§6 Existenz globaler Minimierer in Sobolev-Randwertklassen:

Wie in §5 bezeichne Ω stets ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^m$, für ein $m \geq 1$.

Definition 6.1

i) Für $p \in (1, \infty)$ definieren wir den Sobolevraum

$$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) := \Big\{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \,\Big|\, \exists\, u^{(\alpha)} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \int_\Omega \langle u, D_\alpha \varphi \rangle \, dx = -\int_\Omega \langle u^{(\alpha)}, \varphi \rangle \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ und jedes } \alpha \in \{1, \dots, m\} \Big\}$$

und nennen $D_\alpha u := u^{(\alpha)}$ die **schwache partielle Ableitung** von u nach x^α. Ausgestattet mit der Norm $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p + \sum_{\alpha=1}^m |D_\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}$ wird $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein **vollständiger**, normierter Raum, also ein „Banach-Raum".

ii) Desweiteren sei

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) := \{ u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) \mid \exists \{v_j\} \subset C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n) \text{ mit } v_j \to u \text{ in } W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) \}$$

der Banach-Teilraum von $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ der Sobolev-Funktionen mit „Null-Randwerten".

iii) Zu einer vorgegebenen Sobolev-Funktion $f \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ bezeichne

$$W_f^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) := \{ u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) \mid u - f \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) \}$$

den Banach-Teilraum von $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ aller Sobolev-Funktionen mit „vorgegebenen Randwerten f" auf $\partial\Omega$. $\square$

<u>Bemerkung</u>: Im Spezialfall $p = 2$ wird durch

$$\langle f, g \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} := \int_\Omega \langle f, g \rangle(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} \langle D_\alpha f, D_\alpha g \rangle$$

ein Skalarprodukt auf $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ erklärt, welches gerade $(\langle f,f\rangle_{W^{1,2}(\Omega)})^{1/2} = \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ aus Definition 6.1 (i) erfüllt, also eine Norm auf $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ induziert, welche diesen Raum vollständig werden läßt, und somit $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ zu einem „Hilbert-Raum" macht.

<u>Definition 6.2</u>

Sei X ein beliebiger normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

i) Wir bezeichnen mit X^* den „Dualraum"

$$X^* := \{ L : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear} \mid \exists C_L \geq 0, \text{ sodaß } |L(x)| \leq C_L \|x\|, \forall x \}$$

aller beschränkter, linearer Funktionale auf X.

ii) Wir nennen eine Folge $\{x_j\} \subset X$ „schwach konvergent" gegen ein $x_0 \in X$, falls $L(x_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} L(x_0)$ in $\mathbb{R}$ für jedes $L \in X^*$ gilt und schreiben hierfür „$x_j \rightharpoonup x_0$ in X".

Riesz'scher Darstellungssatz:

Ist H ein beliebiger Hilbert-Raum (über $\mathbb{R}$) mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so gibt es zu jedem $L \in H^*$ genau ein $v \in H$ mit $L = \langle\cdot, v\rangle$. □

Somit bedeutet also „$u_j \xrightarrow[W^{1,2}]{} u$" gerade:

$$\langle u_j, v\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} \xrightarrow[j\to\infty]{} \langle u, v\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

Lemma 6.1 (Trennungssatz):

Sei X ein beliebiger normierter Raum (über $\mathbb{R}$) und $M \subset X$ abgeschlossen und konvex, und sei $x_0 \in X \setminus M$. Dann existiert ein $L \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodaß $L(x) \leq \alpha \;\; \forall x \in M$ und

$L(x_0) > \alpha$ erfüllt ist,

sodaß also der (affin) lineare Unterraum

$U_L := \{x \in X \mid L(x) = \alpha\}$ die konvexe Menge M

von $x_0 \in X \setminus M$ „trennt".

Beweis: Man sehe „Funktional-Analysis" von H.W. Alt, 3. Aufl., Satz 6.11 auf S.221 $\square$

Korollar 6.2

Sei $M \subset X$ wie in Lemma 6.1, also M abgeschlossen und konvex in X, dann ist M bereits „schwach (folgen-) abgeschlossen", d. h. falls es für eine Folge $\{x_k\} \subset M$ ein $x_0 \in X$ mit $L(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} L(x_0)$ $\forall L \in X^*$ gibt, so muß bereits $x_0 \in M$ gelten.

Beweis: Angenommen, es gälte $x_0 \in X \setminus M$, so folgte aus Lemma 6.1 die Existenz eines lin. Funktionals $L \in X^*$ und eines $\alpha \in \mathbb{R}$

mit $L(x_k) \leq \alpha$ und $L(x_0) > \alpha$.

$$\downarrow$$

$L(x_0)$ also $\leq \alpha$, Widerspruch. $\square$

Korollar 6.3 (Lemma von Mazur)

Sei $\{x_k\}$ eine Teilfolge eines normierten Raumes X, die „schwach gegen ein $x_0 \in X$ konvergiere", also $L(x_k) \to L(x_0)$ $\forall L \in X^*$ erfülle. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, sodaß die Konvexkombination $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$: $\|x_0 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\|_X < \varepsilon$ erfüllt.

Beweis: Die konvexe Hülle

$$M := \left\{ x \in X \,\middle|\, x = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \beta_j x_{k(j)},\ \beta_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \beta_j = 1 \text{ für ein } \tilde{N} \in \mathbb{N} \right\}$$ der

Folge $\{x_k\}$ ist konvex und somit auch deren Abschluß $\overline{M}$. Nach Kor. 6.2 folgt daher $x_0 \in \overline{M}$, da $x_k \xrightarrow[X]{} x_0$ nach Voraussetzung. Dies ist aber gerade äquivalent zur Behaupt. $\square$

Da für beliebiges $f \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ die Sobolev-Randwertklasse $W_f^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ konvexe und abgeschlossene Teilmenge von $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ ist, gilt also nach Kor. 6.2:

<u>Korollar 6.4:</u>

Sei $\{u_j\} \subset W_f^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ eine Folge mit $u_j \xrightarrow[W^{1,p}]{} \overline{u}$ für ein $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, so gilt bereits $\overline{u} \in W_f^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, also $\overline{u} - f \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ $\square$

<u>Lemma 6.5:</u>

Sei $\{u_j\}$ eine beschränkte Folge eines

Hilbertraumes H mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$, also mit $\|u_j\|_H = (\langle u_j, u_j \rangle)^{1/2} \leq C$, für ein $C > 0$ und für alle j. Dann existiert eine Teilfolge $\{u_{\alpha k}\}$ und ein $\bar{u} \in H$ mit $u_{\alpha k} \xrightarrow[H]{} \bar{u}$, d.h.

$$\langle u_{\alpha k}, v \rangle_H \to \langle \bar{u}, v \rangle_H \quad \forall v \in H .$$

Beweis:

Da $\{\langle u_j, u_1 \rangle\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, können wir eine Teilfolge $\{u_{j_n}\}$ aus $\{u_j\}$ mit

$\langle u_{j_n}, u_1 \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} a_1$ für ein $a_1 \in \mathbb{R}$ auswählen.

Aus $\{u_{j_n}\}$ können wir wiederum eine Teilfolge $\{u_{j_{n_k}}\}$ mit $\langle u_{j_{n_k}}, u_2 \rangle \xrightarrow[k \to \infty]{} a_2$ für ein $a_2 \in \mathbb{R}$ auswählen.

Durch diesen Prozeß erhalten wir eine „Diagonal"-Teilfolge $\{u_{j_1}, u_{j_{n_2}}, u_{j_{n_{k_3}}}, \text{---}\}$ $=: \{u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, u_{\alpha_3}, \dots\}$, welche bereits

$\langle u_{\alpha_k}, u_j \rangle \longrightarrow a_j$ für $k \to \infty$ und jedes $j \in \mathbb{N}$ erfüllt. Somit können wir durch

$$L(w) := \lim_{k\to\infty} \langle u_{\alpha_k}, w \rangle \text{ für jedes } w \in \operatorname{Span}\{u_j\}$$

eine lineare Abbildung mit

$$|L(w)| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\| \|w\| \leq C \|w\|_H$$ definieren.

Da L durch C beschränkt, also insbesondere

$$|L(w_1) - L(w_2)| \leq C \|w_1 - w_2\|_H \quad \forall w_1, w_2 \in \operatorname{Span}\{u_j\}$$

erfüllt, kann L durch die Vorschrift

$$L(w^*) := \lim_{\substack{w_\ell \to w^* (\text{stark}) \text{ in } H \\ \cap \\ \operatorname{Span}\{u_j\}}} L(w_\ell)$$ eindeutig

auf den Abschluß $W := \overline{\operatorname{Span}\{u_j\}}$ linear und mit $\|L\| := \sup_{w \in W\setminus\{0\}} \frac{|L(w)|}{\|w\|_H} \leq C$ fortgesetzt werden. Da der abgeschlossene, lineare Unterraum $W \subset H$ wieder vollständig, also ein Hilbertraum bzgl. $\langle -,- \rangle_H$ ist, existiert nach dem Rieszschen Darstellungssatz genau ein $\omega_L \in W$ mit

$$L(w) = \langle w, \omega_L \rangle_H \quad \forall w \in W.$$

Nach Defin. von L erhalten wir somit:

$$\langle u_{\alpha_k}, w \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} L(w) = \langle w, \omega_L \rangle = \langle \omega_L, w \rangle \quad (*)$$
$$\forall w \in W, \text{ d.h.}$$

$$u_{\alpha_k} \xrightarrow[w]{} \omega_L \quad \text{für } k \to \infty.$$

Sei nun $u \in H$ beliebig gewählt. Anhand des Projektionssatzes existieren eindeutige Vektoren $w \in W$ und $w^\perp \in W^\perp$ mit

$$u = w + w^\perp. \text{ Da } W^\perp := \{h \in H \mid \langle h, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$$

und $W = \overline{\operatorname{Span}\{u_j\}}$ erhalten wir:

$$\langle u_{\alpha_k}, u \rangle = \langle u_{\alpha_k}, w \rangle + \underbrace{\langle u_{\alpha_k}, w^\perp \rangle}_{=0}$$

$$(*) \Rightarrow \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle \omega_L, w \rangle \underset{\omega_L \in W}{=} \langle \omega_L, w + w^\perp \rangle =$$
$$= \langle \omega_L, u \rangle, \ \forall u \in H.$$

Also $u_{\alpha k} \xrightarrow[H]{} w_L =: \bar{u}$ schwach in H. $\square$

Schließlich werden wir noch die Poincaré-Ungleichung gebrauchen:

Lemma 6.6 (Poincaré-Ungleichung)

Es existiert eine von Ω abhängige Konstante $C(\Omega) > 0$, welche

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \equiv \int_\Omega |u|^2 dx \leq C(\Omega) \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{m} |D_\alpha u|^2 dx$$

$\forall u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ermöglicht.

Beweis: Übungsaufgabe.

Lemma 6.7:

Sei X ein Banach-Raum und $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe und unterhalbstetige Funktion mit $I(x) \geq C > -\infty$ auf X, so ist I bereits unterhalbstetig bzgl. schwacher Konvergenz in X. D.h.: aus $L(x_k) \longrightarrow L(x_0)$ $\forall L \in X^*$

folgt bereits $\mathcal{I}(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{I}(x_k)$.

<u>Beweis</u>: Falls $L := \liminf_{k\to\infty} \mathcal{I}(x_k) = \infty$, ist die Behauptung korrekt. Da $L \geq C > -\infty$ gelten muß, existiert somit im Falle $L < \infty$ eine Teilfolge $\{x_{k_j}\}$ mit $\lim_{j\to\infty} \mathcal{I}(x_{k_j}) = L \in \mathbb{R}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. So muß ein $\tilde{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{I}(x_{k_j}) \leq L + \varepsilon \quad \forall j \geq \tilde{N}(\varepsilon)$ (*) existieren. Wegen $x_{k_j} \xrightarrow[X]{} x_0$ existiert eine weitere nat. Zahl $N(\varepsilon) > \tilde{N}(\varepsilon)$, sowie Koeffizienten $\alpha_{\tilde{N}}, \ldots, \alpha_N \geq 0$ mit $\sum_{j=\tilde{N}}^{N} \alpha_j = 1$, welche anhand von Kor. 6.3

$$\Big\| x_0 - \sum_{j=\tilde{N}}^{N} \alpha_j x_{k_j} \Big\|_X < \varepsilon \qquad (**)$$

erfüllen.

Zusammen mit der Konvexität von $\mathcal{I}$

und (*) sehen wir nun:

$$\mathcal{I}\Big(\sum_{j=\tilde{N}}^{N} \alpha_j x_{k_j}\Big) \leq \sum_{j=\tilde{N}}^{N} \alpha_j \underbrace{\mathcal{I}(x_{k_j})}_{\leq L+\varepsilon \text{ nach } (*)} \leq L+\varepsilon .$$

Zusammen mit der Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{I}$ und (**) erhalten wir außerdem: zu jedem $\delta>0$ $\exists\, \tilde{\varepsilon}>0$, sodaß $\mathcal{I}(x_0) \leq \mathcal{I}(x)+\delta$ für jedes $x\in X$ mit $\|x_0-x\|_X<\tilde{\varepsilon}$, also sodaß für $\varepsilon\leq\tilde{\varepsilon}$:

$$\mathcal{I}(x_0) \underset{(**)}{\leq} \mathcal{I}\Big(\sum_{j=\tilde{N}(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)} \alpha_j x_{k_j}\Big)+\delta \leq L+\varepsilon+\delta \underset{\text{für } \delta,\varepsilon \searrow 0}{\searrow} L \qquad \square$$

<u>Theorem 6.8</u> (Unterhalbstetigkeits-Satz)

Sei $f \in C^0(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{nm})$ mit der „Wachstums-
$\quad\;(x\;\;,\;z\;\;,\;p\;)$

bedingung": $\quad 0 \leq f(x,z,p) \leq C^*|p|^2$,

für eine Konstante $0<C^*<\infty$, eine bzgl. der Variablen $p\in\mathbb{R}^{nm}$ konvexe Lagrange-Funktion. Sind nun $\{u_j\}\subset L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und $\{\xi_j\}\subset L^2(\Omega,\mathbb{R}^{nm})$ Folgen mit

$u_j \to \bar{u}$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $\xi_j \to \bar{\xi}$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$

für L^2-Funktionen $\bar{u}, \bar{\xi}$, so gilt:

$$\mathcal{F}(\bar{u}, \bar{\xi}) := \int_\Omega f(x, \bar{u}(x), \bar{\xi}(x))\, dx$$

$$\leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f(x, u_j, \xi_j)\, dx \equiv \underline{\lim}_{j\to\infty} \mathcal{F}(u_j, \xi_j)$$

Insbesondere folgt im Spezialfall $\xi_j \equiv Du_j$:

Ist $\{u_j\} \subset W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ [$\partial\Omega$ eine C^1-Mfk.] eine Folge mit $u_j \xrightarrow[W^{1,2}]{} \bar{u}$ für ein $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so gilt für $\mathcal{F}(u) := \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx$:

$$\mathcal{F}(\bar{u}) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{F}(u_j).$$

<u>Beweis</u>: (Nach De Giorgi, 1968, aus „Direct Methods in Calc. Var.")

Da $f(x, z, p) \geq 0$ gilt und die Aussage im Falle $L := \liminf_{j\to\infty} \mathcal{F}(u_j, \xi_j) = \infty$ trivialerweise wahr ist, können wir $L \in \mathbb{R}$ und die Existenz einer Teilfolge $\{j_k\}$ mit $\mathcal{F}(u_{j_k}, \xi_{j_k}) \longrightarrow L$ annehmen.

Der einfacheren Notation halber taufen wir diese Teilfolge $\{j_k\}$ wieder in $\{1, 2, 3, \ldots\}$ um.

Schritt 1: Wir fixieren nun ein $\varepsilon > 0$ und möchten die Existenz einer messbaren Teilmenge $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ und einer Teilfolge $\{j_\ell\}$ beweisen, sodaß

$$\mathcal{L}^m(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{und} \tag{1}$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |f(x, u_{j_\ell}(x), \xi_{j_\ell}(x)) - f(x, \bar{u}(x), \xi_{j_\ell}(x))| dx < \varepsilon \mathcal{L}^m(\Omega)$$

$\forall j_\ell \geq J(\varepsilon)$, für ein hinreichend großes $J(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, erfüllt ist. Wir wählen ein $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig. Wegen $u_j \longrightarrow \bar{u}$ und $\xi_j \longrightarrow \xi$ in $L^2(\Omega)$ existiert zunächst eine Konstante $M_{\tilde{\varepsilon}} > 0$, sodaß die Mengen

$$K^1_{\tilde{\varepsilon},j} := \underbrace{\{x \in \Omega \mid |\bar{u}(x)| \text{ oder } |u_j(x)| \geq M_{\tilde{\varepsilon}}\}}_{=\,[|\bar{u}| \geq M_{\tilde{\varepsilon}}] \cup [|u_j| \geq M_{\tilde{\varepsilon}}]} \text{ und}$$

$$K^2_{\tilde{\varepsilon},j} := \{x \in \Omega \mid |\xi_j(x)| \geq M_{\tilde{\varepsilon}}\} \text{ für jedes } j \in \mathbb{N}$$

$\mathcal{L}^m(K^i_{\tilde{\varepsilon},j}) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{4}$, für $i=1,2$, wegen $\sup_{j\in\mathbb{N}}\{\|u_j\|_{L^2}, \|\xi_j\|_{L^2}\} < \infty$, erfüllen, sodaß die $\mathcal{L}^m$-messbare Teilmenge

$\Omega^1_{\tilde{\varepsilon},j} := \Omega \setminus (K^1_{\tilde{\varepsilon},j} \cup K^2_{\tilde{\varepsilon},j})$ die Eigenschaft

$$\mathcal{L}^m(\Omega \setminus \Omega^1_{\tilde{\varepsilon},j}) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{4} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{4} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (2)$$

besitzt. Desweiteren ist f auf dem Kompaktum $\overline{\Omega} \times \overline{B^n_{M_{\tilde{\varepsilon}}}(0)} \times \overline{B^{nm}_{M_{\tilde{\varepsilon}}}(0)}$ gleichmäßig stetig, sodaß wir zu $\tilde{\varepsilon}$ ein $\delta(\tilde{\varepsilon}) > 0$ bestimmen können, sodaß für beliebige

$z_1, z_2 \in \overline{B^n_{M_{\tilde{\varepsilon}}}(0)}$ mit $|z_1 - z_2| < \delta(\tilde{\varepsilon})$

$$|f(x, z_1, \xi) - f(x, z_2, \xi)| < \tilde{\varepsilon} \quad (3)$$

$\forall x \in \overline{\Omega}$ und $\forall \xi \in \overline{B^{nm}_{M_{\tilde{\varepsilon}}}(0)}$ erfüllt ist.

Wegen $u_j \to \overline{u}$ in $L^2(\Omega)$ können wir eine Teilfolge $\{u_{j_k}\}$, die wir wieder in $\{u_j\}$ umtaufen, und zu dieser eine hinreichend große Zahl $J(\tilde{\varepsilon}) \in \mathbb{N}$ finden, sodaß die 16 $\mathcal{L}^m$-messbaren Mengen

$$\Omega^2_{\tilde{\varepsilon},j} := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, |u_j(x) - \bar{u}(x)| < \delta(\tilde{\varepsilon}) \right\}$$

$$\mathcal{L}^m(\Omega \setminus \Omega^2_{\tilde{\varepsilon},j}) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \quad \forall j \geq J(\tilde{\varepsilon}) \qquad (4)$$

erfüllen. Setzen wir also $\Omega_{\tilde{\varepsilon},j} := \Omega^1_{\tilde{\varepsilon},j} \cap \Omega^2_{\tilde{\varepsilon},j}$, so erhalten wir aus (2)–(4) und aus den Definitionen von $\Omega^1_{\tilde{\varepsilon},j} \equiv \Omega \setminus (K^1_{\tilde{\varepsilon},j} \cup K^2_{\tilde{\varepsilon},j})$ und $\Omega^2_{\tilde{\varepsilon},j}$:

$$\mathcal{L}^m(\Omega \setminus \Omega_{\tilde{\varepsilon},j}) \overset{(2),(4)}{<} \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \qquad (5)$$

$$\int_{\Omega_{\tilde{\varepsilon},j}} \underbrace{\left| f(x, u_j(x), \xi_j(x)) - f(x, \bar{u}(x), \xi_j(x)) \right|}_{\overset{(3)}{<} \tilde{\varepsilon} \text{ für jedes } x \in \Omega_{\tilde{\varepsilon},j}} dx < \tilde{\varepsilon}\, \mathcal{L}^m(\Omega)$$

$\forall j \geq J(\tilde{\varepsilon})$. Für $\tilde{\varepsilon}$ wählen wir nun speziell $\varepsilon \cdot 2^{-l}$ und betrachten außerdem eine Teilfolge $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ mit $j_l \geq J(\varepsilon \cdot 2^{-l}) \,(\geq J(\varepsilon))$ und $j_l \nearrow \infty$ für $l \to \infty$. Für die $\mathcal{L}^m$-messbare Menge $\Omega_\varepsilon := \bigcap_{l=1}^{\infty} \Omega_{\varepsilon \cdot 2^{-l}, j_l}$ erhalten wir nun aus (5) für $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \cdot 2^{-l}$:

$$\mathcal{L}^m(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon \cdot 2^{-\ell}, j_\ell})$$

$$\underset{(5)\text{ und } j_\ell \geq J(\frac{\varepsilon}{2^\ell})}{<} \sum_{\ell=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-\ell} = \varepsilon \qquad \text{und}$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} | f(x, u_{j_\ell}(x), \xi_{j_\ell}(x)) - f(x, \bar{u}(x), \xi_{j_\ell}(x)) | \, dx$$

$$\leq \int_{\Omega_{\varepsilon \cdot 2^{-\ell}, j_\ell}} | f(x, u_{j_\ell}(x), \xi_{j_\ell}(x)) - f(x, \bar{u}(x), \xi_{j_\ell}(x)) | \, dx$$

$$\underset{(5)}{<} \varepsilon 2^{-\ell} \mathcal{L}^m(\Omega) < \varepsilon \mathcal{L}^m(\Omega) \quad \forall j_\ell \geq J(\varepsilon \cdot 2^{-\ell}) \geq J(\varepsilon)$$

was gerade Beh. (1) beweist.

<u>Schritt 2</u>: Zu dieser Teilmenge $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ betrachten wir nun $g_\varepsilon(x, p) := \chi_{\Omega_\varepsilon} f(x, \bar{u}(x), p) : \Omega \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$.

g_ε ist ebenfalls konvex in p und

$\mathcal{G}_\varepsilon(\xi) := \int_\Omega g_\varepsilon(x, \xi(x)) \, dx$ ist für jede Funktion $\xi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ wohldefiniert, durch $C^* \| \xi \|^2_{L^2(\Omega)}$ beschränkt und auf $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$

konvex. Außerdem ist $\mathcal{G}_\varepsilon$ bzgl. starker L^2-Konvergenz stetig, denn sei $\{\tilde{\xi}_n\} \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ eine Folge mit $\tilde{\xi}_n \longrightarrow \xi^*$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$, so existiert eine Teilfolge $\{\tilde{\xi}_{n_k}\}$ mit $\tilde{\xi}_{n_k}(x) \longrightarrow \xi^*(x)$ in $\mathcal{L}^m$-f.a. $x \in \Omega$ und somit $g_\varepsilon(x, \tilde{\xi}_{n_k}(x)) \longrightarrow g_\varepsilon(x, \xi^*(x))$ — " — .

Zusammen mit $0 \leq g_\varepsilon(x, \tilde{\xi}_{n_k}(x)) \leq C^* |\tilde{\xi}_{n_k}|^2$ und $|\tilde{\xi}_{n_k}|^2 \longrightarrow |\xi^*|^2$ in $L^1(\Omega)$ folgt aus dem Satz von Vitali:

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\tilde{\xi}_{n_k}) \equiv \int_\Omega g_\varepsilon(x, \tilde{\xi}_{n_k}(x))\,dx$$
$$\downarrow \text{ für } k \to \infty$$
$$\mathcal{G}_\varepsilon(\xi^*) \equiv \int_\Omega g_\varepsilon(x, \xi^*(x))\,dx,$$

und aus dem Teilfolgenprinzip: $\mathcal{G}_\varepsilon(\tilde{\xi}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{G}_\varepsilon(\xi^*)$.
Wenden wir also Lemma 6.7 auf $X := L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nm})$ und $I := \mathcal{G}_\varepsilon$ an, so erhalten wir die Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{G}_\varepsilon$ bereits bzgl. schwacher $\mathcal{L}^2$-Konvergenz und somit wegen $\xi_j \xrightarrow[L^2]{} \overline{\xi}$:

Lebesgueschen Konvergenzsatz für $\varepsilon \searrow 0$:
$\liminf_{j\to\infty} \mathcal{F}(u_j, \xi_j) \geq \mathcal{F}(\bar{u}, \bar{\xi})$. Schließlich folgt aus $u_j \rightharpoonup \bar{u}$ in $W^{1,2}(\Omega)$, daß $u_j \to \bar{u}$ in $L^2(\Omega)$ nach Rellich. $\square$

$\Rightarrow$ <u>Theorem 6.9</u> (Existenz-Satz)

Sei $f \in C^0(\underset{(x}{\bar{\Omega}} \times \underset{,\,z}{\mathbb{R}^n} \times \underset{,\,p)}{\mathbb{R}^{nm}})$ eine bzgl. p konvexe Lagrange-Funktion mit den „Wachstumsbedingungen": $c_*|p|^2 \leq f(x,z,p) \leq C^*|p|^2$, für Konstanten $0 < c_* \leq C^* < \infty$. Für eine beliebig vorgegebene Funktion $g \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existiert dann ein $\bar{u} \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\mathcal{F}(\bar{u}) = \min_{W_g^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)} \mathcal{F}.$$

<u>Beweis</u>: Zunächst können wir eine $\mathcal{F}$-Infimal-Folge $\{u_j\} \subset W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, also mit $\mathcal{F}(u_j) \longrightarrow \inf_{W_g^{1,2}(\Omega)} \mathcal{F} \geq 0$, wählen.

Wegen $f(x,z,p) \geq c_* |p|^2$ und anhand der Poincare-Ungleichung sehen wir:

$$\|u_j\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 2\|u_j - g\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du_j\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq 2\,C(\Omega)\cdot \|Du_j - Dg\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{c_*}\mathcal{F}(u_j)$$

$$\leq (4\,C(\Omega)+1)\frac{1}{c_*}\underbrace{\sup_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{F}(u_j)}_{\leq \text{Konst.}} + 4C(\Omega)\|g\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}$$

$$\leq \text{Konst.}(\Omega, c_*, f, g) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt aus Lemma 6.5 die Existenz einer Funktion $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)\ (=:H)$ und einer Teilfolge $\{u_{j_\ell}\}$ mit $u_{j_\ell} \xrightarrow[W^{1,2}]{} \bar{u}$ schwach in $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, und Korollar 6.4 garantiert: $\bar{u} \in W^{1,2}_g(\Omega,\mathbb{R}^n)$. In Kombination mit Theorem 6.8 folgt also nun aus $u_{j_\ell} \xrightarrow[W^{1,2}]{} \bar{u}$:

$$\inf_{W^{1,2}_g(\Omega)} \mathcal{F} \leq \mathcal{F}(\bar{u}) \leq \liminf_{\ell\to\infty} \mathcal{F}(u_{j_\ell}) = \inf_{W^{1,2}_g(\Omega)} \mathcal{F}$$

$\square$

Beispiele: $\boxed{1}$ $f(x,z,p) := |p|^2 \cdot a(x,z)$, für eine stetige Funktion $a \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$ mit $c_* \leq a(x,z) \leq C^*$, erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 6.9, also insbesondere die Lagrange-Funktion $\frac{|p|^2}{2}$ des Dirichlet-Integrals $\mathcal{D}_\Omega(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx$.

$\boxed{2}$ Ebenfalls die Lagrange-Funktion

$F_g(z,p) := \frac{1}{2}\, g_{ik}(z)\, p_{i\beta}\, p_{k\beta}$ des „Riemannschen Dirichlet-Integrals" genügt den Vorauss. von Theorem 6.9, falls der metrische Tensor $(g_{ik})(z)$ elliptisch und beschränkt ist, also falls

$$k|\xi|^2 \leq g_{ik}(z)\, \xi_i \xi_k \equiv \langle \xi, (g_{ik})(z) \cdot \xi \rangle \leq K|\xi|^2$$

für Konstanten $k \leq K \in (0,\infty)$ und $\forall\, \xi, z \in \mathbb{R}^n$ gilt. Denn somit folgt in der Tat:

$$\underbrace{\frac{k}{2}}_{=:c_*} |p|^2 \leq F_g(z,p) \leq \underbrace{\frac{K}{2}}_{=:C^*} |p|^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \forall p \in \mathbb{R}^{nm}.$$

Außerdem ist für solches $(g_{ik})(z)$ die Hesse-Matrix

$$D_p^2 F_g(z,p) = \underbrace{(g_{je})(z) \oplus (g_{je})(z) \oplus \ldots \oplus (g_{je})(z)}_{m\text{-mal}} \in \mathrm{Sym}^+_{nm}(\mathbb{R}),$$

insbesondere positiv definit in jedem $z \in \mathbb{R}^n$, also $F_g(z,\cdot)$ auf $\mathbb{R}^{nm}$ konvex. (In § 5, $\boxed{5}$ war $m=2$)

Denn, aus $F_{p_{j\beta}}(z,p) = g_{jk}(z)\, p_{k\beta}$ folgt:

$$F_{p_{j\beta} p_{e\gamma}}(z,p) = g_{jk}(z)\, \delta_{ke}\, \delta_{\beta\gamma} = g_{je}(z)\, \delta_{\beta\gamma}$$

für $\beta, \gamma \in \{1, \ldots, m\}$, $j, l \in \{1, \ldots, n\}$.