Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

02.11.11

Variationsrechnung I
WS 2011/12
4.Übung

AUFGABE 13:

a) Sei $\{\xi_j\}$ eine schwach konvergente Folge in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$ auf einem beliebigen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass zu einem beliebig fixierten $\epsilon > 0$ eine Konstante $M_\epsilon > 0$ existiert, sodass die Teilmenge $K_{\epsilon,j} := \{x \in \Omega \mid\mid \xi_j(x) \mid \geq M_\epsilon\}$ für jedes j ein kleineres $\mathcal{L}^n-$Mass als ϵ haben muss. Anhand welcher ,,analytischer Grössen" der ξ_j lässt sich M_ϵ (von unten) ,,konkret" abschätzen, und wie hängt diese untere Schranke für M_ϵ exakt von ϵ ab ? (2)

b) Nun sei $\{u_j\}$ eine in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ stark konvergente Folge mit L^1-Limes $\bar{u} \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und ausserdem ein $\delta > 0$ beliebig fixiert. Man beweise die Existenz einer Teilfolge $\{u_{j_k}\}$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $K(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$, sodass die Teilmengen $B_k := \{x \in \Omega \mid\mid u_{j_k}(x) - \bar{u}(x) \mid \geq \delta\}$ für jedes $k > K(\epsilon, \delta)$ $\mathcal{L}^n(B_k) < \epsilon$ erfüllen. Kann man diese Teilfolge $\{u_{j_k}\}$ so wählen, dass sich jede natürliche Zahl $K(\epsilon, \delta) \geq -\log_2(\epsilon\,\delta)$ als eine solche geeignete untere Schranke an die Indizes k erweist ? (3)
Hinweis: Man inspiziere hierzu den Beweis des Riesz'schen Auswahlsatzes !

AUFGABE 14:

Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, dessen Rand $\partial\Omega$ eine geschlossene C^1-Mannigfaltigkeit sei, und $(g_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,N}$ eine von $z \in \mathbb{R}^N$ in $C^\infty-$Weise, also ,,glatt" abhängige positiv definite, symmetrische Matrix-wertige Funktion, d.h. ein sogenannter ,,Riemannscher metrischer Tensor", welcher zu jedem Tangentialraum $T_z\mathbb{R}^N$ am jeweiligen Punkt z eine eigene ,,Längen- und Winkel-Messvorschrift" für dessen Tangentialvektoren liefert. Die ,,Dirichlet-Energie" von Flächen $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ mit Bild in solch einem ,,Riemannsch verzerrten" $\mathbb{R}^N$ wird demnach durch das Funktional

$$\mathcal{D}_g(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega g_{ij}(u(x)) \frac{\partial u_i}{\partial x^\beta}(x) \, \frac{\partial u_j}{\partial x^\beta}(x) \, dx$$

gemessen, wobei man die Einsteinsche Summenkonvention beachte, dass also hierbei über die doppelt auftretenden Indizes $i, j = 1, \dots, N$ und $\beta = 1, \dots, n$ summiert werde !
Wie lauten nun die zu $\mathcal{D}_g$ gehörende Lagrange-Funktion $F_g(z, p)$, ihre ersten partiellen

Ableitungen nach z_k und p_k^α und ihre partiellen Ableitungen 2. Ordnung nach p_k^α und p_l^γ ? Unter welchen zusätzlichen Bedingungen an den ,,Riemannschen metrischen Tensor" $(g_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,N}$ erfüllt nun die Lagrange-Funktion $F_g(z,p)$ die Bedingungen unseres Existenz-Satzes für globale Minimierer, Theorem 2.5 ? Ist $F_g(z,p)$ für beliebige (positiv definite, symmetrische) metrische Tensoren $(g_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,N}$ in p konvex ? Und wie steht es mit den in Theorem 2.5 geforderten Wachstumsbedingungen ? (3)

Abgabetermin ist Dienstag, der 15.11.11, in der Vorlesung.