Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

11.10.11

Variationsrechnung I
WS 2011/12
1.Übung

AUFGABE 1:

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq I\!R^n$ offen und $0 < \alpha \leq 1$. Zeigen Sie, daß $L^\infty(\Omega)$ und $C^{0,\alpha}(\Omega)$ vollständig, also Banachräume sind.

AUFGABE 2:

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset I\!R^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass die kanonische Einbettung $i_{\alpha,\beta} : C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$ für jedes Paar $\alpha > \beta$ aus $(0,1]$ stetig und kompakt ist, also dass erstens eine Konstante $C(\Omega,\alpha,\beta) > 0$ mit $\|u\|_{C^{0,\beta}(\Omega)} \leq C\ \|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ existiert und dass man aus jeder Folge $\{u_j\} \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $\|u_j\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq$ Konst. eine in $C^{0,\beta}(\Omega)$ konvergente Teilfolge auswählen kann.
Hinweis: Fixieren Sie ein $\delta > 0$ und betrachten Sie zunächst für die Abschätzung der Hölder-Quotienten $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}^\beta$ die Fall-Unterscheidung $|x-y| < \delta$ und $|x-y| \geq \delta$, um zunächst $\text{höl}_{\Omega,\beta}(u) \leq \text{diam}(\Omega)^{\alpha-\beta}\, \text{höl}_{\Omega,\alpha}(u)$ zu beweisen und um anschliessend zusammen mit dem Satz von Arzela-Ascoli und Aufgabe 1 auch noch die Kompaktheit der Einbettung $i_{\alpha,\beta}$ herzuleiten.

AUFGABE 3:

a) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $\{u_j\}$ eine beschränkte Folge, d.h. für die eine Konstante $C > 0$ mit $\|u_j\| := \sqrt{\langle u_j, u_j\rangle} \leq C$ für jedes j existiert. Man beweise, dass aus dieser Folge eine in H schwach konvergente Teilfolge $\{u_{\alpha_k}\}$ ausgewählt werden kann, welche also $\langle u_{\alpha_k}, v\rangle \longrightarrow \langle \bar{u}, v\rangle \quad \forall\, v \in H$ und für ein $\bar{u} \in H$ erfüllt. (3)
Hinweis: Man muss hierzu zunächst mittels des Diagonalfolgen-Verfahrens eine bestimmte Teilfolge von $\{u_j\}$ ins Auge fassen und anschliessend eine bestimmte beschränkte, lineare Abbildung L auf dem Abschluss W eines gewissen linearen Unterraums von H konstruieren. Man darf sodann ausnutzen, dass sich dieses $L \in W^*$ mittels des Rieszschen Darstellungssatzes „darstellen" lässt und dass ausserdem W ein orthogonales Komplement $W^\perp$ in H, also mit $H = W \oplus W^\perp$, besitzt.

b)* Sei nun umgekehrt $\{\xi_j\}$ eine schwach konvergente Folge in einem Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so beweise man die Existenz einer Konstanten $K > 0$, mit welcher $\|\xi_j\| \leq K$ für jedes j gilt. (3)

AUFGABE 4:

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset I\!R^n$ offen und beschränkt, $\varphi \in C_c^\infty(B_1^n(0))$ ein symmetrischer Glättungskern mit $\int_{B_1^n(0)} \varphi\, dx = 1$, $\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\, \varphi(x/\epsilon)$ die entsprechende Dirac-Folge und $u \in L^p(\Omega)$ beliebig fixiert, $p \in [1, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Glättungen $u_\epsilon(x) := \int_\Omega \varphi_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy$ bzgl. der L^p−Norm auf Ω gegen u konvergieren.
Hinweis: Setzen Sie die Funktion u durch $u \equiv 0$ auf $I\!R^n \setminus \Omega$ zu einer $L^p(I\!R^n)$−Funktion fort und verwenden Sie, dass man u bzgl. der $L^p(I\!R^n)$−Norm durch Funktionen $u_j \in C_c^0(I\!R^n)$ approximieren kann, deren Träger in einer offenen und beschränkten Menge Ω_0 mit $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$ liegen, um zunächst die Aussage „$\|u(\,\cdot\, + h) - u(\,\cdot\,)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $|h| \to 0$" zu beweisen. Kombinieren Sie dies für den anschliessenden Beweis der Behauptung „$\|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$" mit einer Aufspaltung von φ_ϵ in $\chi_{B_\delta^n(0)}\, \varphi_\epsilon$ und $\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta^n(0)}\, \varphi_\epsilon$.

Abgabetermin ist Dienstag, der 25.10.11, in der Vorlesung.