Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

26.10.11

Variationsrechnung I
WS 2011/12
3.Übung

AUFGABE 9:

Wie in Aufgabe 8 betrachten wir die ,,Lagrange-Funktion" $F(x,p) := x^2 p^2$ und deren entsprechendes Variationsintegral $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^{1} x^2\, u'(x)^2\, dx$.

a) Ist $\mathcal{F}$ bezüglich schwacher Konvergenz von Folgen aus irgendeinem bekannten Funktionen-Banachraum unterhalbstetig ? (2)

b) Sei $\{u_j\}$ eine Infimal-Folge für $\mathcal{F}$ innerhalb der Funktionenklasse $\mathcal{C} := \{u \in W^{1,2}((-1,1)) \mid u(-1) = -1, u(1) = 1\}$. Warum kann $\{u_j\}$ keine in $W^{1,2}((-1,1))$ schwach konvergente Teilfolge besitzen ? (2)

AUFGABE 10:

Seien X ein normierter $\mathbb{R}-$Vektorraum, $V \subset X$ eine konvexe Teilmenge und $\mathcal{F} : V \to \mathbb{R}$ konvex. Weiterhin seien $u_0 \in V$ und $K_r(u_0) := \{u \in X \mid \|u - u_0\| \leq r\} \subset V$, sodass $\mathcal{F}$ auf der Sphäre $S_r(u_0) := \{u \in X \mid \|u - u_0\| = r\}$ beschränkt ist, also sodass $M := \sup_{S_r(u_0)} \mathcal{F} < \infty$ gilt. Man beweise nun, dass dann

$$2\mathcal{F}(u_0) - M \leq \mathcal{F}(u) \leq M \qquad \forall\, u \in K_r(u_0)$$

erfüllt ist. (3)

AUFGABE 11:

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf einer offenen, konvexen (nicht-leeren) Teilmenge U eines $\mathbb{R}^M$, so ist f auf U stetig, und es lassen sich sogar zu jedem $x_0 \in U$ ein Ball $B_r(x_0) \subset U$ und eine Konstante $K(f, x_0, r)$ mit $\mid f(x_0) - f(x) \mid\leq K \mid x_0 - x \mid$, $\forall x \in B_r(x_0)$, angeben. (4)

AUFGABE 12:

Man beweise die Poincaré-Ungleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, so erfüllt jedes $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ die Ungleichung

$$\int_\Omega \mid u \mid^2\, dx \leq C(\Omega) \int_\Omega \mid Du \mid^2\, dx$$

für eine nur von Ω abhängige Konstante $C(\Omega)$. Durch welche ,,geometrische Grösse" von Ω kann diese Konstante (in Anbetracht des Beweises dieser Ungleichung) offenbar grob abgeschätzt werden ? Könnte diese Ungleichung eigentlich auch für jede Funktion aus $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gelten ? (5)

Abgabetermin ist Dienstag, der 08.11.11, in der Vorlesung.