Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

24.01.12

Variationsrechnung I
WS 2011/12
11.Übung

AUFGABE 29:

Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer gegebenen Metrik g, für die gerade $\mathrm{Vol}(M, g) := \int_M d\mathrm{vol}_g = 1$ gilt. Ausserdem seien (wie in der Vorlesung)

$$\lambda_s := \inf\{Q_g^s(u) := \frac{\int_M a\, g(\nabla_g u, \nabla_g u) + S_g\, u^2\, d\mathrm{vol}_g}{(\int_M \mid u \mid^s \ d\mathrm{vol}_g)^{2/s}} \mid u \in W^{1,2}(M) \setminus \{0\}\},$$

wobei $s \in (2, p]$, $p := \frac{2n}{n-2}$ und S_g die skalare Krümmung von (M, g) bezeichnen mögen. Insbesondere ist also λ_p die Yamabe-Konstante $\lambda(M, g)$ der Mannigfaltigkeit M zur Metrik g.

a) Zeigen Sie zunächst mittels $\mathrm{Vol}(M, g) = 1$, dass $\|u\|_{L^s(M,g)} := (\int_M \mid u \mid^s \ d\mathrm{vol}_g)^{1/s}$ eine (schwach) monoton wachsende Funktion von $s \in (2, p]$ ist, und folgern Sie hieraus, dass λ_s entweder für jedes s nicht-negativ oder für jedes s negativ ist. (3)

b) Zeigen Sie nun, dass im ersten Fall λ_s (schwach) monoton fällt und im zweiten Fall (schwach) monoton wächst, also dass in jedem Fall $\mid \lambda_s \mid$ eine (schwach) monoton fallende Funktion von $s \in (2, p]$ ist. (2)

c) Folgern Sie nun mit Hilfe der Erkenntnisse aus (a) und (b), dass für den Fall $\lambda(M, g) \geq 0 \quad \lambda_s$ linksseitig stetig auf $(2, p]$ ist, also dass für jedes fixierte $s^* \in (2, p]$ $\lambda_{s^*} = \lim_{s \nearrow s^*} \lambda_s$ gilt und somit insbesondere $\lambda(M, g) = \lim_{s \nearrow p} \lambda_s$! (3)

Hinweis zu (a), (b) und (c): Um welchen Faktor unterscheiden sich eigentlich $Q_g^s(u)$ und $Q_g^{s'}(u)$ für zwei beliebige $s, s' \in (2, p]$? Und wogegen strebt dieser bei $\mid s - s' \mid \to 0$?

AUFGABE 30:

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer gegebenen Metrik g, ∇ der eindeutige Riemannsche Zusammenhang auf (M, g) und $\Phi : U \xrightarrow{\cong} B_1^n(0)$ eine fest gewählte Karte auf einer offenen Menge $U \subset M$, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\dots,n}$ der zu Φ gehörende Rahmen und $\{V_k\}_{k=1,\dots,n}$ ein ON-Rahmen zu g auf U.

a) Nehmen Sie in diesem Aufgabenteil zunächst zur Vereinfachung der anstehenden Rechnung an, dass die Karte Φ Normalkoordinaten um einen Punkt $P \in U$ produziere, also dass ihr Rahmen $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\dots,n}$ die Relationen $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ und $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(P) = 0$ für alle k, i, j erzeuge, und zeigen Sie, dass die Riemannschen Krümmungskoeffizienten R_{mlij} zu g (und zu solch einer Karte) durch

$$R_{mlij}(P) = \frac{1}{2}\Big(\partial_{il}(g_{jm}) + \partial_{jm}(g_{il}) - \partial_{im}(g_{jl}) - \partial_{jl}(g_{im})\Big)(P)$$

im Punkt P gegeben sind. Folgen hieraus nun die Symmetrie-Relationen $R_{mlij} = R_{ilmj}$, $R_{mlij} = R_{ijml}$ oder $R_{mlij} = R_{mjil}$? (3)

b) Der Ricci-Tensor Ric: $\Gamma(U)^2 \longrightarrow C^\infty(U)$ ist definiert durch

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \sum_{k=1}^{n} g(R(V_k, X)\,Y, V_k).$$

Leiten Sie aus Teil (a) die Symmetrie des Ricci-Tensors, also $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$ her. Zeigen Sie anschliessend die Unabhängigkeit des Ricci-Tensors von der Wahl des ON-Rahmens $\{V_k\}_{k=1,\dots,n}$, indem Sie für die Zahlen $R_{lj} := \sum_{m,r=1}^{n} R_{mlrj}\, g^{mr}$ die Gleichungen $R_{lj} = \mathrm{Ric}\Big(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$ nachweisen, sodass diese also die Bezeichnung „Ricci-Koeffizienten" tatsächlich verdienen. Sind die R_{lj} somit in l, j symmetrisch ? (2)

c) Zeigen Sie nun, dass die durch $S_g := \sum_{l,j=1}^{n} R_{lj} g^{lj}$ definierte „skalare Krümmung" von (M, g) durch $S_g = \sum_{l=1}^{n} \mathrm{Ric}(V_l, V_l)$ gegeben ist. Beweist dies die Unabhängigkeit von S_g von der Kartenwahl Φ auf U ? Ist die Zuordnung $(M, g) \mapsto S_g$ einer „skalaren Krümmung" zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit also logisch einwandfrei ? (2)

Hinweis zu (b) und (c): Stellen Sie die V_k durch den Rahmen $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\dots,n}$ in der Form $V_k = b_{ki}\frac{\partial}{\partial x^i}$ dar und leiten Sie aus $g(V_k, V_l) = \delta_{kl}$ eine bestimmte Matrix-Gleichung zwischen $G := (g_{ij})$ und $B := (b_{ki})$ her !

AUFGABE 31:

Betrachten wir hier die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, g) := (\mathbb{S}^n, g_{eu})$ der $n-$dimensionalen Sphäre, ausgestattet mit der vom $\mathbb{R}^{n+1}$ geerbten euklidischen Metrik und mit dem zu dieser gehörenden Riemannschen Zusammenhang.

a) Zeigen Sie, dass sich der Ricci-Tensor Ric der $(\mathbb{S}^n, g_{eu})$ nur um den Faktor $n-1$ von ihrem metrischen Tensor g_{eu} unterscheidet ! (5)

b) Leiten Sie hieraus und mit Hilfe von Aufgabe 30 ab, dass somit die „euklidische" $n-$Sphäre eine konstante skalare Krümmung mit dem Wert $(n-1)n$ hat ! (1)

Abgabetermin ist Dienstag, der 31.01.12, in der Vorlesung.