Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

18.10.11

Variationsrechnung I
WS 2011/12
2.Übung

AUFGABE 5: [Fundamental-Lemma der Variationsrechnung]

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq I\!R^n$ offen und $f \in C^0(\Omega, I\!R)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\int_\Omega f\,\eta\,d\mathcal{L}^n \geq 0 \qquad \forall\,\eta \in C_c^\infty(\Omega), \quad \text{mit } \eta \leq 0 \text{ auf } \Omega,$$

bereits $f \leq 0$ auf Ω folgt. (4)

AUFGABE 6:

Wir betrachten die ,,Lagrange-Funktion" $F(p) := (p^2 - 1)^2$ und ihr entsprechendes Variationsintegral $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 (u'(x)^2 - 1)^2\,dx$ auf den Klassen $\mathcal{C}^* := W_0^{1,2}((-1,1)) \cap W^{1,\infty}((-1,1))$ und $\mathcal{C} := \{u \in C^1([-1,1]) \mid u(-1) = 0, u(1) = 0\}$.

a) Beweisen Sie zunächst, dass die Funktion $u(x) := 1 - |x|$, für $|x| < 1$, in $\mathcal{C}^*$ liegt, und geben Sie anschliessend (mit Begründung) eine Funktion $u^* \in \mathcal{C}^*$ mit $\mathcal{F}(u^*) = \inf_{\mathcal{C}^*} \mathcal{F}$ an. (2)

b) Beweisen Sie nun, dass $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} = 0$ gilt, indem Sie durch ,,Approximation" von u^* (oder von u (?)) eine geeignete $\mathcal{F}-$Infimalfolge $\{u_n\} \subset \mathcal{C}$ explizit angeben, welche also aus stetig differenzierbaren Funktionen u_n besteht, die $\mathcal{F}(u_n) \longrightarrow 0$ $(\leq \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F})$ für $n \to \infty$ erfüllen ! (2)

c) Drittens begründe man exakt, warum es trotzdem in $\mathcal{C}$ keinen Minimierer v^* von $\mathcal{F}$, also kein $v^* \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(v^*) = 0 = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$, geben kann ! (1)

AUFGABE 7:

a) Sei $\varphi \in C_c^\infty(B_1^n(0))$ ein symmetrischer Glättungskern mit $\int_{B_1^n(0)} \varphi\,dx = 1$, $\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\,\varphi(x/\epsilon)$ die entsprechende Dirac-Folge und $u \in C^0(\Omega)$ beliebig fixiert, $\Omega \subset I\!R^n$ offen und beschränkt. Beweisen Sie, dass die Glättungen

$$T_\epsilon(u) := \varphi_\epsilon * u \equiv \int_\Omega u(y)\,\varphi_\epsilon(\,\cdot\, - y)\,dy$$

gleichmässig auf jeder offenen Teilmenge $\Omega' \subset\subset \Omega$ (also mit $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) gegen u konvergieren, also dass für jedes solche Ω' $\sup_{\Omega'} |T_\epsilon(u) - u| \to 0$ für $\epsilon \searrow 0$ gilt. Folgt hieraus bereits, dass $T_\epsilon(u)(x) \to u(x)$ in jedem Punkt x aus ganz Ω, für $\epsilon \searrow 0$, gilt ? (2)

b) Beweisen Sie nun hiermit sowie mittels bedenkenloser Verwendung der Annahme „$W^{1,1}((-1,1)) \subset C^0((-1,1))$", dass für jedes $u \in W^{1,1}((-1,1))$ der Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung gilt: $u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,dx$, für beliebige Punkte $x_1 < x_2$ aus $(-1,1)$. (3)
Hinweis: Testen Sie die „Wälzformel" für $W^{1,1}$-Funktionen mit Glättungen $T_{\frac{1}{k}}(\chi_{[x_1,x_2]}) \equiv \varphi_{\frac{1}{k}} * \chi_{[x_1,x_2]}$ der charakteristischen Funktion des Intervalls $[x_1,x_2]$ und kombinieren Sie beim Grenzübergang (für $k \to \infty$) die Ergebnisse der Aufgaben 4 und 7 (a).

AUFGABE 8:

Wir untersuchen zur „Lagrange-Funktion" $F(x,p) := x^2\,p^2$ deren entsprechendes Variationsintegral $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^{1} x^2\,u'(x)^2\,dx$.

a) Man gebe explizit eine Infimalfolge $\{u_n\}$ für $\mathcal{F}$ aus der Funktionenklasse $\mathcal{C} := \{u \in W^{1,2}((-1,1)) \mid u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ an. Welchen exakten Wert hat $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$? Desweiteren argumentiere man mittels Aufgabe 7 (b), warum es trotzdem in $\mathcal{C}$ keinen Minimierer v von $\mathcal{F}$, also kein $v \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(v) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$, geben kann ! (3)

b) Nun gebe man explizit eine Infimalfolge $\{u_n\}$ für $\mathcal{F}$ aus der kleineren Funktionenklasse $\mathcal{C}^* := \{u \in C^1([-1,1]) \mid u(-1) = -1, u(1) = 1\} \subset \mathcal{C}$ an ! Welchen Wert erhalten Sie für $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) = \inf_{\mathcal{C}^*} \mathcal{F}$? (2)
Hinweis: Man versuche zur Konstruktion der Infimalfolge $\{u_n\} \subset \mathcal{C}^*$ (zu jeweils jedem n) zwei geeignete Parabel-Bögen ausgekocht „aneinanderzukleben".

Abgabetermin ist Dienstag, der 01.11.11, in der Vorlesung.