 kann man zeigen (ÜA 13), daß dieses AWP die eindeutige Lösung $h \equiv 0$ hat. \square

Somit dürfen wir bereits den bequemen Ansatz

$$x(t) = r(t) \exp(i\phi(t)) \quad \text{für zwei} \quad \textcircled{2}$$

Zu bestimmten Funktionen $r, \phi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ machen.

Aus $\dot{x}(t) = (\dot{r} + i r \dot{\phi})(t) e^{i\phi(t)}$ und

$$\ddot{x}(t) = (\ddot{r} + 2i\dot{r}\dot{\phi} + i r \ddot{\phi} - r \dot{\phi}^2) e^{i\phi(t)}$$

erhalten wir in Kombination mit (2KP), also

$$\text{mit } (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 + i(2\dot{r}\dot{\phi} + r \ddot{\phi})) e^{i\phi(t)} = -\frac{\gamma M}{r(t)^2} e^{i\phi(t)}$$

die beiden unabhängigen Differ.-Gleichungen

$$(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 + \frac{\gamma M}{r^2})(t) \equiv 0 \quad (\text{Re 2KP})$$

$$(2\dot{r}\dot{\phi} + r \ddot{\phi})(t) \equiv 0 \quad (\text{Im 2KP})$$

mit den Anfangswerten $r(0) = R, \phi(0) = 0$

(da $x_0 = (R, 0, 0)$), $\dot{r}(0) = (v_0)_1$ und $\dot{\phi}(0) = \frac{(v_0)_2}{R}$,

wegen $(v_0)_1 + i(v_0)_2 = \dot{x}(0) = (\dot{r}(0) + i r(0) \dot{\phi}(0)) e^{i\phi(0)} = \dot{r}(0) + i R \dot{\phi}(0)$

Multiplikation von (Im 2KP) mit r^2 ergibt:

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi})(t) = (2 r \dot{r} \dot{\phi} + r^2 \ddot{\phi})(t) \equiv 0$$

$$\Rightarrow r^2 \dot{\phi}(t) \equiv \text{const.} =: A = r^2(0) \dot{\phi}(0) = R (v_0)_2 \quad (A)$$

Ist nun $(v_0)_2 = 0$, also $v_0 = ((v_0)_1, 0, 0) \in \mathbb{R}$ linear abhängig von $x_0 \in \mathbb{R}$, so liefert eine erneute Anwendung von Lemma 4.1, nun mit der Hilfsfunktion $\tilde{h}(t) := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x(t) \right\rangle = x_2(t)$, daß auch $x_2 \equiv 0$ auf $[0, T]$ für jede C^2 -Lösung x von (2KP) gelten müßte, sodaß $x(t) \in \mathbb{R}, \forall t$, eine nur noch eindimensionale Bahn durchläuft. Nehmen wir also im Folgenden $(v_0)_2 \neq 0$ an!

$$\Rightarrow \tau^2 \ddot{\phi}(t) \equiv R(v_0)_2 \neq 0 \Rightarrow \dot{\phi}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Insbesondere existiert also die Umkehrfunktion

$$\phi \mapsto t(\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \text{mit} \quad \frac{d}{d\phi} t(\phi) = \frac{1}{\dot{\phi}(t(\phi))}.$$

Somit reduziert sich unsere Aufgabe auf die Bestimmung der korrekten Abhängigkeit f zwischen dem Winkel $\phi \equiv \arg(x)$ und dem Abstand $\tau \equiv |x|$ einer C^2 -Lösung x von (2KP),

also auf die Bestimmung der „Gestalt“ bzw. der Spur von $x(t)$, welche durch $\tau = f(\phi)$ gegeben wird, denn mit korrekt ermitteltem $f \in C^2([-2\pi, 2\pi], \mathbb{R}_{>0})$ gilt nach (A):

$$\frac{dt}{d\phi}(\phi) = \frac{1}{\dot{\phi}(t(\phi))} = \frac{1}{A} f(\phi)^2, \text{ mit } t(0) = 0$$

\Rightarrow Integrat. $t(\phi) = \int_0^\phi \frac{dt}{d\tilde{\phi}} d\tilde{\phi} = \frac{1}{A} \int_0^\phi f(\tilde{\phi})^2 d\tilde{\phi} \quad (*)$
 $= \frac{1}{R(\omega)_a}$
 $=$ theoretisch explizit berechenbar

\Rightarrow Umkehrfunktion $\phi(t)$ ebenfalls berechenbar

$$\Rightarrow x(t) = \tau(t) e^{i\phi(t)} = f(\phi(t)) \cdot e^{i\phi(t)}$$

wäre somit explizit $\forall t \in [0, T]$ ermittelt!

Und das ermittelte Paar $(\tau(t), \phi(t))$ löst automatisch, also per Konstruktion:

$$\tau^2(t) \dot{\phi}(t) = f(\phi(t))^2 \cdot \frac{1}{\frac{dt}{d\phi}(\phi(t))} \stackrel{(*)}{=} f(\phi(t))^2 \cdot A \frac{1}{f(\phi(t))^2} = A$$

(5)

und damit $\frac{d}{dt}(\tau^2 \cdot \dot{\phi})(t) \equiv 0$ und somit die Gleichung (Im 2 KP) auf $[0, T]$!

Die gesuchte „Radius-Winkel-Abhängigkeit“ $f: \phi \mapsto r$ muß also derart erraten werden, daß das resultierende Paar $(\tau(t), \phi(t)) \equiv (f(\phi(t)), \phi(t))$ auch noch die Gleichung (Re 2 KP) auf $[0, T]$ löst!

Dies war exakt „Kepler's Problem“, und wir wollen eine erweiterte Fassung seiner Eingebung als Ansatz für f aufgreifen, daß sich nämlich Planeten auf Bahnen der Form von „Kegelschnitten“ zu bewegen haben, also:

Keplers Postulat = 1. Gesetz:

f muß einen Kegelschnitt beschreiben, in dessen einem Brennpunkt der anziehende, unbewegliche Massepunkt mit Masse $M \gg m$, hier also die 0, liegt,

d.h. also $f(\phi) = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \alpha)}$, $\phi \in [0, 2\pi]$,

für ein $p > 0$, $\varepsilon \geq 0$ und eine Rotation des Kegelschnitts um einen „Drehwinkel“ $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Das ε ist hierbei der entscheidende Parameter für die Gestalt des Graphen $r = f(\phi)$!

Es ist nun also nachzuprüfen, ob das

Paar $\left(\frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\phi(t) - \alpha)}, \phi(t) \right)$ bei konkreter

Wahl von p , ε und α (in Abhängigkeit von

$R = r(0)$, $v_0 = \dot{x}(0)$) das AWP

$$\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 + \frac{r^3 M}{r^2} = 0, \quad r(0) = R, \quad \dot{r}(0) = (v_0)_1$$
$$\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \frac{(v_0)_2}{R}$$

tatsächlich löst:

$$\dot{r}(t) = \frac{-P}{(1 + \varepsilon \cos(\phi(t) - \alpha))^2} \varepsilon (-\sin(\phi(t) - \alpha)) \cdot \dot{\phi}(t)$$

$$= \frac{\varepsilon}{P} \sin(\phi(t) - \alpha) r^2(t) \dot{\phi}(t) \quad (\dot{r})$$

$$\stackrel{(A)}{=} \frac{\varepsilon A}{P} \sin(\phi(t) - \alpha), \quad A = R (v_0)_2 \neq 0$$

(7)

$$\Rightarrow \ddot{r}(t) = \frac{\varepsilon A}{p} \cos(\phi(t) - \alpha) \dot{\phi}(t)$$

Multiplizieren wir (Re 2KP) mit $r^2(t)$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} (r^2 \ddot{r})(t) - (r^3 \dot{\phi}^2)(t) + \gamma M$$

$$= \frac{\varepsilon A}{p} \cos(\phi(t) - \alpha) \underbrace{(r^2 \dot{\phi})(t)}_{\equiv A} - \frac{(r^3 \dot{\phi})^2}{r} + \gamma M$$

$$\equiv \frac{\varepsilon A^2}{p} \cos(\phi(t) - \alpha) - \frac{A^2}{\underbrace{r(t)}} + \gamma M$$

$$= \frac{1}{p} (1 + \varepsilon \cos(\phi(t) - \alpha))$$

$$= -\frac{A^2}{p} + \gamma M$$

$$\Leftrightarrow p \stackrel{!}{=} \frac{A^2}{\gamma M} = \frac{R^2 (V_0)_2^2}{\gamma M} \text{ muß also gelten, (P)}$$

sodass tatsächlich die C^2 -Funktion

$$x(t) = f(\phi(t)) \cdot e^{i\phi(t)} \text{ die } \mathbb{C}\text{-wertige Gleich. (2KP)}$$

zu den Anf.-Bed. $x(0) = (R, 0, 0)$ und $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} (V_0)_1 \\ (V_0)_2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
mit $R > 0$ und $(V_0)_2 \neq 0$, löst!

Desweiteren ist $R = r(0) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \alpha}$ und mit (i):

$$\dot{r}(0) = (V_0)_1 \frac{1}{\dot{r}} - \frac{\varepsilon R (V_0)_2}{p} \sin(\alpha) \stackrel{(P)}{=} - \frac{\varepsilon \gamma M}{R (V_0)_2} \sin(\alpha)$$

(8)

$$\Rightarrow \varepsilon \cos(\alpha) = \frac{p-R}{R} = \frac{R(v_{0,2})^2 - \gamma M}{\gamma M}$$

(ε, α)

$$\varepsilon \sin(\alpha) = -\frac{R(v_{0,1})(v_{0,2})}{\gamma M}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon e^{i\alpha} = \frac{1}{\gamma M} (R(v_{0,2})^2 - \gamma M + i(-R(v_{0,1})(v_{0,2}))) = Q(R, v_0)$$

$\Rightarrow \varepsilon$ und α können also als Radius bzw. Winkel des Punktes $Q(R, v_0) \in \mathbb{C}$ aufgefasst und somit insbesondere aus den Anfangsdaten $R, (v_{0,1}), (v_{0,2})$ heraus eindeutig bestimmt werden!

Nur im Spezialfall $(v_{0,1}) = 0$ und $R(v_{0,2})^2 = \gamma M$, also für $Q(R, v_0) = 0$, ergibt sich $\varepsilon = 0$ und somit beliebiges $\alpha \in [0, 2\pi)$. $\varepsilon = 0$ bedeutet aber gerade: $f(\phi) \equiv p = \frac{R^2(v_{0,2})^2}{\gamma M} = R$, also daß sich

der Massepunkt $x(t)$ auf einem Kreis mit Radius R um den Ursprung bewegt (nachdem er senkrecht zur x_0 -Achse $= R$ abgeschossen wurde), sodaß trivialerweise der „Drehwinkel“ α keine Rolle mehr für die Spur von $x(t)$ spielt!

Nehmen wir nun insbesondere den Spezialfall $V_0 = (0, (V_0)_2, 0) \perp X_0 = (R, 0, 0) \neq 0$ an, so erhalten wir aus $(\epsilon, \alpha): \epsilon \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ oder π und somit $\epsilon = \pm \frac{R(V_0)_2^2 - \gamma M}{\gamma M}$ und damit:

Theorem 4.2

Die Bewegung $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eines Massepunktes mit Masse m unter Einfluß des Zentralkraftpotentials $V(z) := -\frac{\gamma m M}{|z|}$ verläuft entlang

Kegelschnitten in \mathbb{R}^2 und kann in Abhängigkeit seines Anfangsortes $x(0) = (R, 0, 0) \neq 0$ und seiner Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = (0, (V_0)_2, 0) \neq 0$ in folgende Fälle exakt unterschieden werden:

a) $R(V_0)_2^2 < \gamma M$ oder $R(V_0)_2^2 \in (\gamma M, 2\gamma M)$:

$x(t)$ beschreibt eine Ellipse \leftarrow (Planetenbahn)

b) $R(V_0)_2^2 = \gamma M$: Spur $(x(t)) =$ Kreis mit Radius R

c) $R(V_0)_2^2 = 2\gamma M$: Spur $(x(t)) =$ Parabel mit $p = 2R$
(Asteroidenbahn)

d) $R(V_0)_2^2 > 2 \gamma M$: Spur(x) = Hyperbel - Ast.

Beweis:

Sei zunächst $0 < R(V_0)_2^2 < \gamma M$. Hier gilt gerade

$$\varrho = \pi, \text{ also } \varepsilon = \frac{\gamma M - R(V_0)_2^2}{\gamma M} \text{ und } p = \frac{R^2(V_0)_2^2}{\gamma M}, \text{ für (a)-(d)}$$

Falls $\varepsilon \in (0, 1)$, so liefert $r(\phi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \pi)}$

die Polardarstellung einer Ellipse, also mit einer kartesischen Darstellung der Form

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ wobei } a \geq b \text{ die Halbachsen linker}$$

und e den Abstand vom Ursprung (0) = Brennpunkt zum Mittelpunkt der Ellipse bezeichnen.

Es gelten nun die folgenden Formeln:

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow p = \sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2}} \quad b = \frac{b^2}{a}, \text{ sowie}$$

$$\varepsilon = \frac{p}{a-e} - 1 = \frac{b^2/a - a + e}{a-e} = \frac{b^2 - a^2 + ae}{a(a-e)} = \frac{e}{a}.$$

Nun folgt aus $R = a + e$ (im Fall $\varrho = \pi$):

$$a = R - \varepsilon a \Rightarrow a = \frac{R}{1 + \varepsilon} = \frac{R}{1 + \frac{\gamma M - R(v_{0/2})^2}{\gamma M}}$$

$$= \frac{R \gamma M}{2 \gamma M - R(v_{0/2})^2}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a p} = \sqrt{\frac{R \gamma M \cdot R^2 (v_{0/2})^2}{(2 \gamma M - R(v_{0/2})^2) \gamma M}}$$

$$= (v_{0/2}) \sqrt{\frac{R^3}{2 \gamma M - R(v_{0/2})^2}} \quad \text{und}$$

$$d = a \varepsilon = \frac{R \gamma M}{2 \gamma M - R(v_{0/2})^2} \frac{\gamma M - R(v_{0/2})^2}{\gamma M} = R \frac{\gamma M - R(v_{0/2})^2}{2 \gamma M - R(v_{0/2})^2}$$

Für den Fall $R(v_{0/2})^2 \in (\gamma M, 2 \gamma M)$ gilt:

$d = 0$ und $\varepsilon = \frac{R(v_{0/2})^2 - \gamma M}{\gamma M}$ wieder $\in (0, 1)$.

$r(\phi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$ liefert wieder die Polardarstellung einer Ellipse, welche nun

jedoch durch $\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist.

Wieder ergibt sich, nun wegen $d = 0$ und $a = R + e$:

$$a = R + a\varepsilon \Rightarrow a(1 - \varepsilon) = R$$

$$\Rightarrow a = \frac{R}{1 - \varepsilon} = \frac{R}{1 - \frac{R(V_0/2)^2 - \gamma M}{\gamma M}} = \frac{R\gamma M}{2\gamma M - R(V_0/2)^2}$$

Also wieder $b = (V_0/2) \sqrt{\frac{R^3}{2\gamma M - R(V_0/2)^2}}$ und

$$e = R \frac{R(V_0/2)^2 - \gamma M}{2\gamma M - R(V_0/2)^2} = \text{Abstand zwischen } (0) = \text{rechter Brennpunkt zum Mittelpunkt.}$$

b) Falls ausgerechnet $R(V_0/2)^2 = \gamma M \Rightarrow \varepsilon = 0$

$$\Rightarrow r(\phi) = p = \frac{R^2(V_0/2)^2}{\gamma M} = R, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi), \text{ so daß}$$

also $x(t)$ auf dem Kreis $\partial B_R(0)$ verläuft. ✓

c) Falls gerade $R(V_0/2)^2 = 2\gamma M$ gilt

$\Rightarrow \varepsilon = 1$ und $l = 0$. In diesem Fall liefert

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \cos \phi} \text{ die Polardarstellung}$$

einer Parabel mit der kartesischen

$$\text{Darstellung: } y^2 + 2px - p^2 = 0.$$

$$\text{Der Scheitelpunkt ist } \left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{R^2(V_0/2)^2}{2\gamma M}, 0\right) = (R, 0)$$

Diese Parabel ist nach links geöffnet und hat ihren Brennpunkt ebenfalls im (0) .

d) Im Fall $R(V_0)_2^2 > 2 \gamma M$ haben wir

$$L=0 \text{ und } \varepsilon = \frac{R(V_0)_2^2 - \gamma M}{\gamma M} > 1, \text{ sodass}$$

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} \text{ die Polardarstellung}$$

einer Hyperbel mit der kartesischen

Darstellung $\frac{(x-e)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, wobei $e = a(R)$ liefert
(linker)

den Abstand vom Ursprung $(0) =$ Brennpunkt zum Scheitelpunkt der Hyperbel angibt.

Es gelten ähnlich wie für die Ellipse die

folgenden Formeln: $e^2 = a^2 + b^2$

$$(0, p) \in \text{Hyperbel} \Rightarrow p^2 = \left(\frac{e^2}{a^2} - 1 \right) b^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}$$

$$\text{und } \varepsilon = \frac{p}{e-a} - 1 = \frac{p - e + a}{e-a} = \frac{b^2/a + a - e}{e-a}$$

$$e-a = r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon} = \frac{b^2 + a^2 - ae}{a(e-a)} = \frac{e^2 - ae}{a(e-a)} = \frac{e}{a}$$

Wegen $R = e - a \Rightarrow R = a\varepsilon - a = (\varepsilon - 1)a$

$$\Rightarrow a = \frac{R}{\varepsilon - 1} = \frac{R}{\frac{R(v_0/2)^2 - \gamma M}{\gamma M} - 1} = \frac{R \gamma M}{R(v_0/2)^2 - 2\gamma M}$$

und somit $b = \sqrt{a p} = \sqrt{\frac{R^3}{R(v_0/2)^2 - 2\gamma M}} (v_0/2)$

und $e = a\varepsilon = \frac{R \gamma M}{R(v_0/2)^2 - 2\gamma M} \cdot \frac{R(v_0/2)^2 - \gamma M}{\gamma M}$

$$= R \frac{R(v_0/2)^2 - \gamma M}{R(v_0/2)^2 - 2\gamma M} = \text{halber Abstand zum Brennpunkt des rechten Hyperbeldasts.}$$

Diese Hyperbel ist ebenfalls nach links geöffnet, ist also der linke Ast. □

Außerdem lassen sich nun aus (A) und anschließend anhand der elementaren Formel $L^2(E_{a,b}) = \pi a b$, für eine Ellipse $E_{a,b}$ mit den Halbachsen a, b , in Kombination mit $p = \frac{b^2}{a}$ die beiden weiteren Keplerschen Gesetze ableiten:

2. Keplersches Gesetz:

Der „Strahl“ $\overrightarrow{OX(t)}$ überstreicht in gleichen Zeitabständen Flächensektoren F mit identischen Flächeninhalten, d. h. präzise:

$$\mathcal{L}^2(F|_{t_1}^{t_2}) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \dot{\phi}(t) dt \stackrel{(A)}{=} \frac{1}{2} A (t_2 - t_1)$$

mit $A = R(v_0)_2 > 0$. für beliebige $t_1 \leq t_2 \in [0, T]$.

Beweis: Aus dem Gaußschen Satz in Anwendung

auf das Vektorfeld $V \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$ folgt für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweisem

C^1 -Rand:

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div} V d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial\Omega} \langle V, \nu \rangle ds.$$

Anwendung auf $\Omega = F|_{t_1}^{t_2}$ bei Beachtung der speziellen „Sektorform“ von $\partial(F|_{t_1}^{t_2})$ ergibt:

$$\mathcal{L}^2(F|_{t_1}^{t_2}) = \int_{\operatorname{spur}(x(t))} \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \nu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left\langle x(t), \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) \end{pmatrix}}_{=:\dot{x}(t)} \right\rangle \frac{1}{|x(t)|} \cdot |x(t)| dt$$

$$\text{mit } \dot{x}(t) = (\dot{r}(t) + i r(t) \dot{\phi}(t)) e^{i\phi(t)} = \dot{x}_1(t) + i \dot{x}_2(t)$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \end{pmatrix}(t) \right\rangle = (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1)(t)$$

$$= r(t) \cos \phi(t) \cdot (\dot{r}(t) \sin \phi(t) + r(t) \dot{\phi}(t) \cos \phi(t))$$

$$- r(t) \sin \phi(t) (\dot{r}(t) \cos \phi(t) - r(t) \dot{\phi}(t) \sin \phi(t))$$

$$= r^2(t) \dot{\phi}(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^2(F|_{t_1}^{t_2}) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{r^2(t) \dot{\phi}(t)}_{\equiv A = R(V_0)_2 > 0} dt = \frac{1}{2} A (t_2 - t_1) \quad \square$$

3. Keplersches Gesetz

Bewegt sich der Massenpunkt $x(t)$ entlang einer Ellipsen-Bahn um das Gravitations-Zentrum $= 0$ (liegt also der Fall (a) oder speziell (b) aus Theorem 4.2 vor) mit den Halbachsen $a \geq b > 0$, so gilt für die Gesamtdauer T eines Umlaufes von $x(t)$ um das Grav.-Zentrum die Formel: $T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3$.

Beweis:

Wir setzen voraus, daß $\text{Spur}(X) = \{x(t) \mid t \in [0, T]\}$

eine Ellipse ist, von welcher ein Brennpunkt im Ursprung liegt, gerade weil $\text{Spur}(X)$ in

Polarkoordinaten n. Voraus. durch

$$r(\phi) = \frac{p}{1 \pm \varepsilon \cos \phi}, \text{ für ein } \varepsilon \in (0, 1), \text{ gegeben ist.}$$

Seien nun $M = (-e, 0)$ der Mittelpunkt und $a \geq b > 0$

die Halbachsen unserer Ellipse, so wissen wir

$$1.) \frac{(x_1 + e)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \forall (x_1, x_2) \in \text{Spur}(x(t)), \quad (**)$$

und anhand einer elementaren Konstruktionsmöglichkeit von Ellipsen mittels ihrer Brennpunkte:

$$2.) a^2 = e^2 + b^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (***)$$

Desweiteren hat der Punkt $(0, x_2) \in \text{Spur}(x(t)), x_2 > 0$,

die Polarkoordinaten $(r(\frac{\pi}{2}), \frac{\pi}{2}) = (p, \frac{\pi}{2})$, sodaß

also gerade $x_2 = |(0, x_2)| = r(\frac{\pi}{2}) = p$ und somit in

Kombination mit (*): $\frac{l^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$ gilt.

$$(**) \Rightarrow p^2 = b^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}$$

Desweiteren erhalten wir einerseits aus dem 2. Keplerschen Gesetz und andererseits anhand der elementaren Berechnung des Flächeninhalts einer Vollellipse mit den Halbachsen $a \geq b > 0$:

$$\pi a b = \int^2 (\text{Int}(\text{Spur } X)) \equiv \int^2 (F|_0^T) = \frac{1}{2} A T, (**)$$

wobei wir $A^2 = \gamma M p$ aus der Formel (P) wissen.

$$\Rightarrow 4 \pi^2 a^2 b^2 \stackrel{(**)}{=} \gamma M p T^2 = \gamma M \frac{b^2}{a} T^2$$

$$\Rightarrow \frac{4 \pi^2}{\gamma M} a^3 = T^2 \quad \square$$

Bemerkung:

Tatsächlich sind die 4 Kegelschnitt-Bahnen in den Fällen (a)-(d) von Theorem 4.2 eines Massepunktes x unter dem Einfluß des Potentials

$$V(z) := -\frac{\gamma m M}{|z|} \text{ zu Anfangswerten } x(0) = (R, 0, 0) \neq 0$$

und $\dot{x}(0) = (0, (v_0)_2, 0) \neq 0$ die einzig möglichen, d.h. eindeutig bestimmt!

Zum Beweis bemerke man, daß das AWP

$$\text{2. Ordnung} \quad \ddot{x} = -\gamma M \frac{x}{|x|^3}(t), \quad \begin{array}{l} x(0) = (R, 0, 0) \\ \dot{x}(0) = (0, (v_0)_2, 0) \end{array}$$

Zum AWP 1. Ordnung:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\gamma M \frac{x}{|x|^3}(t) \end{pmatrix}, \quad (x, v)(0) = (R, 0, 0, 0, (v_0)_2, 0)$$

$=: F(x(t), v(t))$, mit dem Vektorfeld

$$F(z, p) := \left(p, -\gamma M \frac{z}{|z|^3} \right), \text{ also } F: (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^6,$$

äquivalent ist. In den Fällen (a)-(d) sind die

Bahnen der C^2 -Lösungen $x(t)$ durch Kegelschnitte mit der Polarkoordinaten-Darstellung

$$r(\phi) = \frac{p}{1 \pm \epsilon \cos \phi} \quad \text{mit } p = \frac{R^2 (v_{0/2})^2}{\gamma M}, \quad \epsilon = \pm \frac{R (v_{0/2})^2 - \gamma M}{\gamma M}$$

$$\text{also } r(\phi) = \frac{R^2 (v_{0/2})^2}{\gamma M + (R (v_{0/2})^2 - \gamma M) \cos \phi}$$

für $\phi \in [0, 2\pi)$ in den Fällen (a)-(b), also falls $R (v_{0/2})^2 < 2 \gamma M$ (Ellipse, Kreis), für $\phi \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$, falls $R (v_{0/2})^2 = 2 \gamma M$ (Parabel) und für $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ im Falle $R (v_{0/2})^2 > 2 \gamma M$ (Hyperbel) gegeben.

In den Fällen für $R (v_{0/2})^2 \geq \gamma M$ schätzen wir ab:

$$r(\phi) \geq \frac{R^2 (v_{0/2})^2}{\gamma M + (R (v_{0/2})^2 - \gamma M) \cdot 1} = R, \quad \text{für alle erlaubten } \phi$$

und für den Fall $R (v_{0/2})^2 < \gamma M$: (Ellipse mit $2 = \pi$)

$$r(\phi) \geq \frac{R^2 (v_{0/2})^2}{\gamma M - (R (v_{0/2})^2 - \gamma M)} = R \cdot \frac{R (v_{0/2})^2}{2 \gamma M - R (v_{0/2})^2} =: \mathcal{S}(R, v_0)$$

(21) $\forall \phi \in [0, 2\pi)$.

$\in (0, 1)$

In jedem Fall erhalten wir also ein $\varrho(R, (v_0)_2) \in (0, R]$,
 sodaf $|x(t)| \geq \varrho(R, (v_0)_2)$, $\forall t \in [0, T]$ bzw. $\in [0, \infty)$,
 gilt, sodaf wir das Vektorfeld F im
 obigen AWP 1. Ordnung auf das Teilgebiet
 $\mathcal{Q} := (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{\frac{\varrho}{2}}(0)}) \times \mathbb{R}^3$ des \mathbb{R}^6 einschränken dürfen,
 auf welchem es Lipschitz-stetig mit einer
 Lipschitz-Konstanten $L = L(R, (v_0)_2) < \infty$ ist, also

$$|F(z_1, p_1) - F(z_2, p_2)| \leq L |(z_1 - z_2, p_1 - p_2)|$$

$\forall (z_1, p_1), (z_2, p_2) \in \mathcal{Q}$ erfüllt.

Somit folgt die behauptete Eindeutigkeit
 der ermittelten Kegelschnitt-Bahnen für
 den Massenpunkt $x(t)$ in Theorem 4.2 aus dem
 folgenden einfachen Eindeutigkeitssatz:

Theorem 4.3

Ist $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, ein Gebiet und $F: [0, T] \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^N$
 (t, z)

Lipsch.-stetig in z , so hat das AWP 1. Ordnung
 $\dot{X}(t) = F(t, X(t))$, $t \in [0, T]$, mit $X(0) = X_0 \in \mathcal{D}$, (AWP)

höchstens eine Lösung auf $[0, T]$.

Beweis: Man führt die Hilfsfunktion

$\phi(t) := |X^1 - X^2|^2(t)$ für zwei C^1 -Lösungen
 X^1, X^2 von (AWP) ein und bemerkt:

$$\dot{\phi}(t) = 2 \langle X^1 - X^2, \dot{X}^1 - \dot{X}^2 \rangle(t)$$

$$\stackrel{\text{(AWP)}}{\leq} 2 |X^1 - X^2| |F(t, X^1(t)) - F(t, X^2(t))|$$

$$\leq 2L \phi(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Lip-Stetigkeit

Somit erfüllt die Funktion $\beta(t) := \phi(t) e^{-2Lt}$:

$$\dot{\beta}(t) \leq 2L \phi(t) e^{-2Lt} - 2L \phi(t) e^{-2Lt} \equiv 0, \text{ ist}$$

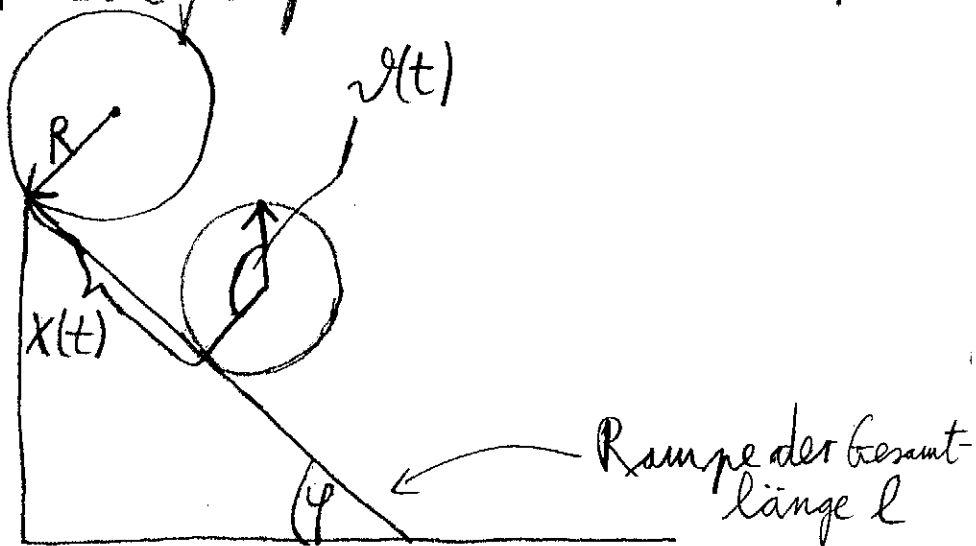
also monoton fallend, mit $\beta \geq 0$ und $\beta(0) = 0$.

$$\Rightarrow \beta \equiv 0 \Leftrightarrow \phi \equiv 0 \Leftrightarrow X^1 \equiv X^2 \text{ auf } [0, T]. \quad \square$$

Konkrete Anwendungen des D'Alembertschen Prinzips an Beispielen aus der Theoret. Mech.:

1] Rollendes Fass auf geneigter Ebene:

Wir möchten den Rollvorgang eines Zylinders bzw. Fasses mit Dichte-Verteilung $\rho(r) = r^2$ und Radius R auf einer um den Winkel φ geneigten Rampe der Länge l unter Einfluß der Schwerkraft beschreiben. $\mathcal{H}(0) = 0$
 $x(0) = 0$



Es empfiehlt sich, dieses "physik. System" durch die zurückgelegte Strecke $x(t)$ auf der Rampe und durch den "abgerollten Winkel" $\mathcal{H}(t)$ des Zylinders in Abhängigkeit von der Zeit

t zu beschreiben! Diese beiden Koordinaten-Funktionen sind durch die Zwangsbedingung (ZB) $x(t) = R \vartheta(t)$ aneinander gekoppelt.

Da wir das Fass natürlich senkrecht zu seiner Symmetrie-Achse die Rampe hinunterrollen lassen, reicht es für unsere Berechnung (von $x(t)$ und $\vartheta(t)$), nur das Trägheitsmoment von Z bzgl. eben dieser Symmetrie-Achse mit radial verteilter Dichte $\rho(r) = r^2$ zu berechnen, also:

$$J = \int_0^R \int_{\partial Z_T} \rho(r) \cdot r^2 dA dr, \text{ mit } \partial Z_T := \partial B_T^2(0) \times [0, L] \text{ und } L := \text{Länge von } Z$$

$$= \int_0^R \underbrace{(2\pi r L)}_{= A(\partial Z_T)} r^2 dr = 2\pi L \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi}{3} L R^3.$$

Die Gesamtmasse M des Zylinders beträgt:

$$M = \int_0^R \int_{\partial Z_T} \rho(r) dA dr = \int_0^R (2\pi r L) r^2 dr$$

$$= 2\pi L \frac{R^4}{4} = \frac{\pi L}{2} R^4.$$

Insbesondere erhalten wir also $J = \frac{2}{3} R^2 M$

Die kinetische Energie T , ausgedrückt in \dot{x} und $\dot{\vartheta}$,

$$\text{lautet: } T(\dot{x}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2(t)$$

und seine potent. Energie: $= \int_{z(t)} T_{\text{rot-Dichte}} d\mathcal{E}^3$

$$V(x, \vartheta) = Mg(l - x(t)) \sin \varphi.$$

Somit erhalten wir die Lagrange-Funktion

$$L(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - Mg(l - x(t)) \sin \varphi$$

d.h. in „vernünftiger Notation“:

$$L(z_1, z_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2} M p_1^2 + \frac{1}{2} J p_2^2 - Mg(l - z_1) \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial z_1} = Mg \sin \varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p_1}(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = M \ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p_2}(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = J \ddot{\vartheta}$$

Da unsere Zwangsbedingung $G(x(t), \vartheta(t)) = 0$

mit $G(z_1, z_2) = z_1 - R z_2$ lautet, erhalten

wir also aus dem D'Alembertschen Prinzip $\square_{3,53}$:

die „gezwungenen“ (ELG): $M\ddot{x} - Mg \sin \varphi = r \cdot \lambda(t)$

$$\frac{2}{3} MR^2 \ddot{\vartheta}(t) \equiv J \ddot{\vartheta} - 0 = -R \lambda(t)$$

Bedenken wir noch: $\ddot{x} = R \ddot{\vartheta}$ anhand von (ZB),
so erhalten wir also:

$$\ddot{x} - g \sin \varphi = \frac{\lambda(t)}{M} = -\frac{2}{3} R \ddot{\vartheta} = -\frac{2}{3} \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{3}{5} g \sin \varphi, \text{ also mit } x(0) = 0 = \dot{x}(0),$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{3}{10} g \sin(\varphi) \cdot t^2 \text{ und dann mit (ZB)}$$

$$\vartheta(t) = \frac{3}{10R} g \sin(\varphi) t^2 \text{ und}$$

$$\lambda(t) = -\frac{2}{3} MR \ddot{\vartheta}(t) = -\frac{2}{5} Mg \sin(\varphi)$$

Hieraus ergibt sich dann auch noch die

„Zwangskraft“ $\lambda(t) \cdot \nabla G(x(t), \vartheta(t))$

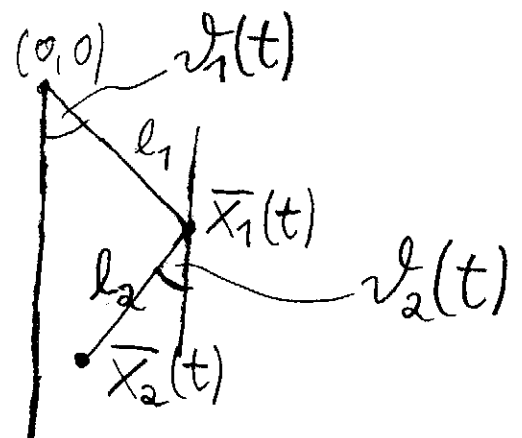
$$= \frac{2}{5} Mg \sin(\varphi) \begin{pmatrix} -1 \\ R \end{pmatrix}, \text{ deren}$$

erste Komponente gerade die Beschleunigung \ddot{x}
unseres Fasses um den Faktor $\frac{2}{5}$ der Beschl. eines

die Rampe hinuntergleitenden Massenpunktes der Masse M reduziert und deren zweite \ddot{z} Komponente dem Fass ein Drehmoment vom Betrag $\frac{2}{5} MR g \sin(\varphi)$ verleiht und es somit zum Rollen „motiviert“.

2 Schwingendes Doppelpendel :

Wir möchten die Bewegung eines aus zwei Massenpunkten $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)$ mit Massen m_1, m_2 bestehenden Doppelpendels beschreiben, welche durch einen Faden der Länge l_2 miteinander verbunden seien und wiederum an einem im Ursprung $(0,0)$ befestigten Faden der Länge l_1 hängen mögen:



Es empfiehlt sich, die beiden Zwangsbedingungen

$$|\bar{X}_1(t)|^2 \stackrel{!}{=} l_1^2 \quad \text{und} \quad |\bar{X}_1(t) - \bar{X}_2(t)|^2 \stackrel{!}{=} l_2^2$$

durch eine intelligentere Wahl der zur Beschreibung des Systems benutzten Koordinaten-Funktionen, nämlich durch die Berechnung der „freien“ Winkel-Funktionen $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$, zu eliminieren, so daß wir später keine Lagrange-Multiplikator-Funktionen mehr ausrechnen müssen!

$$\Rightarrow \text{(Trafo)} \quad \bar{X}_1(t) = l_1 \begin{pmatrix} \sin \vartheta_1(t) \\ -\cos \vartheta_1(t) \end{pmatrix}$$
$$\bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} l_1 \sin \vartheta_1(t) - l_2 \sin \vartheta_2(t) \\ -l_1 \cos \vartheta_1(t) - l_2 \cos \vartheta_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{X}}_1(t) = l_1 \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1(t) \\ \dot{\vartheta}_1 \sin \vartheta_1(t) \end{pmatrix}$$
$$\dot{\bar{X}}_2(t) = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1(t) - l_2 \dot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2(t) \\ l_1 \dot{\vartheta}_1 \sin \vartheta_1(t) + l_2 \dot{\vartheta}_2 \sin \vartheta_2(t) \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir für die kinetische Energie:

$$T(\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + l_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 (\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2))$$

$$= \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 \left(\frac{1}{2} l_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 - l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \right)$$

Und für die potentielle Energie erhalten wir:

$$V(\vartheta_1, \vartheta_2) = (-l_1 m_1 \cos \vartheta_1 - l_1 m_2 \cos \vartheta_1 - l_2 m_2 \cos \vartheta_2) g$$

Somit erhalten wir die folgende Lagrange-Funktion $L(z_1, z_2, p_1, p_2)$, also in vernünftiger

$$\text{Notat.: } L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 p_1^2 + m_2 \left(\frac{1}{2} l_2^2 p_2^2 - l_1 l_2 p_1 p_2 \cos(z_1 + z_2) \right) + g(l_1 m_1 + l_1 m_2) \cos z_1 + g l_2 m_2 \cos z_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial z_1} = m_2 l_1 l_2 p_1 p_2 \sin(z_1 + z_2) - g(l_1 m_1 + l_1 m_2) \sin z_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_2} = m_2 l_1 l_2 p_1 p_2 \sin(z_1 + z_2) - g l_2 m_2 \sin z_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 p_1 - m_2 l_1 l_2 p_2 \cos(z_1 + z_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = m_2 l_2^2 p_2 - m_2 l_1 l_2 p_1 \cos(z_1 + z_2)$$

Hieraus erhalten wir also die folgenden, glücklicherweise „ungezwungenen“ (ELG):

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\vartheta}_1 - m_2 l_1 l_2 \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{-g(l_1 m_1 + l_1 m_2) \sin \vartheta_1}$$

$$\text{Und } m_2 l_2^2 \ddot{\vartheta}_2 - m_2 l_1 l_2 \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + m_2 l_1 l_2 (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{-g m_2 l_2 \sin \vartheta_2}$$

Für $|v_1|$ und $|v_2|$ sehr klein vereinfachen sich diese beiden Gleichungen zu:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{v}_1 - m_2 l_1 l_2 \ddot{v}_2$$

$$\stackrel{!}{=} -g(l_1 m_1 + l_1 m_2) v_1 - m_2 l_1 l_2 v_2^2 \quad (v_1 + v_2)$$

Und $m_2 l_2^2 \ddot{v}_2 - m_2 l_1 l_2 \ddot{v}_1$

$$\stackrel{!}{=} -g m_2 l_2 v_2 - m_2 l_1 l_2 v_1^2 (v_1 + v_2)$$

In Matrix-Vektor-Notation heißt dies:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & -m_2 l_1 l_2 \\ -m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -g l_1 (m_1 + m_2) - m_2 l_1 l_2 v_2^2 & -m_2 l_1 l_2 v_2^2 \\ -m_2 l_1 l_2 v_1^2 & -g m_2 l_2 - m_2 l_1 l_2 v_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det A = m_1 l_1^2 m_2 l_2^2 > 0$ ist

$A \in GL_2(\mathbb{R})$, sodaß wir unter der unerlaubten

Annahme: $|\dot{v}_1| \equiv c_1$ und $|\dot{v}_2| \equiv c_2$ die Gleich. ist:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} A^{-1} \cdot B \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{für } B := \begin{pmatrix} -g l_1 (m_1 + m_2) - m_2 l_1 l_2 c_2^2 & -m_2 l_1 l_2 c_2^2 \\ -m_2 l_1 l_2 c_1^2 & -g m_2 l_2 - m_2 l_1 l_2 c_1^2 \end{pmatrix}$$

Falls nun $A^{-1}B$ über \mathbb{R} diagonalisierbar sein sollte, also falls ein $P \in GL_2(\mathbb{R})$ mit

$$A^{-1} \cdot B = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \text{ existierte}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} P^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ sodaf wir}$$

für $\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} := P \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ das „entkoppelte System“

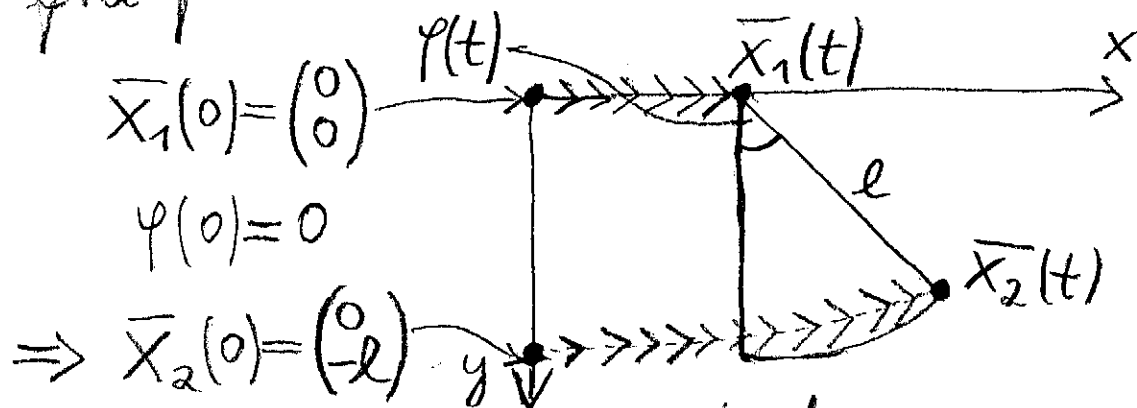
$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \mu_1 \tilde{v}_1 \\ \mu_2 \tilde{v}_2 \end{pmatrix} \text{ mit der allgemeinen}$$

Lösung $\tilde{v}_i(t) = K_1^i \exp(\sqrt{\mu_i} t) + K_2^i \exp(-\sqrt{\mu_i} t)$,

für $K_j^i \in \mathbb{R}, j=1,2$, und somit $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t)$ gewinnen.

3] Schwingende Hantel:

Wir möchten die Bewegung einer Hantel beschreiben, die aus zwei Massepunkten $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$ der Massen m_1, m_2 bestehe, welche durch eine Stange der Länge l miteinander verbunden seien, wobei $\bar{x}_1(t)$ auf der x -Achse reibungsfrei gleiten darf und $\bar{x}_2(t)$ unter dem Einfluß der Schwerkraft ($0, -m_2 g$) frei pendele.



Wir haben somit die Zwangsbedingungen

$$G_1(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)) \equiv 0 \text{ mit } G_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2) := (\bar{z}_1)_2 \text{ und}$$

$$G_2(\text{---} \parallel \text{---}) \equiv 0 \text{ mit } G_2(\bar{z}_1, \bar{z}_2) := \left((\bar{z}_1)_1 - (\bar{z}_2)_1 \right)^2 + (\bar{z}_2)_2^2 - l^2$$

Das System wird somit durch zwei Koordinaten

Funktionen beschreiben, welche günstigerweise durch $q_1(t) := (\bar{x}_1)_1(t)$ und den Ausschlagwinkel $q_2(t) := \varphi(t)$ des Stabes $\overrightarrow{\bar{x}_2(t) \bar{x}_1(t)}$ gewählt werden sollten.

$$\Rightarrow (\text{Trafo}): (\bar{x}_2)_1(t) = q_1(t) + l \sin \underbrace{\varphi(t)}_{= q_2(t)}$$

$$(\bar{x}_2)_2(t) = -l \cos q_2(t)$$

und $(\bar{x}_1)_1 \equiv q_1$, $(\bar{x}_1)_2 \equiv 0$ nach Voraussetzung.

Somit erhalten wir für die kinetische Energie:

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1 + l \dot{q}_2 \cos q_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{q}_2^2 (\sin q_2)^2(t)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2 l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2)$$

und für die potentielle Energie:

$$V(q_1, q_2) = -m_2 g l \cos q_2(t).$$

$$\Rightarrow L(z_1, z_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) p_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 p_2^2 + 2 l p_1 p_2 \cos z_2) + m_2 g l \cos z_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial z_1} \equiv 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z_2} = -m_2(l p_1 p_2 + g l) \sin z_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = (m_1 + m_2) p_1 + m_2 l p_2 \cos z_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = m_2(l^2 p_2 + l p_1 \cos z_2)$$

Somit erhalten wir die (ELG):

$$(m_1 + m_2) \dot{q}_1(t) + m_2 l \dot{q}_2(t) \cos q_2(t) \stackrel{!}{=} \text{const.} =: c \quad (*)$$

$$\text{und } m_2(l^2 \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 \cos q_2(t) - \cancel{l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2(t)}) \\ \stackrel{!}{=} -m_2(\cancel{l \dot{q}_1 \dot{q}_2} + g l) \sin q_2(t)$$

$$\Leftrightarrow l^2 \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 \cos q_2 + g l \sin q_2(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad (**)$$

$$\text{Aus } (*) \text{ folgt sofort } \dot{q}_1 = \frac{c}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$\Rightarrow q_1(t) = \frac{c}{m_1 + m_2} t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin q_2(t) + \underbrace{q_1(0)}_{\parallel} \quad (***)$$

$(\bar{x}_1)_1(t)$ Wir sollten $q_2(0) = 0, (\bar{x}_1)_1(0) = 0$ wählen.

Bei der Wahl $q_2(0) = \varphi(0) = 0$ können wir für eine kurze Zeit $0 \leq t < \varepsilon$ auch einen kleinen Winkel $|\varphi(t)| \ll 1$

erwarten, sodaß sich (***) und (***) zu

$$l \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 + g l q_2 = 0 \quad \text{und}$$

$$q_1(t) = \frac{c}{m_1 + m_2} t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} q_2(t) \quad \text{reduzieren, } \forall t \in [0, \varepsilon).$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 \approx - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{q}_2. \quad \text{Einsetzen liefert dann}$$

$$l \ddot{q}_2 - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{q}_2 + g l q_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_2 = - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} q_2, \quad \text{sodaß wir also}$$

$$q(t) = q_2(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\text{für } \omega := \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}; \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \text{und mit}$$

$$q(0) = 0: \quad q(t) = B \sin(\omega t) \quad \text{erhalten.}$$

Zusammen mit (***) erhalten wir also somit

$$(X_1)_1(t) = \frac{c}{m_1 + m_2} t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin(B \sin(\omega t))$$

und aus (Trafo) dann auch noch $(X_1)_2 = 0$ und

$$\bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{c}{m_1+m_2} t + \frac{m_1 l}{m_1+m_2} \sin(B \sin(\omega t)) \\ -l \cos(B \sin(\omega t)) \end{pmatrix}$$

Zumindest für eine kurze Zeit $t \in [0, \varepsilon)$ und mit den Anf. werten $(\bar{X}_1)_1(0) = 0 = \varphi(0)$.

Während dieser Zeit schwingt also $\bar{X}_1(t)$ entlang der x -Achse hin und her, und das hängende Ende der Hantel $\bar{X}_2(t)$ vollzieht eine pendelnde

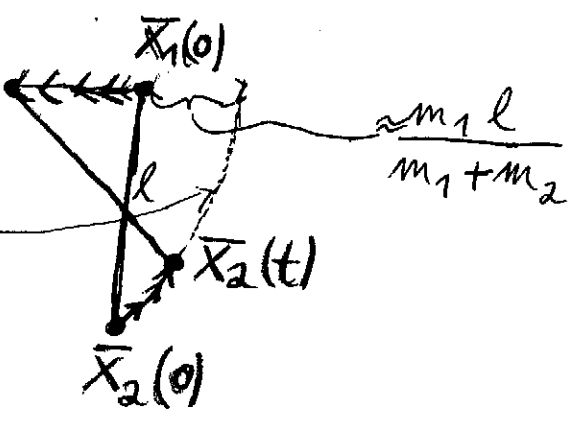
Bewegung, jedoch nicht entlang einer Kreisbahn (wie das übliche Pendel) sondern entlang

einer Ellipse, welche ungefähr die Halbachsen $\frac{m_1 l}{m_1+m_2}$ und l hat, da wir den

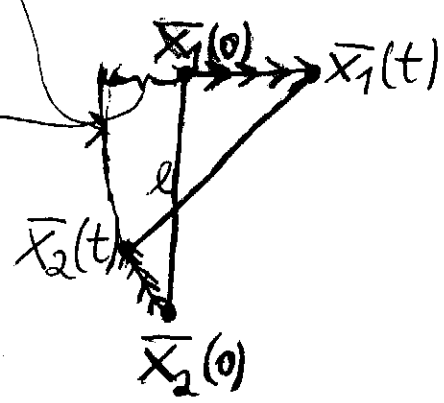
linearen Term $\frac{ct}{m_1+m_2}$ für $t \in [0, \varepsilon)$ vernachlässigen dürfen. und $\frac{|c|}{m_1+m_2}$ klein

Dieses Resultat spiegelt exakt unsere Erfahrung bzw. Intuition wieder!

Falls $\frac{|C|}{m_1+m_2}$ hinr. klein sein sollte, erhalten wir also

für $B > 0$ die Bewegung: $\bar{x}_1(t)$ 

Ellipse mit Halbachsen
 $a := \frac{m_1 l}{m_1+m_2}$ und $b := l$

oder für $B < 0$ $\frac{m_1 l}{m_1+m_2} \approx$ 

Falls jedoch $\frac{C}{m_1+m_2} \gg 1$ und z. B. $B > 0$, so bewegt sich die Hautel folgendermaßen:

