Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

17.01.12

Variationsrechnung I
WS 2011/12
10.Übung

AUFGABE 27:

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit gegebener Metrik g und $\tilde{g} := e^f g$ eine zu g konforme Metrik, wobei also $f \in C^\infty(M)$ eine beliebige glatte Funktion sei. Ausserdem mögen ∇ und $\tilde{\nabla}$ die eindeutigen Riemannschen Zusammenhänge auf (M, g) und $(M, \tilde{g})$ und $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j=1,\dots,n}$ einen fest gewählten lokalen Rahmen auf M bezeichnen.

a) Mittels der Formeln

$$R^k_{lij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^k_{jl} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{im}\,\Gamma^m_{jl} - \Gamma^k_{jm}\,\Gamma^m_{il} \qquad \text{und}$$

$$\Gamma^k_{jl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ml}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_m}\Big)\, g^{mk}$$

für die Komponenten von R^k_{lij} des Krümmungstensors und für die Christoffelsymbole Γ^k_{jl} zum Riemannschen Zusammenhang ∇ und zum lokalen Rahmen $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j=1,\dots,n}$ beweise man zunächst die Formeln

$$\tilde{R}_{lj} - R_{lj} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{\Gamma}^i_{jl} - \Gamma^i_{jl}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\Gamma}^i_{il} - \Gamma^i_{il}) + \tilde{\Gamma}^i_{im}\,\tilde{\Gamma}^m_{jl} - \tilde{\Gamma}^i_{jm}\,\tilde{\Gamma}^m_{il} + \Gamma^i_{im}\,\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{jm}\,\Gamma^m_{il}$$

$$\text{und} \qquad \tilde{\Gamma}^k_{jl} - \Gamma^k_{jl} = \frac{1}{2}\, g^{km}\Big(g_{ml}\,\frac{\partial f}{\partial x_j} + g_{mj}\,\frac{\partial f}{\partial x_l} - g_{jl}\,\frac{\partial f}{\partial x_m}\Big)$$

für die Differenz der Komponenten der Ricci-Tensoren zu $\tilde{\nabla}$ und ∇ und der Christoffel-Symbole von $\tilde{\nabla}$ und ∇. (4)

b)* Nun nehme man zur Vereinfachung der weiteren Rechnung um einen fixierten Punkt $P \in M$ Normalkoordinaten an, also dass $g_{jl}(P) = \delta_{jl}$ und $\Gamma^k_{jl}(P) = 0\ \forall k, j, l$ (nur in diesem Punkt P !) gelte und leite hieraus im Punkt P die Formel

$$\tilde{R}_{lj} - R_{lj} = -\frac{n-2}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_j}(f) + \frac{1}{2}\,(-\triangle_g)(f)\, g_{lj} + \frac{n-2}{4}\,\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{n-2}{4}\,\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial f}{\partial x_k}\, g^{mk}\, g_{lj}$$

her. (4)

c) Hieraus folgere man nun für die skalare Krümmung $S_{\tilde{g}} := \tilde{R}_{lj}\tilde{g}^{lj}$ anhand von $\tilde{g}^{lj} = e^{-f} g^{lj}$ die Transformationsformel

$$S_{\tilde{g}}\, e^{f} = S_g + (n-1)(-\triangle_g)(f) - \frac{(n-2)(n-1)}{4} \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, g^{mk}. \qquad (1)$$

(2)

d) Nun verwende man dieses Ergebnis, um die Transformationsformel

$$S_{\tilde{g}} = \varphi^{1-p}(a\,(-\triangle_g)(\varphi) + S_g\,\varphi),$$

mit $a := 4\,\frac{n-1}{n-2}$ und $p := \frac{2n}{n-2}$, zwischen den skalaren Krümmungen zu $\tilde{g} = \varphi^{p-2} g$ und g zu zeigen, wobei $\varphi := \exp(\frac{n-2}{4}\, f)$ sei, also indem man $f = (p-2)\log(\varphi)$, für eine positive glatte Funktion φ, in Formel (1) aus Teil (c) einsetze ! (3)

AUFGABE 28:

Wir betrachten die ,,Glocken-Funktionen" $u_\alpha(x) := \left(\frac{|x|^2+\alpha^2}{\alpha}\right)^{\frac{2-n}{2}}$ auf $B^n_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, für ein kleines $\epsilon << 1$ und ein (noch kleineres) $\alpha \in (0, \epsilon)$.

a) Zeigen Sie, dass die Integrale

$$I_k(\alpha, \epsilon) := \int_{B^n_\epsilon(0)} \mid x \mid^k \; u^2_\alpha(x)\, dx,$$

für $k \geq -1$, abgeschätzt werden können durch:
$\alpha^{k+2}\big(\frac{1}{k+n} + \frac{1}{|k+4-n|} + \frac{\epsilon^{k+4-n}}{|k+4-n|}\,\alpha^{n-k-4}\big)\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, falls $k \neq n-4$, und durch
$\alpha^{k+2}\big(\frac{1}{2n-4} + \log\big(\frac{\epsilon}{\alpha}\big)\big)\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, falls $k = n-4$. (4)

b) Folgern Sie hieraus, dass insbesondere für $k = 0$ und $\alpha = \epsilon^n$ das Integral $I_0(\alpha, \epsilon) = \int_{B^n_\epsilon(0)} u^2_\alpha(x)\, dx$ durch Konst.(n) ϵ^{n^2-3n+4} für jedes $n \geq 3$ ausser $n = 4$, durch Konst. ϵ^7 im Spezialfall $n = 4$, und somit durch Konst.(n) ϵ^{2n-2} für jedes $n \geq 3$, abgeschätzt werden kann. (2)

Hinweis zur (a): Transformieren Sie das Integral $I_k(\alpha, \epsilon)$ auf Polarkoordinaten $(r, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$, substituieren Sie durch $\sigma := \frac{r}{\alpha}$ und spalten Sie das resultierende Integral anschliessend auf die Integrationsgrenzen $[0, 1]$ und $[1, \frac{\epsilon}{\alpha}]$ auf. Verwenden Sie dann für das erste Integral, dass $(\sigma^2+1)^{2-n} \leq 1$ ist, und für das zweite Integral, dass $(\sigma^2+1)^{2-n} \leq \sigma^{4-2n}$ gilt.

Abgabetermin ist Dienstag, der 24.01.12, in der Vorlesung.