Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

15.11.11

Variationsrechnung I
WS 2011/12
6.Übung

AUFGABE 18:

Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ offen und $A : \Omega \times I\!R^n \to I\!R$ und $\Phi : \Omega \times I\!R \to I\!R$ seien C^2-Funktionen mit

$$|D_p^2 A(x,p)|, |\tfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(x,z)| \leq C,$$
$$A(\,.\,,0),\ \tfrac{\partial A}{\partial p^\alpha}(\,.\,,0),\ \Phi(\,.\,,0),\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial z}(\,.\,,0) \in L^2(\Omega)$$

und in allen $(x,z,p) \in \Omega \times I\!R \times I\!R^n$:

$$\tfrac{\partial^2 A}{\partial p^\alpha \partial p^\beta}(x,p)\xi^\alpha \xi^\beta \geq c_0|\xi|^2,$$
$$\Phi(x,z) \geq -\delta\,|z|^2 - C_\delta,$$

für ein $c_0 > 0$, für $\delta > 0$ beliebig klein und $C_\delta < \infty$.

a) Zeigen Sie zunächst mittels des verallgemeinerten Mittelwertsatzes und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, daß die beidseitigen Richtungsableitungen $\delta\mathcal{F}(u,v)$ des Funktionals $\mathcal{F} : W_0^{1,2}(\Omega) \to I\!R$, definiert durch

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega A(x, \nabla u(x)) + \Phi(x, u(x))\, dx,$$

in jedem $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ existieren, geben Sie diese explizit an, und zeigen Sie, dass $\delta\mathcal{F}(u,\,.\,)$ ein stetiges, lineares Funktional auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist, also insgesamt dass $\mathcal{F}$ Gâteaux-differenzierbar auf ganz $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist ! (4)

b) Zeigen Sie nun wieder mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass die Lagrange-Funktion $f(x,z,p) := A(x,p) + \Phi(x,z)$ die beiden Wachstumsbedingungen

$$C_1 \mid p \mid^2 - \delta \mid z \mid^2 - \Psi_\delta(x) \leq f(x,z,p) \leq C_2(\mid p \mid^2 + \mid z \mid^2) + \tilde{\Psi}(x)$$

in allen $(x,z,p) \in \Omega \times I\!R \times I\!R^n$ für positive Konstanten C_1, C_2 und zwei nicht-negative Funktionen $\Psi_\delta, \tilde{\Psi} \in L^1(\Omega)$ erfüllt. (4)

c) Vergewissern Sie sich nun hiermit darüber, dass Schritt 2 des Beweises von Theorem 2.2 bereits unter den obigen Voraussetzungen an A und Φ auch für das Funktional

$\tilde{\mathcal{F}}(u,\xi) := \int\limits_\Omega A(x,\xi(x)) + \Phi(x,u(x))\,dx$ funktioniert, sodass insbesondere $\mathcal{F}$ unterhalbstetig bzgl. schwacher Konvergenz in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist und somit $\mathcal{F}$ einen Minimierer u^* in $W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt. Folgt hieraus, dass die quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial A}{\partial p^\alpha}(\,.\,,\nabla u)\Big) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\,.\,,u) = 0,$$

eine schwache Lösung in $W_0^{1,2}(\Omega)$ hat ? (4)

AUFGABE 19:

a) Als Anwendung der Resultate von Aufgabe 17 berechne man zunächst die rechts- und links-seitigen Richtungsableitungen $\delta^\pm\mathcal{A}(u,\varphi)$ des Oberflächen-Funktionals $\mathcal{A}(u) := \int_\Omega |\, u_{x^1} \times u_{x^2} \,|\; d(x^1,x^2)$ für beliebige $u,\varphi \in C^1(\bar\Omega,\mathbb{R}^3)$! Wie ist also jenes F hier zu wählen ? Genügt dieses überhaupt den Bedingungen aus Aufgabe 17 ? (1)

b) Sei nun $\Pi_0 := \{(p^1,p^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,||\, p^1 \,|=|\, p^2 \,|, \langle p^1,p^2\rangle = 0\}$. Man beweise zunächst, dass

$$|\, p^1 \times p^2 \,| \le \frac{1}{2}(|\, p^1 \,|^2 + |\, p^2 \,|^2),\ \forall\,(p^1,p^2) \in \mathbb{R}^6, \text{ und } |\, p^1 \times p^2 \,| = \frac{1}{2}(|\, p^1 \,|^2 + |\, p^2 \,|^2) \text{ auf } \Pi_0$$

gilt, um zusammen mit den Resultaten von Aufgabe 17 „elegant" einzusehen, dass sich die Gâteaux-Ableitung von $\mathcal{A}$ in jedem konform parametrisierten $u \in C^1(\bar\Omega,\mathbb{R}^3)$ zum einfachen, bekannten Ausdruck

$$\delta\mathcal{A}(u,\varphi) = \int_\Omega (u_j)_{x^\alpha}\,(\varphi_j)_{x^\alpha}\,d(x^1,x^2) \equiv \int_\Omega \langle u_{x^1},\varphi_{x^1}\rangle + \langle u_{x^2},\varphi_{x^2}\rangle\,d(x^1,x^2) = \delta\mathcal{D}(u,\varphi)$$

in Richtung eines beliebigen $\varphi \in C^1(\bar\Omega,\mathbb{R}^3)$ reduziert, wobei $\mathcal{D}$ das gewöhnliche Dirichlet-Integral bezeichne. (3)

Hinweis zur (b): Untersuchen Sie die Funktion $\chi(t) := \frac{1}{2}\,|\, p + te_j^\alpha \,|^2 - f(p + te_j^\alpha)$ um $t = 0$, wobei $f(p) \equiv f(p^1,p^2) :=|\, p^1 \times p^2 \,|$ sei und e_j^α diejenige Elementarmatrix bezeichne, die an der Position (j,α) eine 1 (und ansonsten nur Nullen) besitzt.

Abgabetermin ist Dienstag, der 29.11.11, in der Vorlesung.