Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

22.11.11

Variationsrechnung I
WS 2011/12
7.Übung

AUFGABE 20:

a) In Anschluss an Aufgabe 19 ist die Gâteaux-Ableitung $\delta\mathcal{A}(u,\varphi)$ des Oberflächen-Funktionals $\mathcal{A}(u) := \int_\Omega \mid u_{x^1} \times u_{x^2} \mid\, d(x^1,x^2)$, nun jedoch nur für Parametrisierungen $u \in C^1(\bar\Omega,\mathbb{R}^3) \cap C^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ „regulärer Flächen”, d.h. mit $\mathcal{S}(u) = \emptyset$ bzw. $\mathcal{R}(u) = \Omega$, und in „Normalen-Richtung”, d.h. für $\varphi = \eta\,\xi^{(u)}$ mit $\xi^{(u)} := \frac{u_{x^1} \times u_{x^2}}{|u_{x^1} \times u_{x^2}|}$ und $\eta \in C^1(\bar\Omega)$, zu berechnen ! Mittels der Weingarten-Ableitungs-Gleichungen: $\xi^{(u)}_{x^\alpha} = -b^\beta_\alpha\, u_{x^\beta}$ auf Ω versuche man einen überraschend simplen Integral-Ausdruck über Ω für $\delta\mathcal{A}(u,\eta\,\xi^{(u)})$ herzuleiten, in welchem die mittlere Krümmung $H^{(u)}$ der von u parametrisierten C^2-Fläche erscheint, wobei man die Formel $H^{(u)} = \frac{1}{2}(b^1_1 + b^2_2)$ (zunächst ohne deren Beweis) benutze. (3)

b) Welches Kriterium erhalten wir somit für eine beliebige Funktion $u \in C^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ mit $\mathcal{S}(u) = \emptyset$, die (nicht-lineare partielle) Differentialgleichung $H^{(u)} \equiv 0$ auf Ω zu lösen, d.h. eine „immergierte bzw. reguläre Minimalfläche” über Ω zu parametrisieren ? (1)

c) Sei nun $N : \text{Bild}(u) \to \mathbb{S}^2$ dasjenige Einheitsnormalenfeld an Bild(u), welches gerade $\xi^{(u)} \equiv N \circ u$ erfüllt. Man kläre zunächst, auf welche Vektoren die Jacobische $DN(u(x))$ die beiden Tangentialvektoren u_{x^1}, u_{x^2} abbildet, wieso daher die Weingartenabbildung $-DN(u(x)) \mid_{T_{u(x)}(\text{Bild}(u))}$ (in jedem $x \in \Omega$) einen Endomorphismus von $T_{u(x)}(\text{Bild}(u))$ nach $T_{u(x)}(\text{Bild}(u))$ liefert und warum es in der Tat Koeffizienten-Funktionen b^β_α mit $\xi^{(u)}_{x^\alpha} = -b^\beta_\alpha\, u_{x^\beta}$ auf Ω geben muss. Desweiteren folgere man hiermit die in Teil (a) verwandte Formel $H^{(u)} = \frac{1}{2}(b^1_1 + b^2_2)$ für die durch $2\,H^{(u)}(u(x)) := \text{Spur}(-DN(u(x)) \mid_{T_{u(x)}(\text{Bild}(u))})$ definierte mittlere Krümmung der Fläche Bild(u) im Punkt $u(x)$. (2)

AUFGABE 21:

Wir betrachten Rotationsflächen, die durch Rotation der Graphen von Funktionen aus der Randwert-Klasse $\mathcal{R} := \{u \in C^2([-d/2,d/2],\mathbb{R}_+) \mid u(-d/2) = 1 = u(d/2)\}$, für ein $d > 0$, um die $x-$Achse entstehen, die also durch die Parametrisierung $\Phi(x,\psi) := (x, u(x)\cos(\psi), u(x)\sin(\psi))$, für $\mid x \mid \leq d/2$ und $\psi \in [0,2\pi)$, im $\mathbb{R}^3$ gegeben seien. Es mögen ferner K_1, K_2 die beiden Kreise bezeichnen, die durch Rotation der Punkte $(-d/2,1)$ und $(d/2,1)$ um die x-Achse entstehen, welche also die Flächen Bild (Φ) berandEN.

a) Man berechne den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ einer beliebigen Rotationsfläche Φ als Funktional ihrer erzeugenden Funktion $u \in \mathcal{R}$ und stelle mit dessen Hilfe die entsprechenden (ELG) auf, welche also insbesondere von denjenigen Funktionen u aus $\mathcal{R}$ erfüllt werden, die in K_1 und K_2 eingespannte Rotationsflächen minimalen Flächeninhaltes generieren, welche also das Minimierungs-Problem $\mathcal{A}(\Phi) \equiv \mathcal{A}(u) \longrightarrow \min$ in $\mathcal{R}$ lösen ! Man vergewissere sich darüber, dass Funktionen der Form $u(x) := \beta \cosh\left(\frac{x}{\beta}\right)$ - sogenannte Kettenlinien - diese (ELG) lösen, sodass also ,,Katenoide" heisse Kandidaten für Rotationsflächen minimalen Flächeninhalts sind. (3)

b)* Nun berechne man (einigermassen) exakt den maximalen Wert d^* ($\approx 1,325$), sodass zwei Punkte mit den symmetrischen Koordinaten $(-d/2, 1)$ und $(d/2, 1)$ durch eine Kettenlinie, also durch den Graphen einer Funktion $u^*(x) = \beta^* \cosh\left(\frac{x}{\beta^*}\right)$ für einen optimalen, ebenfalls zu berechnenden Parameter β^* ($\approx 0,553$), miteinander verbunden werden können ! Man benutze hierzu, dass die beiden Lösungen der Gleichung $\coth(\gamma) = \gamma$ ungefähr $\pm 1,1996787$ betragen. (3)

c) Schliesslich berechne man den Flächeninhalt $\mathcal{A}(\Phi^*)$ des von dieser Kettenlinie u^* durch Rotation erzeugten Katenoids Φ^* und vergleiche diesen mit demjenigen eines in die beiden Kreise K_1 und K_2 eingespannten Zylindermantels ! Welche dieser beiden Flächen hat nun den geringeren Inhalt ? (2)

AUFGABE 22:

Die Spannung einer in die Punkte $(-1,0)$ und $(1,0)$ eingespannten und gedehnten Saite, welche als Graph einer beliebigen Funktion u aus der Randwert-Klasse $\mathcal{R}^* := \{u \in C^2([-1,1], \mathbb{R}_+) \mid u(-1) = 0 = u(1)\}$ im $\mathbb{R}^2$ dargestellt werde, wird (im Modell-Fall) durch das Integral $\mathcal{S}(u) := \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + u'(x)^2} - 1\, dx$ gemessen.

a) Nun soll die eingespannte Saite Graph(u) derart gedehnt werden, dass ihre Spannung minimal ausfällt, während jedoch der von ihr und der $x-$Achse eingeschlossene Bereich $Epi_u := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq u(x), x \in [-1,1]\}$ einen vorgeschriebenen Inhalt $\tilde{\mathcal{A}}(u) := \mathcal{L}^2(Epi_u) = c$, für ein festes $c > 0$, habe ! Man leite für dieses isoperimetrische Minimierungs-Problem: $\mathcal{S}(u) \longrightarrow \min$ in $\mathcal{R}^*$ mit $\tilde{\mathcal{A}}(u) = c$ die entsprechenden ,,bedingten" (ELG) her und bringe diese mit der Krümmung $\kappa_u(x) := \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{3/2}}$ der Graphen von C^2-Funktionen u in Verbindung ! Welche Form muss demnach eine ,,optimal" gespannte Saite haben ? (2)

b) Anhand der Taylor-Entwicklung $\sqrt{1+p^2} = 1 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{8}p^4 + \ldots$ ersetze man nun in ,,einfallsreicher Physiker-Manier" das Spannungs-Funktional $\mathcal{S}$ durch das einfachere Funktional $\tilde{\mathcal{S}}(u) := \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (u'(x))^2\, dx$ und leite erneut die ,,bedingten" (ELG) für das vereinfachte isoperimetrische Problem: $\tilde{\mathcal{S}}(u) \longrightarrow \min$ in $\mathcal{R}^*$ mit $\tilde{\mathcal{A}}(u) = c$ her ! Unter Ausnutzung der Neben-Bedingung $\tilde{\mathcal{A}}(u) = c$ beweise man, dass es höchstens eine Lösung u^* dieses isoperimetrischen Problems geben kann, nämlich $u^*(x) = \frac{3c}{4}(-x^2 + 1)$! Schliesslich berechne man deren Spannung $\mathcal{S}(u^*)$ und vergleiche deren Wert mit der approximierten Spannung $\tilde{\mathcal{S}}(u^*)$ für jeweils die konkreten Vorgaben $c = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$! (3)

Hinweis zur (b): Die Stammfunktion von $f(y) = \sqrt{1+y^2}$ lautet: $F(y) = \frac{1}{2}(y\sqrt{1+y^2} + \log(y + \sqrt{1+y^2}))$.

Abgabetermin ist Dienstag, der 13.12.11, in der Vorlesung.