Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

08.11.11

Variationsrechnung I
WS 2011/12
5.Übung

AUFGABE 15:

Wir betrachten auf dem Banach-Raum $X = L^1(A)$, für eine $\mathcal{L}^n$-meßbare Menge $A \subseteq I\!R^n$ mit $\mathcal{L}^n(A) > 0$, die Norm $f(x) :=\| x \|_{L^1(A)}$. Zeigen Sie, dass f in jedem $u \in L^1(A)$ mit $\mathcal{L}^n([u = 0]) = 0$ Gâteaux-differenzierbar, jedoch in $u \in L^1(A)$ mit $\mathcal{L}^n([u = 0]) > 0$ nicht Gâteaux-differenzierbar ist, und geben Sie im ersten Fall die Gâteaux-Ableitung $\delta f(u,v)$ in Richtung eines beliebigen $v \in L^1(A)$ explizit an. Zeigen Sie desweiteren, dass f an keiner Stelle $u \in L^1(A)$ Fréchet-differenzierbar ist. (5)
Hinweis für den zweiten Aufgabenteil: Wählen Sie für ein $u \in L^1(A)$ mit $\mathcal{L}^n([u > 0]) > 0$ ein $M > 0$, sodass $\mathcal{L}^n([0 < u < M]) > 0$ ist, und betrachten Sie als Störungsfunktion $v := -2M\chi_B$ für $\mathcal{L}^n$-meßbares $B \subseteq [0 < u < M]$.

AUFGABE 16:

Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, dessen Rand $\partial\Omega$ eine geschlossene C^2-Mannigfaltigkeit sei, und $(g_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,N}$ ein ,,Riemannscher metrischer Tensor" auf dem Tangentialbündel des $\mathbb{R}^N$ wie in Aufgabe 14.

a) Man berechne nun die N Euler-Lagrange-Gleichungen der ,,Dirichlet-Energie"

$$\mathcal{D}_g(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega g_{ij}(u(x))\frac{\partial u_i}{\partial x^\beta}(x)\,\frac{\partial u_j}{\partial x^\beta}(x)\,dx$$

von Flächen $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. (3)

b) Nun führe man die Christoffel-Symbole 1. Art durch $2\,\Gamma_{ijk}(z) := \frac{\partial}{\partial z_i} g_{jk}(z) - \frac{\partial}{\partial z_j} g_{ik}(z) + \frac{\partial}{\partial z_k} g_{ij}(z)$ in jedem $z \in \mathbb{R}^N$ ein. Lassen sich hiermit diese Euler-Lagrange-Gleichungen ,,kompakter" ausdrücken, wenn man erneut die Symmetrie unseres metrischen Tensors g und die Tatsache ausnutzt, dass die in diesen Gleichungen auftretenden Summationsindizes systematisch ineinander umbenannt werden dürfen ? (2)

AUFGABE 17:

Wir betrachten eine nur von $(p^1,p^2)\hat{=}(p_j^\alpha) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \hat{=} \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{R})$, mit $j = 1,2,3$

und $\alpha = 1,2$, abhängige Lagrange-Funktion $f(p^1,p^2)$, welche in der Form $f(p^1,p^2) := F(p^1 \times p^2)$ gegeben sei, wobei $F \in C^0(\mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ positiv homogen 1. Ordnung sei, also $F(t\,y) = t\,F(y)$ für jedes $y \in \mathbb{R}^3$ und jedes $t \geq 0$ erfülle, und ausserdem $\mid F(y_1) - F(y_2) \mid \leq M \mid y_1 - y_2 \mid$ für jedes Paar $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, mit einer Konstanten $M > 0$. Über einem beliebigen beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir sodann das entsprechende „parametrische" Funktional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega f(u_{x^1}, u_{x^2})\, d(x^1,x^2) \equiv \int_\Omega F(u_{x^1} \times u_{x^2})\, d(x^1,x^2)$$

und teilen (anhand der Singularität von F im Ursprung) für jedes fixierte $u \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ das Integrationsgebiet Ω in die „reguläre Menge" $\mathcal{R}(u) := \{x \in \Omega \mid (u_{x^1} \times u_{x_2})(x) \neq 0\}$ und in dessen Komplement $\mathcal{S}(u) := \Omega \setminus \mathcal{R}(u)$ – die „singuläre Menge" zu u – auf.

a) Zunächst beweise man mittels eines einfachen Differenzenquotienten-Vergleichs für beliebige $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ die Beziehung

$$f_{p^\alpha_j}(u_{x^1},u_{x^2})(x)\,(\varphi_j)_{x^\alpha}(x) = \langle (\nabla_y F)(u_{x^1} \times u_{x^2})(x), (u_{x^1} \times \varphi_{x^2} + \varphi_{x^1} \times u_{x^2})(x) \rangle,$$

(Einstein-Konvention !) in jedem Punkt $x \in \mathcal{R}(u)$. (2)

b) Mit Hilfe des Resultats aus Teil (a) leite man nun für beliebige $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ die Formel

$$\delta^+\mathcal{F}(u,\varphi) := \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathcal{F}(u+t\varphi) - \mathcal{F}(u)}{t}$$

$$= \int_{\mathcal{R}(u)} \langle (\nabla_y F)(u_{x^1} \times u_{x^2}), u_{x^1} \times \varphi_{x^2} + \varphi_{x^1} \times u_{x^2} \rangle\, d(x^1,x^2) \qquad (1)$$

$$+ \int_{\mathcal{S}(u)} F(u_{x^1} \times \varphi_{x^2} + \varphi_{x^1} \times u_{x^2})\, d(x^1,x^2),$$

für die (rechts-seitige) Richtungsableitung von $\mathcal{F}$ in u in Richtung φ her ! Anhand der Singularität von F im Ursprung ist die Komposition $f((u+t\,\varphi)_{x^1}(x),(u+t\,\varphi)_{x^2}(x))$ (i.a.) nicht nach dem Schar-Parameter t stetig differenzierbar, sodass man insbesondere nicht mehr wie im Beweis von Theorem 3.1 die Existenz der obigen Richtungsableitung $\delta^+\mathcal{F}(u,\varphi)$ herleiten kann. Somit muss man hier separat die beiden Differenzenquotienten $\frac{\mathcal{F}_{\mathcal{R}(u)}(u+t\varphi)-\mathcal{F}_{\mathcal{R}(u)}(u)}{t}$ und $\frac{\mathcal{F}_{\mathcal{S}(u)}(u+t\varphi)-\mathcal{F}_{\mathcal{S}(u)}(u)}{t}$ ausschreiben und unter Einsatz der Voraussetzungen an F den Konvergenz-Satz von Lebesgue zweimal „schlau" einsetzen ! (Hinweis: Was ist eigentlich $F(0)$?) (3)

c)* Welche zu (1) korrespondierende Formel gilt nun wohl für die links-seitige Richtungsableitung $\delta^-\mathcal{F}(u,\varphi) := \lim_{t \nearrow 0} \frac{\mathcal{F}(u+t\varphi)-\mathcal{F}(u)}{t}$? Unter welcher zusätzlichen Symmetrie-Forderung an F stimmen $\delta^+\mathcal{F}(u,\varphi)$ und $\delta^-\mathcal{F}(u,\varphi)$ für beliebige $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$ sicherlich überein, welches somit die Existenz der beid-seitigen Richtungsableitung $\delta\mathcal{F}(u,\varphi) := \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{F}(u+t\varphi)-\mathcal{F}(u)}{t}$ garantiert ? Ist $\delta\mathcal{F}(u,\varphi)$ nun auch die Gâteaux-Ableitung von $\mathcal{F}$, d.h. stetig und linear bzgl. φ auf $C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$?
Und können $\delta^\pm\mathcal{F}(u,\varphi)$ für jedes konform parametrisierte u, also mit $\mid u_{x^1} \mid - \mid u_{x^2} \mid \equiv 0 \equiv \langle u_{x^1}, u_{x^2} \rangle$, durch ein einziges Integral über ganz Ω ausgedrückt werden ? Ist $\delta\mathcal{F}(u,\varphi)$ die Gâteaux-Ableitung von $\mathcal{F}$ in jedem konform parametrisierten u bzgl. jedem φ auf $C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^3)$, auch ohne irgendeine zusätzliche Forderung an F ? (3)

Abgabetermin ist Dienstag, der 22.11.11, in der Vorlesung.