Universität Tübingen
Mathematisches Institut

PD Dr. Ruben Jakob

13.12.11

Variationsrechnung I
WS 2011/12
9.Übung

AUFGABE 25:

Wir betrachten einen Massepunkt mit kartesischem Koordinatenpaar $\bar{x}(t)$ im $\mathbb{R}^2$ der Masse m unter Einfluss der konstanten Erdbeschleunigung $(0, -g)$, welcher sich auf dem Rand eines (masselosen, unendlich dünnen) Rades mit Radius R befinde, welches an der $x-$Achse hänge und entlang dieser reibungsfrei rollen, aber nicht gleiten darf. Wenn wir annehmen, dass sich der Massepunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ im unteren Scheitelpunkt $(0, -2R)$ dieses Rades befinde, so kann man für $\bar{x}(t)$ die Zykloiden-Parametrisierung $R\,(\varphi(t) + \sin\varphi(t), -(1 + \cos\varphi(t)))$, mit $\varphi(0) = 0$, als Ansatz verwenden.

a) Man skizziere zunächst grob dieses ,,physikalische System" ! Was ist nun zu tun, um die Bewegung $\bar{x}(t)$ dieses Massepunktes am Radrand (unter Einfluss der Erdbeschleunigung) zu ermitteln, nachdem wir diesem einen kleinen Anstoss verliehen haben ? Müssen wir zunächst die korrekten Zwangsbedingungen für $\bar{x}(t)$ formulieren, um daraufhin die ,,bedingten ELG a la D'Alembert" für seine beiden kartesischen Koordinaten zu ermitteln ? Oder sollen wir einfach versuchen, eine ,,unbedingte" ELG für die Winkelfunktion φ in der obigen Zykloiden-Parametrisierung aufzustellen ? Wie lauten die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie unseres ,,rollbaren" Massepunktes $\bar{x}(t)$, ausgedrückt durch φ und $\dot{\varphi}$ – wenn wir diese Zykloiden-Parametrisierung als Arbeits-Ansatz zu Grunde legen – und wie demnach die Lagrange-Funktion $L(z, p)$ zum korrekten Wirkungsfunktional für φ und damit die ELG dieses physikalischen Systems für φ ? (4)

b) Man benutze nun gemäss der Additionstheoreme die Formeln $1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2(\alpha/2)$ und $\sin(\alpha) = 2\,\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$, um die ELG für φ in die Form einer üblichen Schwingungsgleichung für die Funktion $\sin(\varphi(t)/2)$ zu bringen ! Wie lautet also die (allgemeine) Lösung φ der errungenen ELG zum Anfangswert $\varphi(0) = 0$, und welcher analytische Ausdruck ergibt sich somit für $\bar{x}(t)$? Ist dieses Resultat realistisch ? (3)

AUFGABE 26:

Wir betrachten einen Voll-Zylinder $Z(t)$ mit Radius r, Länge L und konstanter Dichte $\rho > 0$, welcher wiederum auf der Innenseite eines Zylindermantels (also in einer ,,Skateboard-Halfpipe") mit Radius $R >> r$ unter Einfluss der Erdbeschleunigung $(0, 0, -g)$ reibungsfrei rolle (aber nicht gleite), dessen Symmetrie-Achse parallel zur $y-$Achse durch den Punkt $(0,0,R)$ verlaufe, sodass also dessen ,,Mantelgerade geringster Höhe" exakt mit der $y-$Achse zusammenfalle. Bezeichne desweiteren $M(t) := ((R-r)\ \sin(\phi(t)), 0, r + (R-r)\,(1-\cos(\phi(t))))$ den Schnittpunkt der Symmetrie-Achse von $Z(t)$ mit der $(x,z)-$Ebene, sodass also $\phi(t)$ den ,,Ausschlag-Winkel von $M(t)$" zwischen dem Vektor $M(t) - (0,0,R) = ((R-r)\ \sin(\phi(t)), 0, (r-R)\ \cos(\phi(t)))$ und $(0,0,r-R)$ messe. Um den Rollprozess von Z(t) zu beschreiben, empfiehlt es sich nun, als Koordinaten des Systems einerseits den Winkel $\phi(t)$ und andererseits den ,,Rollwinkel" $\vartheta(t)$, den der Zylinder zum Zeitpunkt $t \geq 0$ abgerollt hat, zu verwenden. Setzen wir also $\phi(0) = 0 = \vartheta(0)$ voraus, so lässt sich der von $Z(t)$ zurückgelegte Weg einerseits durch $R \mid \phi(t) \mid$ und andererseits durch $r \mid \vartheta(t) \mid$ messen.

a) Man skizziere zunächst grob dieses ,,physikalische System", gebe die Zwangsbedingungs-Funktion $G(z_1, z_2)$ an, sodass also $G(\phi(t), \vartheta(t)) \equiv 0$ die beiden Winkelfunktionen korrekt miteinander verknüpft (hier auf die Vorzeichen achten !!), und berechne die Masse m sowie das Trägheitsmoment J (bzgl. der Symmetrie-Achse) von $Z(t)$. Anschliessend gebe man die kinetische Energie von $Z(t)$ mittels der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}$ und $\dot{\vartheta}$ an, welche sich aus der kinetischen (Translations-)Energie T_{Trans} des Punktes $M(t)$ – aufgefasst als ein (gleitender) Massepunkt der Masse m – und der kinetischen Rotationsenergie $T_{Rot} := \frac{1}{2}J(\dot{\phi} + \dot{\vartheta})^2$ des Zylinders zusammensetzt, und schliesslich die potentielle Energie V des Zylinders, welche man durch ϕ ausdrücke, indem man V als die potentielle Energie eines Punktes geringster Höhe von $Z(t)$ verstehe, in welchem sich die Masse m von ganz Z konzentriere. Wie lautet nun die sich ergebende Lagrange-Funktion $L(z_1, z_2, p_1, p_2)$ zu unserem physikalischen System (wenn wir a posteriori z.B. in z_1 das ϕ und in z_2 das ϑ einsetzen) ? (3)

b) Man stelle nun die beiden ,,bedingten" ELG ,,a la D'Alembert" für ϕ und ϑ auf und leite mittels erneuten Gebrauchs der Zwangsbedingung ,,$G(\phi(t), \vartheta(t)) \equiv 0$" eine Differentialgleichung 2. Ordnung nur für ϕ her. Zu welcher bekannten, einfachen Differentialgleichung 2. Ordnung reduziert sich diese, falls wir in Physiker-Manier $\mid \phi(t) \mid << 1$ für eine kurze Zeit annehmen, und wie lautet somit die allgemeine Lösung $\phi(t)$ zur Anfangsbedingung $\phi(0) = 0$, zumindest für eben diese kurze Dauer ? Und welchen Ausdruck erhalten wir daher für die Lagrange-Multiplikator-Funktion λ und die korrigierende ,,Zwangskraft" des Systems ? Wie lautet nun insbesondere unsere Lösung $\phi(t)$, falls wir die konkreten Werte $R = 6$, $r = 1$, $g = 10$ und die Anfangs-Rollgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}(0) = -2$ vorgeben ? Stimmt dieses Resultat mit unserer Intuition überein ? Rollt ein Fass auf diese Weise in einer Halfpipe ? (4)

Abgabetermin ist Dienstag, der 10.01.12, in der Vorlesung.