§5 Beliebig-dimensionale Variationsrechnung

Auf einer fixierten offenen Teilmenge $\mathcal{U}$ des $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$, für $n, m \geq 1$, betrachten wir eine Lagrange-Funktion $F = F(x, z, p) \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ und dazu die Menge aller „Flächen"

$$\mathcal{M} := \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, (x, u(x), Du(x)) \in \mathcal{U},\ \forall x \in \overline{\Omega} \right\}$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^m$ ohne Randbedingungen

bzw. $$\mathcal{M}_{\mathcal{N}} := \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \begin{array}{l} (x, u(x), Du(x)) \in \mathcal{U}, x \in \overline{\Omega} \\ \text{und } u|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to \mathcal{N} \end{array} \right\}$$

mit Randbedingungen, wobei $\mathcal{N}$ eine $(n-r)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^k, $k \geq 1$, für ein $r \in \{0, \ldots, n-m+1\}$ sei.

Definition 5.1:

a) Wir definieren die erste „äußere" Variation

von $\mathcal{F}_\Omega(u) := \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\,dx$ in einem $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ in Richtung eines $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ durch $\delta \mathcal{F}_\Omega(u,\varphi) := \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}_\Omega(u+\varepsilon\varphi)\big|_{\varepsilon=0}$
und nennen ein u mit $\delta\mathcal{F}_\Omega(u,\varphi)=0 \ \forall \varphi\in C^1_c(\Omega,\mathbb{R}^n)$ eine schwache „äußere" Extremale zu $\mathcal{F}_\Omega$.

b) Für ein Vektorfeld $\lambda \in C^1(\Omega_0, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset\subset \Omega_0$, defin. die Schar $\Phi_\varepsilon(x) := x - \varepsilon\lambda(x)$ mit hinreichend klein gewähltem $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ eine Familie von Ω_0
C^1-Diffeomorphismen $\Phi_\varepsilon : \overline{\Omega} \xrightarrow{\cong} \overline{\Omega^*_\varepsilon} := \Phi_\varepsilon(\overline{\Omega})$ mit
$x \longmapsto y := \Phi_\varepsilon(x)$
$\Phi_0 = id_{\overline{\Omega}}$, $\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -\lambda$. Die inverse Diffeomorphismen-Schar $\Psi_\varepsilon := \Phi_\varepsilon^{-1} : \overline{\Omega^*_\varepsilon} \xrightarrow{\cong} \overline{\Omega}$ erfüllt $\Psi_0 = id_{\overline{\Omega}}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \lambda$ auf $\overline{\Omega}$.
$\Phi_\varepsilon(x) = y \longmapsto x$

Wir bezeichnen mit

$$\partial \mathcal{F}_\Omega(u,\lambda) := \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}_{\Omega^*_\varepsilon}(u \circ \Psi_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega^*_\varepsilon} F\big(y, (u\circ\Psi_\varepsilon)(y), D_y(u\circ\Psi_\varepsilon)(y)\big)\, dy \Big|_{\varepsilon=0}$$

die sogenannte „innere" erste Variation von $\mathcal{F}$ in u in Richtung von λ und nennen ein u eine „innere" schwache Extremale von $\mathcal{F}$, falls es $\partial \mathcal{F}_\Omega(u,\lambda)=0 \quad \forall \lambda \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ erfüllt.

Wenden wir uns zunächst den Begriffen von Def. 5.1 (a) zu:
Wie im Spezialfall $m=1$, also $\Omega=(a,b)\subset\mathbb{R}$, kann man mittels des Satzes über parameterabhängige Integrale $\mathcal{F}_\Omega(u+\varepsilon\varphi)$ bzgl. $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ und der Kettenregel

$$\delta \mathcal{F}_\Omega(u,\varphi) = \int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x,(u+\varepsilon\varphi)(x),(Du+\varepsilon D\varphi)(x))\,dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} D_{z_j} F(x,u(x),Du(x))\cdot \varphi_j(x) \qquad (\delta\mathcal{F})$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m} D_{p_{j\alpha}} F(x,u(x),Du(x))\cdot D_{x_\alpha}\varphi_j(x)\,dx$$

3

beweisen. Dies motiviert wie in § 1 eine partielle Integration für den 2. Summanden in Kombination mit dem allgemeinen

<u>Lemma 5.1</u> (Fundamental-Lemma d. Var-Rech.)

Sei $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und erfülle

$$\int_\Omega \langle f(x), \varphi(x) \rangle \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

so folgt $f \equiv 0$ auf $\overline{\Omega}$.

<u>Bew.:</u>: Angenommen, $\exists x^* \in \overline{\Omega}$ mit $f(x^*) \neq 0$, so $\exists \delta > 0$, sodaß $f_j(x) > 0$ oder < 0 $\forall x$ aus $B_\delta(x^*) \cap \overline{\Omega}$, also OBDA $f_j > 0$ auf $B_\delta(x^*) \cap \overline{\Omega}$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ erfüllt ist.

Wähle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \equiv 0$ für $k \neq j$ und

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{\delta^2 - |x - x^*|^2}\right), & x \in B_\delta(x^*) \\ 0, & x \in \overline{\Omega} \setminus B_\delta(x^*) \end{cases}$$

so erhalten wir:

$$\int_\Omega \langle f(x), \varphi(x) \rangle \, dx = \int_{B_\delta(x^*)\cap\Omega} (f_j \cdot \varphi_j)(x)\, dx > 0 \ \lightning$$

$\square$

Theorem 5.2

Sei $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}$, $F \in C^1(\mathcal{U})$ eine Lagrange-Funktion mit $D_{p_{j\alpha}} F \in C^1(\mathcal{U})$ und $\partial\Omega$ eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigf.keit des $\mathbb{R}^m$ der Klasse C^1. So können wir umformen:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{F}_\Omega(u, \varphi) = \int_\Omega & \sum_{j=1}^{n} F_{z_j}(x, u(x), Du(x)) \cdot \varphi_j(x) \\
& - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Div}_x \begin{pmatrix} F_{p_{j1}} \\ \vdots \\ F_{p_{jm}} \end{pmatrix} (x, u(x), Du(x)) \cdot \varphi_j(x)\, dx \\
+ \int_{\partial\Omega} & \sum_{j=1}^{n} \left\langle \begin{pmatrix} F_{p_{j1}} \\ \vdots \\ F_{p_{jm}} \end{pmatrix} (x, u(x), Du(x)), \nu(x) \right\rangle \cdot \varphi_j(x)\, dA
\end{aligned}$$

wobei ν das ins Äußere von Ω weisende Einheits-Normalenfeld an $\partial\Omega$ bezeichne.

Beweis: Wir wenden partielle Integration

$$\int_\Omega f(x) \cdot D_{x^\alpha} \psi(x)\, dx = -\int_\Omega D_{x^\alpha} f(x) \cdot \psi(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} (f \cdot \psi)(x) \cdot \nu^\alpha(x)\, dA$$

für $f, \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ auf die Funktionen

$f := F_{p_{j\alpha}}(\cdot, u(\cdot), Du(\cdot))$ und $\psi := \varphi_j$ an

und erhalten nach Summation auf beiden Seiten der entstehenden Gleichungen über $j = 1, \ldots, n$ und $\alpha = 1, \ldots, m$ in Kombination mit $(\delta\mathcal{F})$:

$$\delta \mathcal{F}_\Omega(u, \varphi) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} F_{z_j}(x, u(x), Du(x)) \cdot \varphi_j(x) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} D_{x^\alpha}\left(F_{p_{j\alpha}}(x, u(x), Du(x))\right) \cdot \varphi_j(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} F_{p_{j\alpha}}(x, u(x), Du(x))\, \nu^\alpha \cdot \varphi_j(x)\, dA$$

was gerade die behauptete Gleichung ist $\square$

Theorem 5.3 : Sei $\mathcal{F}$ wie in Theorem 5.2 und $\partial\Omega \in C^1$.

a) Erfüllt ein $u \in \mathcal{M} \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ die Gleichung

$\delta \mathcal{F}_\Omega(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so löst es die „Euler-Lagrange-Gleichungen" zu $\mathcal{F}$:

$$L^j_{\mathcal{F}}(u)(x) := \mathcal{F}_{z_j}(x, u(x), Du(x)) - \operatorname{Div}_x \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{p_{j1}} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{p_{jm}} \end{pmatrix} (x, u(x), Du(x)) \equiv 0 \text{ auf } \Omega \qquad \text{(ELG)}$$

$j = 1, \dots, n$

und wir nennen u eine „starke äußere" Extremale zum Variations-Funktional $\mathcal{F}$.

b) Erfüllt $u \in \mathcal{M} \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ sogar

$\delta \mathcal{F}_\Omega(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, so genügt u außerdem noch den „natürlichen Randbedingungen":

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{p_{j1}} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{p_{jm}} \end{pmatrix} (x, u(x), Du(x)), \nu(x) \right\rangle \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega, \qquad \text{(NRB)}$$

für $j = 1, \dots, n$.

Beweis: (a) folgt sofort aus Lemma 5.1 und Theorem 5.2.

(b) Unter den Voraussetzungen von Teil (b) reduziert sich der Ausdruck für $\delta \mathcal{F}_\Omega(u,\varphi)$ aus Theorem 5.2 anhand von $L_F(u) \equiv 0$ auf $\overline{\Omega}$ zu:

$$0 = \delta \mathcal{F}_\Omega(u,\varphi) = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left\langle \begin{pmatrix} F_{p_{j1}} \\ \vdots \\ F_{p_{jm}} \end{pmatrix}(x,u,Du), \nu(x) \right\rangle \varphi_j \, dA$$

In einer Übungsaufgabe zeige man nun, daß für jeden fixierten Punkt $x^* \in \partial\Omega$ eine Kartenüberdeckung von $\partial\Omega$, eine untergeordnete Zerlegung der Eins und eine bestimmte Spezialisierung der Testfunktionskomponenten $\varphi_k \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $k = 1, \dots, n$, gewählt werden kann, sodaß wiederum aus Lemma 5.1 insbesondere die behaupteten Gleichungen (NRB) sukzessive für $k = 1, \dots, n$ in x^* folgen. $\square$

<u>Theorem 5.4</u>: Sei $F \in C^1(\mathcal{U})$ eine Lagrange-Fkt.

i) Ist $u \in \mathcal{M}$ ein lokaler Mini- oder Maximierer von $\mathcal{F}_\Omega$, d. h. gilt entweder

$\mathcal{F}_\Omega(u) \leq \mathcal{F}_\Omega(v)$ oder $\mathcal{F}_\Omega(u) \geq \mathcal{F}_\Omega(v)$, $\forall v \in \mathcal{M}$ mit $v|_{\partial\Omega} \equiv u|_{\partial\Omega}$ und $\|u-v\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta$ für ein $\delta > 0$,

so folgt $\delta \mathcal{F}_\Omega(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$, also daß u eine schwache äußere $\mathcal{F}_\Omega$-Extremale ist.

ii) Erfüllt $u \in \mathcal{M}$ sogar $\mathcal{F}_\Omega(u) \leq$ bzw. $\geq \mathcal{F}_\Omega(v)$ $\forall v \in \mathcal{M}$ ohne Randbedingung und $\|u-v\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta$,

so folgt $\delta \mathcal{F}_\Omega(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$,

sodaß ein solches u im Falle $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}$ und $F_{p_{j\alpha}} \in C^1(\mathcal{U})$ sowohl die (ELG) auf Ω als auch die (NRB) auf $\partial\Omega$ aus Theorem 5.3 löst.

<u>Beweis</u>: (i) Genau wie im Bew. von Th. 1.4 betrachtet

man $\Phi(\epsilon) := \mathcal{F}_\Omega(u+\epsilon\varphi)$ für ein $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

und erhält wegen $(u+\epsilon\varphi)|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ aus der

Voraussetzung: $\Phi(0) = \mathcal{F}_\Omega(u) \leq \mathcal{F}_\Omega(u+\epsilon\varphi) = \Phi(\epsilon)$

oder $\Phi(0) \geq \Phi(\epsilon)$, für $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$,

und somit $0 = \Phi'(0) \equiv \delta\mathcal{F}_\Omega(u,\varphi)$. ✓

(ii) Analog folgt $\delta\mathcal{F}_\Omega(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$,

falls $\mathcal{F}_\Omega(u) \leq$ bzw. $\geq \mathcal{F}_\Omega(v) \quad \forall v \in \mathcal{M}, \|u-v\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \delta$,

vorausgesetzt wird, sodaß die zweite Beh.

von Th. 5.4 (ii) sofort aus Theorem 5.3 (b) folgt. $\square$

Beispiel $\boxed{1}$: $F(x,z,p) := \frac{1}{2}|p|^2 + f(x)z$; $n=1, m \in \mathbb{N}$

für eine beliebige Funktion $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

$\Rightarrow \mathcal{F}(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 + f(x)u \, dx$ besitzt

wegen $F_{p_{1\alpha}}(x,z,p) = p_{1\alpha}$ und $F_z(x,z,p) = f(x)$

die (ELG): $\underbrace{\operatorname{div}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x^1}\\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x)}_{=\Delta u(x)} \overset{!}{=} f(x)$ auf $\overline{\Omega}$ (P)

also die „Poisson-Gleich."

Und die (NRB): $\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x^1}\\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x), \nu(x) \right\rangle}_{=\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)} \overset{!}{\equiv} 0$ auf $\partial\Omega$ (N)

„die Neumann-Randbedingung".

Aus dem Hopfschen Maximum-Prinzip, sowie aus dem Hopfschen Randpunkt-Lemma folgt leicht, daß es bis auf eine additive Konstante höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ von „(P) und (N)" gibt.

Bereits für $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1]$, kann man aus einer Kombination des Perronschen Existenz-verfahrens für harmonische Funktionen, der Schauderschen $C^{2,\alpha}$-apriori-Abschätzungen und der Kontinuitätsmethode auch die Existenz einer Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ von „(P) und $u|_{\partial\Omega} \equiv \tau$" für ein gegebenes $\tau \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ nachweisen, falls $\partial\Omega$ aus C^3 ist.

$\boxed{2}$ Sei $\Omega := \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}$ für ein Gebiet $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten (x^1, x^2, x^3, t). Wir betrachten

$$F(z, \underbrace{(p_{11}\, p_{12}\, p_{13}\, p_{14})}_{=p}) := \frac{1}{2}\left(p_{11}^2 + p_{12}^2 + p_{13}^2 - \frac{p_{14}^2}{c^2} + \overset{\text{Masse } \overline{m}}{\overline{m}^2} z^2 \right)$$

für $z \in \mathbb{R}$, also $n = 1$, $m = 4$.

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) = \int_{\tilde{\Omega}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left(|\nabla_x u|^2 - \frac{1}{c^2}|u_t|^2 + \overline{m}^2 u^2 \right) dt\, dx$$

besitzt also wegen $\left(F_{p_{1\alpha}}\right)_{\alpha=1,\dots,4} = \left(p_{11}\; p_{12}\; p_{13}\; -\frac{p_{14}}{c^2}\right)$

und $F_z = \overline{m}^2 z$ die

$$(\text{ELG}): \underbrace{\Delta_x u - \frac{1}{c^2} u_{tt}}_{=: -\Box u} \equiv \operatorname{div}_{(x,t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x^3} \\ -\frac{u_t}{c^2} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \overline{m}^2 u \quad (\text{KG})$$

auf $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}$,

welches die „Klein-Gordon"-Gleichung

für ein ungeladenes Elementar-Teilchen der Masse $\overline{m}>0$ in der Quanten-Feldtheorie ist und deren Lösungen die Amplituden von Wellen am Ort $x \in \tilde{\Omega}$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ angeben, welche als Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Existenz des Elementarteilchens am Ort x zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Für $F((x,t),z,p) = \frac{1}{2}\left(p_{11}^2 + p_{12}^2 + p_{13}^2 - \frac{p_{14}^2}{c^2}\right) + 4\pi\,\varsigma(x,t)z$ erhalten wir hingegen die (ELG):

$-\Box u \overset{!}{=} 4\pi\varsigma$ auf $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$, deren Lösung u das elektrische Potential (also $-\nabla_x u = \vec{E} + \frac{\dot{\vec{A}}}{c}$) für das elektr. Feld $\vec{E}$ einer vorgegebenen Ladungsverteilung $\varsigma(x,t)$ ist und explizit durch $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varsigma\left(\tilde{x}, t-\frac{|\tilde{x}-x|}{c}\right)}{|\tilde{x}-x|}\,d\tilde{x}$

für konkrete Ladungsverteilungen $\varsigma : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(z.B. $\varrho(x,t) := \delta(x - R(t))$) berechnet und mit den Ergebnissen der Experimentalphysik verglichen werden kann.

$\boxed{3}$ Sei $n=1$, $m \in \mathbb{N}$ und $F(z,(p_{11} - p_{1m}),x)$

$$:= \sqrt{1 + p_{11}^2 + \ldots + p_{1m}^2} + m\,\mathcal{H}(x)\,z$$

für eine vorgegeb. Fkt. $\mathcal{H} \in C^1(\overline{\Omega})$, also

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2 \cancel{(x)}} + m\,\mathcal{H}(x)\,u(x)\,dx.$$

Wegen $\left(F_{p_{1\alpha}}\right)_{\alpha=1,\ldots,m}(x,z,p) = \frac{1}{(1+|p|^2)^{1/2}}(p_{11} \cdots p_{1m})$ und

$F_z(x,z,p) = m\,\mathcal{H}(x)$ erhalten wir die

$$(\mathrm{ELG}): \operatorname{div}_x\left(\frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}\right)\cancel{(x)} \overset{!}{=} m\,\mathcal{H}(x) \text{ auf } \overline{\Omega} \quad (\mathrm{MK})$$

Da andererseits $\overset{\shortparallel}{m \cdot}$ (mittlere Krümmung) des Graphen $\{(\tilde{x}, u(\tilde{x})) \mid \tilde{x} \in \overline{\Omega}\}$ im Flächenpkt. $(x, u(x))$ misst, sind die $C^2(\overline{\Omega})$-Lösungen u von (MK) gerade diejenigen C^2-Funktionen, deren Graphen über $\overline{\Omega}$ die punktweise vorgegebene mittlere

Krümmung $H_{Gr(u)}(x, u(x)) \overset{!}{=} \mathcal{H}(x)$ besitzen!

Die (NRB) lauten:

$$\frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}} \langle \nabla u, \nu \rangle \equiv 0 \text{ entlang } \partial\Omega .$$

Die m Tangentialvektoren an den Graphen von u lauten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \\ u_{x^1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ | \\ 0 \\ u_{x^2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ u_{x^m} \end{pmatrix}$. Somit erweist sich gerade $n_u(x) := \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} u_{x^1} \\ | \\ u_{x^m} \\ -1 \end{pmatrix}(x)$ als ein Einheits-Normalfeld an den Graphen von u.

Da außerdem $\tilde{\nu}(x) := (\nu, 0)(x)$ das nach Außen weisende Einheits-Normalenfeld an $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ ist, fordern also die obigen (NRB) gerade, daß ihre Lösungen u $\langle n_u, \tilde{\nu} \rangle \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ lösen, also daß deren Graphen den Zylinder-

mantel $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ senkrecht berühren bzw. schneiden.
(Man siehe hierzu die Skizze auf S. 12 von §0)

$\boxed{4}$ Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig und $(g_{ik}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, Sym_n^+)$ die Koeffizientenmatrix einer „Riemannschen Metrik" $g_z : T_z\mathbb{R}^n \otimes T_z\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf dem Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n$ eines $\mathbb{R}^n$, so misst das Funktional $D_g(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega g_{ik}(u)\, D_\beta u^i D_\beta u^k dx$ die „Energie" einer „Fläche" $u \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}^n)$, wobei hier über $i, k = 1, \ldots, n$ und $\beta = 1, \ldots, m$ summiert werde! (Einstein).

In ÜA 16 sind zu berechnen aus

$$F_g(z, p) := \frac{1}{2}\, g_{ik}(z)\, p_{i\beta}\, p_{k\beta} :$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} F_g(z, p) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_j} g_{ik}(z)\, p_{i\beta}\, p_{k\beta}\,, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{j\alpha}} F_g(z, p) = g_{jk}(z)\, p_{k\alpha}\,,$$ woraus sich die

(ELG): $g_{jk}(u)\,\Delta u^k \overset{!}{=} -\Gamma_{ijk}(u)\, D_\beta u^i D_\beta u^k$

für $j=1,\dots,n$ auf $\overline{\Omega}$,

mit $\Gamma_{ijk}(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial z_j} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial z_k} g_{ij}\right)(z)$

und die (NRB): $g_{jk}(u)\frac{\partial u^k}{\partial \nu} \overset{!}{=} 0$ auf $\partial\Omega$ ergeben,

also da $g_{jk}(u(x)) \in \mathrm{Sym}_n^+$ insbes. invertierbar

ist: $Du \cdot \nu = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \nu} \\ \vdots \\ \frac{\partial u^n}{\partial \nu} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$ auf $\partial\Omega$, also (N) für $u^1,\dots,u^n$ aus Bsp. $\boxed{\text{II}}$.

Für den speziellen Fall $(g_{ik}(z)) \equiv (g_{ik}) \in \mathrm{Sym}_n^+$

reduzieren sich diese beiden Gleich.-Systeme

zu: $\Delta u^j \underset{\text{auf } \overline{\Omega}}{\equiv} 0$ und $\frac{\partial u^j}{\partial \nu} \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ für $j=1,\dots,n$,

sodaß jede Lösung u der (ELG) und der (NRB) zu $\mathcal{D}_g$ (bei $g_z \equiv g$) bereits ein konstanter Vektor im $\mathbb{R}^n$ anhand des Hopfschen

Maximum-Prinzips und Randpunkt-Lemmas sein muß! $\square$

Wir kommen nun zur Berechnung der <u>inneren Variation</u> eines Variationsfunktionals $\mathcal{F}_\Omega$:

Wir fixieren hierzu ein Gebiet $\Omega \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^m$, ein $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und ein Vektorfeld $\lambda \in C^1(\Omega_0, \mathbb{R}^m)$ und betrachten die C^1-Diffeomorphismen-Schar $\Phi_\varepsilon : \overline{\Omega} \xrightarrow{\cong} \overline{\Omega^*_\varepsilon} := \Phi_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset\subset \Omega_0$ defin. durch:

$$\Phi_\varepsilon(x) := x - \varepsilon\lambda(x), \text{ für } |\varepsilon| < \varepsilon_0 \ll 1 \text{ hinr. klein,}$$

sowie $\Psi_\varepsilon := \Phi_\varepsilon^{-1} : \overline{\Omega^*_\varepsilon} \xrightarrow{\cong} \overline{\Omega}$ deren inverse Schar mit der Taylor-Entwicklung

$$\Psi_\varepsilon(y) = y + \varepsilon\lambda(y) + O(\varepsilon^2), \text{ für } y \in \Omega_0, |\varepsilon| \to 0.$$

Für die innere Variation

$$\partial\mathcal{F}_\Omega(u,\lambda) := \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega^*_\varepsilon} F\big(y, u\circ\Psi_\varepsilon, D_y(u\circ\Psi_\varepsilon)\big)\,dy$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int_\Omega F\big(\Phi_\varepsilon(x), u(x), D_x u(x)\cdot D_y\Psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))\big) \det D_x\Phi_\varepsilon \, dx$$

gilt:

Theorem 5.5:

Seien $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\lambda \in C^1(\Omega_0, \mathbb{R}^m)$ für ein $\Omega_0 \supset \Omega$ und $F \in C^1(\mathcal{U})$ eine Lagrange-Funktion, so gilt:

$$\partial \mathcal{F}_\Omega(u, \lambda) = \int_\Omega F_{p_{j\beta}}(x, u(x), Du(x)) \cdot (u_j)_{x^\alpha} (\lambda^\alpha)_{x^\beta}(x)$$

$$- F_{x^\alpha}(x, u(x), Du(x)) \cdot \lambda^\alpha(x)$$

(Einstein!) $\qquad - F(x, u(x), Du(x)) \operatorname{div}_x \lambda \, dx.$

Beweis:

Aus $\Psi_\varepsilon(y) = y + \varepsilon \lambda(y) + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, $y \in \Omega_0$

$$\Rightarrow D_y \Psi_\varepsilon(y) = 1_m + \varepsilon D_y \lambda(y) + O(\varepsilon^2) \quad \text{— " —}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon} D_y \Psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x)) = D_y \lambda(\Phi_\varepsilon(x)) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(D_y \lambda(\Phi_\varepsilon(x))) + O(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon} D_y \Psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))\Big|_{\varepsilon=0} = D_x \lambda(x), \text{ da } \Phi_0(x) = x.$$

Desweiteren folgt aus $\Phi_\varepsilon(x) = x - \varepsilon \lambda(x)$:

$\det D\Phi_\varepsilon(x) = \det(1_m - \varepsilon D_x \lambda(x))$, also mit der

Multi-Linearität von det und $D_x\lambda = \left(\lambda_{x^1}, \lambda_{x^2}, \ldots, \lambda_{x^m}\right)$

$$= \det(1_m) - \varepsilon\left(\det\begin{pmatrix} \lambda_{x^1} & \begin{matrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{matrix}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix} & \lambda_{x^2} & \begin{matrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\1\end{matrix}\end{pmatrix} + \cdots + \det\begin{pmatrix} \begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{matrix} & \lambda_{x^m}\end{pmatrix}\right) + O(\varepsilon^2).$$

Entwickeln wir die α-te dieser Determinanten gerade nach der α-ten Zeile (oder Spalte), für jedes $\alpha = 1, \ldots, m$, so erhalten wir jeweils aus dem Laplace-Entw.-Satz:

$$= \det(1_m) - \varepsilon\Big(\underbrace{\lambda^1_{x^1} + \lambda^2_{x^2} + \cdots + \lambda^m_{x^m}}_{=\,\mathrm{div}_x\lambda}\Big) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\det D\Phi_\varepsilon(x)\Big|_{\varepsilon=0} = -\,\mathrm{div}_x\lambda\,.$$

Beachten wir noch $\dfrac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial\varepsilon}(x) = -\lambda(x)$, so folgt:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,F\big(\Phi_\varepsilon(x), u(x), D_x u(x)\cdot D_y\Psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))\big)\det D_x\Phi_\varepsilon(x)\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \Big(\Big\langle \nabla_x F(x,u(x),Du(x)), -\lambda(x) \Big\rangle$$

$$+ D_p F(x,u(x),Du(x)) \cdot D_x u(x) \cdot D_x \lambda(x) \Big) \cdot \overbrace{\det D_x \Phi_0(x)}^{=1}$$

$$+ F(x,u(x),Du(x)) \big(-\operatorname{div}_x \lambda(x) \big)$$

also $= \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{m} \Big[- F_{x^\alpha}(x,u(x),Du(x)) \cdot \lambda^\alpha(x) + F_{p_{j\beta}}(x,u,Du) (u_j)_{x^\alpha} \lambda^\alpha_{x^\beta}$

$$- F(x,u(x),Du(x)) \operatorname{div}_x \lambda(x) .$$

Somit liefert der Satz über die Differenzierbarkeit einer von einem Parameter ε abhängigen Schar von Integralen über Ω, da $F \in C^1(\mathcal{U})$, u_j, $\lambda^\alpha \in C^1(\overline{\Omega})$:

$$\partial \mathcal{F}_\Omega(u,\lambda) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int_\Omega F\big(\Phi_\varepsilon(x), u(x), D_x u(x) \cdot D_y \Psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))\big) \cdot \det D_x \Phi_\varepsilon(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega - F_{x^\alpha}(x,u(x),Du(x)) \cdot \lambda^\alpha(x)$$

$$+ F_{p_{j\beta}}(x,u(x),Du(x)) \cdot (u_j)_{x^\alpha}(x) \lambda^\alpha_{x^\beta}(x)$$

$$- F(x,u(x),Du(x)) \operatorname{div}_x \lambda(x)\, dx \qquad \square$$

⇒ Theorem 5.6 : Seien F und $F_{p_{j\beta}} \in C^1(\mathcal{U})$ und $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

i) Falls u die Gleichung $\partial \mathcal{F}_\Omega(u, \lambda) = 0$ nur für jedes $\lambda \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$ erfüllt, so löst es bereits die „Noether-Gleichungen" (NG):

$$D_\beta\Big(F_{p_{j\beta}}(x, u(x), Du(x))(u_j)_{x^\alpha}(x) - \delta_{\alpha\beta}\, F(x, u(x), Du(x))\Big) + F_{x^\alpha}(x, u(x), Du(x)) \equiv 0 \text{ auf } \overline{\Omega}$$

für $\alpha = 1, \ldots, n$.

ii) Falls u sogar $\partial \mathcal{F}_\Omega(u, \lambda) = 0 \;\; \forall \lambda \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ erfüllt, so löst es nicht nur die (NG) auf $\overline{\Omega}$, sondern außerdem noch „Noether-Randbedingungen" (NoRB):

$$\Big[F_{p_{j\beta}}(x, u(x), Du(x))\,(u_j)_{x^\alpha}(x) - \delta_{\alpha\beta}\, F(x, u(x), Du(x))\Big] \cdot \nu^\beta(x) = 0$$

für $\alpha = 1, \ldots, n$ und jedes $x \in \partial\Omega$.

Beweis: Wie im Beweis von Theorem 5.2 erhalten wir zunächst mittels partieller Integration:

$$\partial \mathcal{F}_\Omega(u,\lambda) = \int_\Omega \Big[- F_{x^\alpha}(x,u,Du) - D_\beta\big(F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)(u_j)_{x^\alpha}(x)\big) + D_\beta F(x,u,Du)\ \delta_{\alpha\beta} \Big] \lambda^\alpha(x)\, dx \tag{$*$}$$
$$+ \int_{\partial\Omega} F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)\cdot(u_j)_{x^\alpha}(x)\, \lambda^\alpha(x)\, \nu^\beta(x) - F(x,u(x),Du(x))\ \delta_{\alpha\beta}\, \lambda^\alpha(x)\, \nu^\beta(x)\, dA,$$

wobei wir $\operatorname{div}_x \lambda = \delta_{\alpha\beta}\, \lambda^\alpha_{x^\beta}$ verwandten.

Wissen wir also $\partial \mathcal{F}_\Omega(u,\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in C^1_c(\Omega,\mathbb{R}^m)$, so erhalten wir in der Tat die (NG)'s für jedes $\alpha = 1,\dots,m$ aus Lemma 5.1, dem FLdVR, auf Ω und damit auf $\overline{\Omega}$. i) ✓

Setzen wir hingegen sogar $\partial \mathcal{F}_\Omega(u,\lambda) = 0$ $\forall \lambda \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ voraus, so liefern eben diese (NG) für u zusammen mit $(*)$:

$$0 = \int_{\partial\Omega} \Big[F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)\cdot (u_j)_{x^\alpha}(x)\, \nu^\beta(x) - F(x,u(x),Du(x))\,\delta_{\alpha\beta}\, \nu^\beta(x) \Big] \lambda^\alpha(x)\, dA,$$

insbesondere für jedes $\lambda \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Wie im Beweis von Theorem 5.3(b) bzw. in ÜA 15 folgen somit in der Tat die (NoRB)'s auf $\partial\Omega$ aus dem FLdVR, für jedes $\alpha = 1, \dots, m$. □

Beispiel $\boxed{5}$: Für $m = 2$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, betrachten wir $\mathcal{D}_g(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega g_{ik}(u(x))\, (u_i)_{x^\beta} (u_k)_{x^\beta}\, dx$

für einen Riemannschen Tensor $(g_{ik}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R}))$.

Die entsprechende Lagrange-Funktion lautet also

$F(z,p) := \frac{1}{2}\, g_{ik}(z)\, p_{i\beta}\, p_{k\beta}$ und somit

$F_{p_{j\beta}}(z,p) = g_{jk}(z)\, p_{k\beta}$. Aus Theorem 5.5 folgt nun:

$$\partial \mathcal{D}_g(u,\lambda) = \int_\Omega g_{jk}(u)\, (u_k)_{x^\beta} (u_j)_{x^\alpha} (\lambda^\alpha)_{x^\beta} - \frac{1}{2}\, g_{ik}(u) (u_i)_{x^\beta} (u_k)_{x^\beta} \left(\lambda^1_{x^1} + \lambda^2_{x^2}\right) dx$$

$$= \int_\Omega g_{jk}(u)(u_j)_{x^1}(u_k)_{x^1}\left(\lambda^1_{x^1} - \frac{1}{2}\left(\lambda^1_{x^1} + \lambda^2_{x^2}\right)\right)$$

$$+ g_{jk}(u)(u_j)_{x^2}(u_k)_{x^2}\left(\lambda^2_{x^2} - \frac{1}{2}\left(\lambda^1_{x^1} + \lambda^2_{x^2}\right)\right)$$

$$+ g_{jk}(u)(u_j)_{x^1}(u_k)_{x^2}\left(\lambda^1_{x^2} + \lambda^2_{x^1}\right)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega a_g\left(\lambda^1_{x^1} - \lambda^2_{x^2}\right) + b_g\left(\lambda^1_{x^2} + \lambda^2_{x^1}\right) dx$$

mit $a_g := g_{jk}(u)(u_j)_{x^1}(u_k)_{x^1} - g_{jk}(u)(u_j)_{x^2}(u_k)_{x^2}$

und $b_g := 2 g_{jk}(u)(u_j)_{x^1}(u_k)_{x^2}$.

Hieraus erhalten wir:

<u>Korollar 5.7</u>: Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit C^3-Rand. Ist $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ eine innere Extremale des verallgemeinerten Dirichlet-Integrals D_g, erfüllt also $\partial D_g(u, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, so ist u „konform parametrisiert bzgl. g" auf $\overline{\Omega}$, erfüllt also $a_g \equiv 0$ und $b_g \equiv 0$ auf $\overline{\Omega}$.

Im euklidischen Spezialfall $g_{ik} \equiv \delta_{ik}$ bedeuten diese Gleichungen einfach: $|u_{x^1}| = |u_{x^2}|$ und

$$\langle u_{x^1}, u_{x^2} \rangle \equiv 0 \text{ auf } \overline{\Omega}.$$

<u>Beweis</u>: Wir wählen zwei Funktionen ϱ, σ aus $C_c^\infty(\Omega)$ und verwenden die bereits in Beispiel $\boxed{1}$ erwähnte Konstruierbarkeit zweier Funktionen $h, k \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ (mit $h|_{\partial\Omega} \equiv 0 \equiv k|_{\partial\Omega}$), welche $\Delta h = \varrho$ und $\Delta k = \sigma$ auf $\overline{\Omega}$ lösen. Wählen wir nun gerade

$$\hat{\lambda} := \begin{pmatrix} h_{x^1} + k_{x^2} \\ -h_{x^2} + k_{x^1} \end{pmatrix}$$

als „Test-Vektorfeld" in

$$0 \overset{!}{=} \partial D_g(u, \lambda) \quad \forall \lambda \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2),$$

so erhalten wir aus Bsp. $\boxed{5}$ und aus

$$(\hat{\lambda}^1)_{x^1} - (\hat{\lambda}^2)_{x^2} = \Delta h = \varrho \text{ und } (\hat{\lambda}^1)_{x^2} + (\hat{\lambda}^2)_{x^1} = \Delta k = \sigma:$$

$$0 = \int_\Omega a_g \varrho + b_g \sigma \, dx \quad \forall \varrho, \sigma \in C_c^\infty(\Omega).$$

Somit folgt die Beh. von Kor. 5.7 in der Tat aus Lemma 5.1, dem FLdVR. $\square$

Erfüllt also ein $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ sowohl $\delta \mathcal{D}_g(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$ als auch $\partial \mathcal{D}_g(u, \lambda) = 0 \; \forall \lambda \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ für einen konstanten Riemannschen Tensor $(g_{ik}) \in \mathrm{Sym}^+_n(\mathbb{R})$, so ist u anhand von ÜA 16 und Kor. 5.7 eine „Minimal-Fläche" bzgl. g, d.h. löst $\Delta u \equiv 0$ und $a_g \equiv 0 \equiv b_g$ auf $\overline{\Omega}$.

<u>Korollar 5.8</u>: Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ ein beliebiges Gebiet. Ist $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $\partial \mathcal{D}_g(u, \lambda) = 0$ nur für jedes $\lambda \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^2)$, so erweist sich zumindest die Funktion $f_g(z) := a_g(z) - i\, b_g(z)$, $z := x^1 + i x^2$, als

holomorph in Ω (und nicht $\equiv 0$ wie in Kor. 5.7).

Beweis: Aus Beispiel $\boxed{5}$ und mittels partieller Integration erhalten wir sofort:

$$0 \overset{!}{=} \int_\Omega \left((a_g)_{x^1} + (b_g)_{x^2}\right)(-\lambda^1) + \left((a_g)_{x^2} - (b_g)_{x^1}\right)\lambda^2 \, dx$$

$\forall \lambda^1, \lambda^2 \in C_c^\infty(\Omega)$, sodaß wir aus Lemma 5.1 die Cauchy-Riemannschen Diff.-Gleichungen für $f_g := a_g - i\, b_g$ auf Ω und somit den Beweis der Behauptung erhalten. □

In der Tat gibt es einen sehr simplen Zusammenhang zwischen den (ELG) und den (NG):

Lemma 5.9

Sei $u \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $F, F_{p_{j\alpha}} \in C^1(\mathcal{U})$, dann gilt $\partial \mathcal{F}_\Omega(u, \lambda) = \int_\Omega L_F^j(u) \cdot (u_j)_{x^\alpha} \lambda^\alpha \, dx$ zumindest für jedes $\lambda \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Aus Theorem 5.5 erhalten wir mittels partieller Integration für $\lambda \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$:

$$\partial \mathfrak{F}_\Omega(u,\lambda) = \int_\Omega - F_{x^\alpha}(x,u,Du)\lambda^\alpha(x) - F(x,u,Du)\lambda^\alpha_{x^\alpha}(x) + F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)(u_j)_{x^\alpha}(\lambda^\alpha)_{x^\beta}(x)\,dx$$

$$= \int_\Omega - \Big[F_{x^\alpha}(x,u,Du) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\big(F(x,u,Du)\big) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\big(F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)(u_j)_{x^\alpha}\big)\Big]\lambda^\alpha(x)\,dx$$

Wegen $-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\big(F(x,u,Du)\big) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\big(F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)(u_j)_{x^\alpha}\big)$

$$= - F_{x^\alpha}(x,u,Du) - F_{z_j}(x,u,Du)(u_j)_{x^\alpha} - F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)\big((u_j)_{x^\beta}\big)_{x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\big(F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)\big)(u_j)_{x^\alpha} + F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)(u_j)_{x^\alpha x^\beta}$$

$$= - F_{x^\alpha}(x,u,Du) \underbrace{- F_{z_j}(x,u,Du)(u_j)_{x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\big(F_{p_{j\beta}}(x,u,Du)\big)(u_j)_{x^\alpha}}_{= -L^j_F(u)\cdot(u_j)_{x^\alpha}}$$

erhalten wir also in der Tat:

$$\partial \mathcal{F}_{\Omega}(u, \lambda) = \int_{\Omega} L_F^j(u) \cdot (u_j)_{x^\alpha} \lambda^\alpha(x)\, dx \qquad \text{II}$$

Kombinieren wir diese Gleichung mit Gleichung (*) aus dem Beweis von Theorem 5.6 (i) und dem FLdVR, so erhalten wir sofort:

<u>Korollar 5.10</u>

Ist $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $F, F_{p_\alpha^j} \in C^1(U)$, so gilt für dieses die Beziehung:

$$D_\beta\left(F(x, u, Du)\, \delta_{\alpha\beta} - F_{p_\beta^j}(x, u, Du)(u_j)_{x^\alpha}\right) - F_{x^\alpha}(x, u, Du) = \left[F_{z_j}(x, u, Du) - D_\beta\left(F_{p_\beta^j}(x, u, Du)\right)\right](u_j)_{x^\alpha}$$

$$\equiv L_F^j(u)(u_j)_{x^\alpha} \quad \text{auf } \Omega,$$

$$\equiv \langle L_F(u), u_{x^\alpha} \rangle \quad \text{für } \alpha = 1, \ldots, m.$$

Solch ein u löst somit die (NG)'s auf Ω genau dann, wenn dessen Eulersches Vektorfeld $L_F(u)$ ~~(x)~~ auf dem „Tangentialraum" an Bild (u):

$T_{u(x)} \mathrm{Bild}(u) := \mathrm{Span}\{u_{x^1}(x), u_{x^2}(x), \dots, u_{x^m}(x)\} \subset \mathbb{R}^n$
zu jedem $x \in \Omega$ senkrecht steht, also falls $L_F(u)$ ein Normalenfeld an die „Fläche" Bild(u) ist. Insbesondere löst jede starke äußere F-Extremale die $(NG)'_S$ auf Ω