



ANALYSIS III

1995/96

Teil I: Funktionentheorie

Vorspann der für das WS 1993/94 erstellten 1. Auflage:

Im Wintersemester 1993/94 wurde, einem Beschluß der Mathematischen Fakultät der Universität Tübingen folgend, erstmalig statt der bisherigen Vorlesungen **Funktionentheorie I** und **Gewöhnliche Differentialgleichungen** die einsemestrige Vorlesung **ANALYSIS III** angeboten. Diese wendet sich an Studierende im dritten Fachsemester und soll je zur Hälfte eine Einführung in die Funktionentheorie wie in die Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen enthalten.

Im laufenden Semester stehen für die Vorlesung 29 Doppelstunden zur Verfügung, von denen genau die Hälfte dem Teil 1 gewidmet wurden. Die folgenden Paragraphen 1 – 11 enthalten (teilweise stichpunktartig) genau den dargebotenen Stoff. Der Kürze der Zeit entsprechend war es nicht möglich, viele auch für eine Einführung wichtige Gegenstände (z.B. konforme Abbildungen, Riemannscher Abbildungssatz, Montelscher Satz und doppeltperiodische Funktionen) unterzubringen. In einem Anhang sind jedoch zwei weitere Paragraphen angefügt, die u.a. (etwa mit dem Stokesschen Satz in einer rudimentären Form) den Zusammenhang mit der nachfolgenden Vorlesung **ANALYSIS IV** beleuchten soll.

Wie üblich steht den Hörern in der Bibliothek ein ‘Apparat’ zur Verfügung. Dieser enthält zur Zeit die folgenden Bücher

Ahlfors: Complex Analysis.

Arnol'd: Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Behnke/Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Bröcker: Analysis III.

Cartan: Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen.

Coddington/Levinson: Theory of ordinary differential equations.

Conway: Functions of one complex variable.

Fischer/Lieb: Funktionentheorie.

Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Hirsch/Smale: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.

Hurwitz/Courant/Röhrl: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen.

Jähnich: Einführung in die Funktionentheorie.

Knobloch/Kappel: Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Lang: Complex Analysis.

Remmert: Funktionentheorie I.

Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik. Band III.

Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Tübingen, im Januar 1994

W. Kaup

Neuaufgabe Dezember 2002

Inhalt

1. Der Körper der komplexen Zahlen	3
2. Komplex differenzierbare Funktionen	4
3. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	6
4. Kurvenintegrale	9
5. Existenz von Stammfunktionen	11
6. Der Cauchysche Integralsatz	14
7. Die Cauchysche Integralformel	18
8. Potenzreihen	21
9. Laurentreihen und isolierte Singularitäten	25
10. Residuenkalkül	29
11. Analytische Fortsetzung	30
12. Beziehungen zum Satz von Stokes	32
13. Homologe Versionen der Integralformeln	35
14. Übungsaufgaben	39
15. Symbolverzeichnis	47
16. Index	48

1. Der Körper der komplexen Zahlen

1. D-Stunde

Seien $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ und \mathbb{R} der Körper der reellen Zahlen.

Definition von \mathbb{C} : Versehe die additive Gruppe \mathbb{R}^2 mit dem Produkt

$$(x, y)(u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Dadurch wird \mathbb{R}^2 zu einem kommutativen Körper, der mit \mathbb{C} bezeichnet werde. Vermöge $a \leftrightarrow (a, 0)$ ist $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ Unterkörper. Für $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ gilt $i^2 = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R}$. Also $z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$ eindeutig. Setze $\operatorname{Re}(z) := x$ (Realteil von z), $\operatorname{Im}(z) := y$ (Imaginärteil von z) und $\bar{z} := x - iy$ (konjugiert komplexe Zahl zu z). Es gilt $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$.

1.1 Bemerkung Die durch $z \mapsto \bar{z}$ definierte Konjugation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein involutorischer Körperautomorphismus von \mathbb{C} (d.h. $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{zw}$). Außerdem gilt $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$. Setze $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$, genannt *Betrag* von z .

1.2 Eigenschaften des Betrages

- (i) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$
- (ii) $|zw| = |z| \cdot |w|$
- (iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Sei $\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ und $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Beides sind multiplikative Gruppen.

1.3 Lemma $\varphi(t) := \cos t + i \sin t$ definiert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ mit Kern $2\pi\mathbb{Z}$ (Aufwickelhomomorphismus).

Für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ gilt also

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = r(\cos t + i \sin t)$$

mit $r = |z| > 0$ und $\arg(z) := t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (Argument von z). Es gilt $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Die topologische Struktur von \mathbb{C} ist die von \mathbb{R}^2 . Es sollte bekannt sein, wann eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ oder allgemeiner $M \subset \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen in \mathbb{R}^n ist und wann eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig ist. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ sei $[\alpha, \beta] := \{t \in \mathbb{R} : \alpha \leq t \leq \beta\}$ das zugehörige abgeschlossene Intervall.

1.4 Definition Jede stetige Abbildung $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow M$ heißt *Kurve* in M . Das Bild $\operatorname{Sp}(\gamma) := \gamma([\alpha, \beta]) \subset M$ heißt die *Spur* von γ , und $\gamma(\alpha)$ heißt der *Anfangspunkt* sowie $\gamma(\beta)$ der *Endpunkt* von γ .

1.5 Beispiel $\gamma(t) := \cos t + i \sin t$

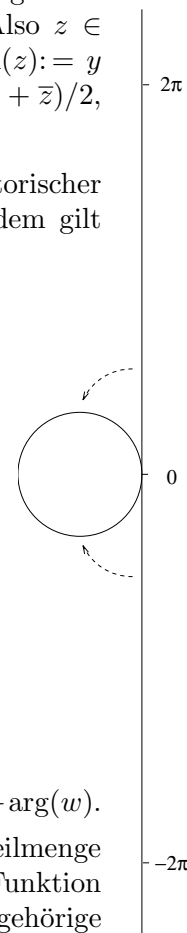
definiert Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit Anfangspunkt = Endpunkt = 1 (geschlossene Kurve).

1.6 Definition (i) $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend* \iff Für alle $x, y \in M$ existiert eine Kurve γ in M mit $x, y \in \operatorname{Sp}(\gamma)$.

(ii) M heißt *zusammenhängend* \iff Für alle offenen Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \cap U \cap V = \emptyset$ und $M \subset U \cup V$ gilt $M \subset U$ oder $M \subset V$.

1.7 Definition Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und N eine beliebige Menge. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *lokal-konstant*, wenn zu jedem $a \in M$ eine Umgebung U von $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $f(x) = f(a)$ für alle $x \in U \cap M$.

Man zeigt leicht: $M \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend genau dann, wenn jede lokal-konstante Abbildung auf M schon konstant ist.



1.8 Satz Für jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt

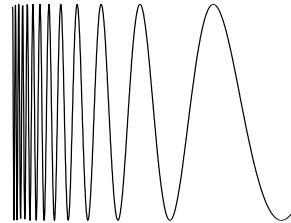
- (i) M wegzusammenhängend $\implies M$ zusammenhängend
- (ii) M offen und zusammenhängend $\implies M$ wegzusammenhängend.

1.9 Definition $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet $\iff D$ offen und zusammenhängend.

1.10 Beispiel In $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ betrachte die Teilmengen

$$A := \{(0, t) : |t| \leq 1\} \quad \text{und} \quad B := \{(t, \sin 2\pi/t) : t > 0\}.$$

Beide Teilmengen sind wegzusammenhängend. A ist abgeschlossen, B nicht. Die Vereinigung $M := A \cup B$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , die B enthält (die sogenannte abgeschlossene Hülle von B). M ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.



2. Komplex differenzierbare Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

2.1 Definition f heißt komplex differenzierbar in $a \iff$ Für jede Folge (z_k) in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$ existiert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(z_k) - f(a)}{z_k - a} \in \mathbb{C}$$

(dieser Limes ist unabhängig von der gewählten Folge, er wird mit $f'(a)$ oder $df/dz(a)$ bezeichnet und heißt komplexe Ableitung von f in a . Statt komplex differenzierbar schreiben wir auch kürzer \mathbb{C} -differenzierbar).

2.2 Lemma Es sind äquivalent

- (i) f in $a \in D$ komplex differenzierbar
- (ii) \exists Funktion $\Delta: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit Δ stetig in a und $f(z) = f(a) + \Delta(z)(z - a)$ für alle $z \in D$ (und dann gilt $\Delta(a) = f'(a)$).

Beweis. (i) \implies (ii) Sei f \mathbb{C} -differenzierbar in a . Setze

$$\Delta(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & z \neq a \\ f'(a) & z = a. \end{cases}$$

Dann ist Δ stetig in a und erfüllt die Bedingung. (ii) \implies (i) analog. □

2.3 Beispiel (i) $f(z) = z$, $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$f'(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - a}{z_k - a} = 1$$

(ii) $f(z) = z^n$, $n \geq 1$. Dann gilt

$$f'(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k^n - a^n}{z_k - a} = \lim_{k \rightarrow \infty} (z_k^{n-1} + z_k^{n-2}a + \dots + z_k a^{n-2} + a^{n-1}) = na^{n-1}$$

(iii) $f(z) = \bar{z}$, $a \in \mathbb{C}$.

Dann gilt $\Delta(a + 1/k) = 1$ und $\Delta(a + i/k) = -1$, d.h. f nicht \mathbb{C} -differenzierbar in a .

2.4 Elementare Rechenregeln $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$, $c \in \mathbb{C}$ und $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $a \in D$. Dann gilt

- (i) f stetig in a
- (ii) $f + g$ \mathbb{C} -differenzierbar in a und $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- (iii) cf \mathbb{C} -differenzierbar in a und $(cf)'(a) = cf'(a)$
- (iv) fg \mathbb{C} -differenzierbar in a und $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- (v) f/g \mathbb{C} -differenzierbar in a und $(f/g)'(a) = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)) / g(a)^2$ falls $g(a) \neq 0$.

Beweis. Wie im reellen Fall.

2.5 Kettenregel Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow V$ \mathbb{C} -differenzierbar in $a \in U$ und $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{C} -differenzierbar in $b := f(a) \implies h := g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist \mathbb{C} -differenzierbar in a und $h'(a) = g'(b)f'(a)$.

Beweis. Es gilt $f(z) = f(a) + \Delta(z)(z - a)$ mit Δ stetig in a und $g(w) = g(b) + \Theta(w)(w - b)$ mit Θ stetig in $b \implies$

$$h(z) = g(f(z)) = g(b) + \Theta(f(z))(f(z) - b) = h(a) + \underbrace{\Theta(f(z))\Delta(z)}_{\text{stetig in } a}(z - a)$$

d.h. $h'(a) = \Theta(f(a))\Delta(a) = g'(b)f'(a)$. □

2.6 Definition Für $D \subset \mathbb{C}$ offen heißt $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph $\iff f$ \mathbb{C} -differenzierbar in jedem $a \in D$.

Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(D) &:= \{f \mid f: D \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\} \\ \mathcal{H}(D) &:= \{f \mid f: D \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\} \end{aligned}$$

$\implies \mathcal{H}(D) \subset \mathcal{C}(D)$ komplexe Unteralgebra.

2.7 Beispiel (i) Jedes Polynom $p(z) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu z^\nu$ ist holomorph auf \mathbb{C} und

$$p'(z) = \sum_{\nu=1}^n \nu c_\nu z^{\nu-1}.$$

(ii) Die komplexe e -Funktion: Für $z \in \mathbb{C}$ betrachte

$$\exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^\nu = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

(a) Reihe konvergiert absolut!

Klar, denn $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z|^\nu / \nu!$ ist konvergente Majorante, d.h. insbesondere $|\exp(z)| \leq e^{|z|}$.

(b) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$.

Beweis. Setze $u_\nu := z^\nu / \nu!$, $v_\mu := w^\mu / \mu!$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} v_\mu \right) = \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} u_\nu v_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^n (u_p v_{n-p}) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} z^p w^{n-p} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w) \end{aligned}$$

(c) \exp hat keine Nullstelle in \mathbb{C} , genauer: $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Klar, denn für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) \exp(-z) = 1$.

Wir schreiben auch e^z statt $\exp(z)$.

(d) \exp ist holomorph auf \mathbb{C} , und es gilt $\exp'(a) = \exp(a)$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

Beweis. Sei (z_k) Folge in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ mit $a = \lim z_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\exp(z_k) - \exp(a)}{z_k - a} &= \exp(a) \frac{\exp(z_k - a) - 1}{z_k - a} = \exp(a) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{(z_k - a)^\nu}{z_k - a} \\ &= \exp(a) \left(1 + (z_k - a)g(z_k) \right) \quad \text{für } g(z) := \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(z - a)^{\nu-2}}{\nu!}. \end{aligned}$$

Für $\nu \geq \nu_0$ gilt $|z_k - a| < 1$ und folglich $|g(z_k)| \leq \sum_{\nu=2}^{\infty} 1/\nu! < e$.

Ist $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so genügt es wegen $e^z = e^x e^{iy}$ die Fälle e^x und e^{iy} einzeln zu betrachten:

(e) $x \in \mathbb{R} \implies (e^x)' = e^x = (e^{x/2})^2 > 0$, d.h. $x \mapsto e^x$ definiert monoton wachsenden Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$. Es gilt $e^x > 1 + x$ für $x > 0$, d.h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ und damit $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Folglich ist $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ein Gruppenisomorphismus. Umkehrabbildung ist der (nat.) Logarithmus $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

(f) Was ist e^{iy} für $y \in \mathbb{R}$?

Wegen $i^{2\nu} = (i^2)^\nu = (-1)^\nu$ und $i^{2\nu+1} = i(-1)^\nu$ gilt

$$e^{iy} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (iy)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)!} (-1)^\nu y^{2\nu} + i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)!} (-1)^\nu y^{2\nu+1} = \cos y + i \sin y,$$

d.h. $y \mapsto e^{iy}$ ist der bereits bekannte Aufwickelhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$. Insbesondere ist $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ surjektiv.

(g) Kern(\exp) = $\{z \in \mathbb{C} : e^z = 1\} = \{x + iy \in \mathbb{C} : e^x(\cos y + i \sin y) = 1\}$
 $= \{x + iy \in \mathbb{C} : x = 0, y \in 2\pi\mathbb{Z}\} = 2\pi i\mathbb{Z}$.

3. D-Stunde

Man gewinnt weitere holomorphe Funktionen durch $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$, $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, $\tan z = \sin z / \cos z$, usw.

3. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Wir schreiben stets $z = x + iy$, $f = u + iv$ mit $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$.

3.1 Definition f heißt reell (oder auch total) differenzierbar in $a = x_0 + iy_0 \in D \iff \exists$ in a stetige Funktionen $\Delta_1, \Delta_2: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(a) + \Delta_1(z)(x - x_0) + \Delta_2(z)(y - y_0)$ für alle $z \in D \implies f$ ist partiell differenzierbar in a und

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a) &:= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \Delta_1(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &:= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(a+it) - f(a)}{t} = \Delta_2(a). \end{aligned}$$

Ist f partiell differenzierbar in $a \in D$ (d.h. $\partial f / \partial x$ und $\partial f / \partial y$ existieren in a), so setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

(genannt ‘Wirtinger Ableitungen’). Offenbar gilt in a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right).$$

3.2 Satz Für die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und jedes $a \in D$ sind äquivalent

- (i) f komplex differenzierbar in a
(ii) f reell differenzierbar in a und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$$

- (iii) f reell differenzierbar in a und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

- (iv) Ist $f = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re}(f)$, so sind u, v reell differenzierbar in a und (Cauchy-Riemann-Dgl.)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Beweis. (i) \implies (ii) Sei f \mathbb{C} -differenzierbar in $a = x_0 + iy_0 \implies$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + \Delta(z)(z - a) = f(a) + \Delta(z)(x - x_0) + i\Delta(z)(y - y_0) \\ \implies \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \Delta(a) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(a). \end{aligned}$$

(ii) \iff (iii) trivial

(iii) \iff (iv) in a gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Behauptung folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil.

(iii) \implies (i) Es gelte $f(z) = f(a) + \Delta_1(z)(x - x_0) + \Delta_2(z)(y - y_0)$ mit Δ_1, Δ_2 stetig in a und $\Delta_1(a) + i\Delta_2(a) = 0$. Definiere $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} (\Delta_1(z) + i\Delta_2(z)) & z \neq a \\ 0 & z = a \end{cases}$$

$\implies g$ stetig in a wegen

$$\left| \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} \right| \equiv 1 \quad \text{für} \quad z \neq a.$$

Ferner gilt für alle $z \in D$

$$\begin{aligned} f(z) - f(a) &= (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z) \\ &= \frac{(z - a) + (\bar{z} - \bar{a})}{2} \Delta_1(z) + \frac{(z - a) - (\bar{z} - \bar{a})}{2i} \Delta_2(z) \\ &= (z - a) \underbrace{\left(\frac{\Delta_1(z) - i\Delta_2(z) + g(z)}{2} \right)}_{\text{stetig in } a}. \end{aligned}$$

□

Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei nun

$$\mathcal{C}^n(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ n-mal stetig reell differenzierbar}\}$$

oder als induktive Definition:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^0(D) &:= \mathcal{C}(D) \\ \mathcal{C}^{n+1}(D) &:= \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid \partial f / \partial x, \partial f / \partial y \in \mathcal{C}^n(D) \text{ existieren}\} \\ \mathcal{C}^\infty(D) &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(D).\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathcal{C}^0(D) \supset \mathcal{C}^1(D) \supset \mathcal{C}^2(D) \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty(D).$$

3.3 Folgerung Für jedes $f \in \mathcal{C}^1(D)$ gilt

$$f \text{ holomorph} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$$

(und dann gilt $f' = \partial f / \partial z = \partial f / \partial x$).

3.4 Beispiel $f(z) = z^2$, d.h. für $u_x := \partial u / \partial x$, $u_y := \partial u / \partial y$ usw gilt

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Für $f \in \mathcal{C}^2(D)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{i} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ heißt Laplace-Operator.

3.5 Definition $f \in \mathcal{C}^2(D)$ heißt *harmonisch* $\iff \Delta f = 0$.

3.6 Bemerkung Ist $f \in \mathcal{C}^2(D)$ holomorph $\implies f, \bar{f}, \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)$ sind harmonisch.

Beweis.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

Der Rest folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. □

3.7 Beispiel $f(z) = |z|^2 = z\bar{z} \implies \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 1$, d.h. $\Delta f = 4$,

d.h. f ist nicht harmonisch.

Die Menge

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ist eine Unteralgebra der Matrixalgebra $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ und als solche isomorph zu \mathbb{C} . Geometrisch sind die Elemente von \mathbb{C} sogenannte Drehstreckungen des \mathbb{R}^2 , in Bezug auf die komplexe Struktur von \mathbb{R}^2 sind es gerade die komplex linearen Operatoren. Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen besagen nun gerade, daß in jedem Punkt die holomorphe Funktion $f = u + iv$ ihre (reelle) Funktionalmatrix in \mathbb{C} hat, also komplex linear ist.

4. Kurvenintegrale

4. D-Stunde

Für $\alpha < \beta$ reelle Zahlen und $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \in \mathbb{C}$ definiert durch $\int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt$ falls $f = u + iv$. Wir wollen darauf Kurvenintegrale zurückführen.

4.1 Definition Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ eine glatte Kurve in D (d.h.

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C}$$

existiert für alle $t_0 \in [\alpha, \beta]$, und $\gamma': [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig). Für jede stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sei dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

das Integral von f längs γ .

$$L(\gamma) := \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

heißt die Bogenlänge von γ (Statt f wird *eigentlich* die Differentialform $f(z) dz$ integriert – vergleiche dazu auch den Anhang).

Wir verallgemeinern 4.1 sofort zu

4.2 Definition Die stetige Abbildung $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ heißt *stückweise glatte Kurve* in $D \iff \exists$ endlich viele Zwischenpunkte $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r = \beta$ so, daß $\gamma_k := \gamma|_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]}$ glatt für $1 \leq k \leq r$. Wir setzen dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

(hängt nicht von der Auswahl der Zwischenpunkte ab).

4.3 Rechenregeln für Kurvenintegrale Sei $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ *stückweise glatte Kurve* in $D \subset \mathbb{C}$. Dann gilt

- (i) $\int_{\gamma} dz: \mathcal{C}(D) \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex linear
- (ii) Für jedes $f \in \mathcal{C}(D)$ und

$$M := \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f(\gamma(t))| \quad \text{gilt} \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\gamma).$$

Beweis. (i) trivial

$$(ii) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} M \cdot |\gamma'(t)| dt = M \cdot L(\gamma).$$

□

4.4 Beispiel Definiere $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^*$ durch $\gamma(t) = e^{it} \implies \gamma$ glatte, geschlossene Kurve in \mathbb{C}^* und $\gamma'(t) = ie^{it}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest, $m := (n+1)i$ und $f(z) = z^n \implies$

$$\int_{\gamma} z^n dz = i \int_0^{2\pi} e^{mt} dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(denn e^{mt}/m ist Stammfunktion von e^{mt} für $m \neq 0$).

Insbesondere gilt also

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Seien nun für $k = 1, 2$ zwei glatte Kurven $\gamma_k: [\alpha_k, \beta_k] \rightarrow D$, $\alpha_k < \beta_k$, gegeben.

4.5 Definition γ_1, γ_2 gehen durch Parametertransformation auseinander hervor $\iff \exists$ Diffeomorphismus $\varphi: [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha_2, \beta_2]$ mit $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Es gibt dann 2 mögliche Fälle:

1. Fall: $\varphi(\alpha_1) = \alpha_2 \iff \varphi(\beta_1) = \beta_2 \iff \varphi' > 0$. Setze $\varepsilon := 1$.
 2. Fall: $\varphi(\alpha_1) = \beta_2 \iff \varphi(\beta_1) = \alpha_2 \iff \varphi' < 0$. Setze $\varepsilon := -1$.
- ($\varepsilon = 1$ orientierungstreue, $\varepsilon = -1$ orientierungsumkehrende Parametertransformation.)

4.6 Lemma Für alle $f \in \mathcal{C}(D)$ gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

(das Kurvenintegral ist unabhängig von orientierungstreuen Parametertransformationen).

Beweis. Mit $s = \varphi(t)$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_2(\varphi(t))) \gamma_2'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(\alpha_1)}^{\varphi(\beta_1)} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = \varepsilon \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

4.7 Definition Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Dann heißt $\Gamma \subset K$ ein glattes Randstück von K $\iff \exists$ bijektive \mathcal{C}^1 -Abbildung

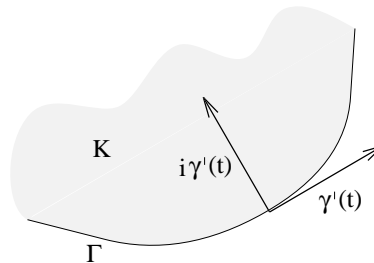
$$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \Gamma, \quad \alpha < \beta$$

so daß

- (i) $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$
- (ii) Zu jedem $t \in]\alpha, \beta[$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

$$[\gamma(t) + is\gamma'(t) \in K \iff s \geq 0].$$

(anschaulich: ‘ K liegt im Punkt $\gamma(t)$ links von Γ ’)



Für jedes $f \in \mathcal{C}(K)$ setzen wir dann

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_{\gamma} f(z) dz$$

(das ist unabhängig von der Auswahl von γ , wie man aus (i) und (ii) zeigen kann).

4.8 Definition Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum und ∂K der Rand. K hat stückweise glatten Rand $\iff \partial K = \cup_{k=1}^r \Gamma_k$ (endliche Vereinigung), wobei jedes Γ_k glattes Randstück von K ist und $\Gamma_j \cap \Gamma_k$ endlich für alle $j \neq k$ ist. Wir setzen dann

$$\int_{\partial K} f(z) dz := \sum_{k=1}^r \int_{\Gamma_k} f(z) dz$$

(unabhängig von der Auswahl der Γ_k).

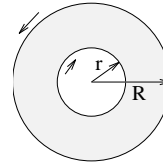
4.9 Beispiel

(i) $K := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ wobei $0 < r$ (Kreisscheibe). Wir schreiben dann

$$\int_{|z-a|=r} f(z) dz \quad \text{statt} \quad \int_{\partial K} f(z) dz .$$

(ii) $K := \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ wobei $0 < r < R$ (Kreisring). Dann ist

$$\int_{\partial K} = \int_{|z|=R} - \int_{|z|=r} .$$



5. Existenz von Stammfunktionen

5. D-Stunde

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{C}(D)$

5.1 Definition $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Integral oder auch Stammfunktion von f (genauer: der Differentialform $f(z) dz$) \iff Für jede stückweise glatte Kurve $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ mit $\alpha < \beta$ gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) .$$

f heißt integrierbar, wenn f eine Stammfunktion in D hat.

5.2 Lemma Für jedes $f \in \mathcal{C}(D)$ sind äquivalent

- (i) f integrierbar
- (ii) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve γ in D .
- (iii) Für je zwei stückweise glatte Kurven γ_1, γ_2 in D mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz .$$

Beweis. (i) \implies (ii) trivial.

(ii) \implies (iii): Angenommen, γ_1, γ_2 haben gleichen Anfangs- und Endpunkt.

O.B.d.A. $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow D$. Definiere $\gamma: [0, 2] \rightarrow D$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(2-t) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$\implies \gamma$ stückweise glatt, geschlossen und

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz .$$

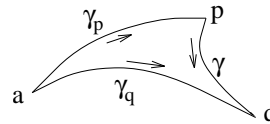
(iii) \implies (i) O.B.d.A. ist D Gebiet. Wähle $a \in D$ fest und definiere $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ wie folgt: Für jedes $p \in D$ wähle stückweise glatte Kurve $\gamma_p: [0, 1] \rightarrow D$ mit $\gamma_p(0) = a$ und $\gamma_p(1) = p$. Setze dann

$$F(p) := \int_{\gamma_p} f(z) dz .$$

Sei nun $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ stückweise glatte Kurve.

Setze $p := \gamma(\alpha)$, $q := \gamma(\beta)$.

Dann gilt



$$F(p) + \int_{\gamma} f(z) dz = F(q) . \quad \square$$

Praktisches Kriterium ist

5.3 Satz Für jedes offene $D \subset \mathbb{C}$ und jedes $f \in \mathcal{C}(D)$ sind äquivalent

- (i) F ist Stammfunktion von f
- (ii) $F \in \mathcal{H}(D)$ und $F' = f$.

Beweis. (i) \implies (ii) Sei $a \in D$ fest und $r > 0$ so gewählt, daß $U := \{|z - a| < r\} \subset D$ gilt. Definiere $\Delta: D \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\Delta(a) := f(a)$ und $F(z) = F(a) + \Delta(z)(z - a)$ für alle $z \in D$. Es genügt zu zeigen, daß Δ stetig in a ist. Dazu genügt der Nachweis von

$$\Delta(z) = \int_0^1 f(a + t(z - a)) dt \quad \text{für alle } z \in U .$$

Das ist aber klar. Denn $\gamma(t) := a + t(z - a)$ definiert glatte Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = z$, und somit gilt wegen F Stammfunktion von f

$$F(z) - F(a) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(a + t(z - a)) dt \cdot (z - a) .$$

(ii) \implies (i) Sei $F' = f$ und $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ glatte Kurve $\implies h(t) := F(\gamma(t))$ differenzierbar und $h'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t) \implies F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = h(\beta) - h(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} h'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz$. Gleiches gilt allgemeiner für γ stückweise glatt, d.h. F ist Stammfunktion. \square

Für gewisse Gebiete kann 5.2 verschärft werden:

5.4 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe. Dann ist $f \in \mathcal{C}(D)$ bereits dann integrabel, wenn

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset D$ gilt.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist 0 der Mittelpunkt von D . Für jedes $a = \alpha + i\beta \in D$ sei γ bzw. σ diejenige Kurve, die 0 mit a längs zweier achsenparalleler Geradenstücke über $\alpha = \text{Re}(a)$ bzw. $i\beta$ verbindet.



Nach Voraussetzung ist $F(a) := \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz$ wohldefiniert, und für alle $x \in \mathbb{R}$ nahe $0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(a+x) = F(a) + \int_0^1 f(a+tx)x dt \quad \text{d.h.}$$

$$\frac{F(a+x) - F(a)}{x} = \int_0^1 f(a+tx) dt$$

$\implies \partial F/\partial x = f$ und analog $\partial F/\partial y = if$, d.h. F holomorph und $F' = f$. □

5.5 Definition Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{C}(D)$. f heißt lokal-integrabel \iff zu jedem $a \in D$ existiert offene Umgebung $U \subset D$ von a mit $f|U$ integrabel.

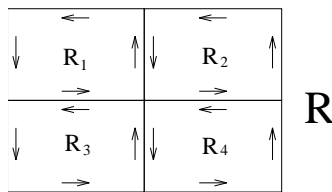
Wir werden später sehen, daß 'holomorph' und 'lokal integrabel' äquivalent sind. Auf $D = \mathbb{C}^*$ ist z.B. die Funktion $1/z$ nicht integrabel aber lokal-integrabel, denn es gilt

5.6 Satz Jede holomorphe Funktion ist lokal-integrabel.

Beweis. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(D)$. Da jedes $a \in D$ eine Kreisscheibenumgebung in D hat, genügt es wegen 5.4 zu zeigen:

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset D$. Sei also R fest und $d := L(\partial R)$ der Umfang von R . Zur Abkürzung setzen wir noch $\omega := f(z) dz$. Teile R durch die beiden Seitenhalbierenden in 4 kongruente Teilrechtecke $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$



Dann heben sich die Integrale über die inneren Kurvenstücke fort

$\implies \int_{\partial R} \omega = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial R_k} \omega \implies \exists j$ mit $1 \leq j \leq 4$ und $|\int_{\partial R} \omega| \leq 4|\int_{\partial R_j} \omega|$. Setze $R^0 := R$ und $R^1 := R_j$. Iterieren dieses Verfahrens liefert Folge $R^0 \supset R^1 \supset R^2 \supset \dots \supset R^n \supset \dots$ achsenparalleler Rechtecke mit

$$\left| \int_{\partial R^n} \omega \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R^{n+1}} \omega \right| \quad \text{und} \quad L(\partial R^{n+1}) = \frac{1}{2} L(\partial R^n), \quad \text{d.h.}$$

$$L(\partial R^n) = d/2^n \quad \text{und} \quad \left| \int_{\partial R^n} \omega \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial R} \omega \right|.$$

Ein Kompaktheitsargument liefert die Existenz eines $a \in D$ mit $a \in R^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen f holomorph existiert $\Delta: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit Δ stetig in a und

$$f(z) = f(a) + \Delta(z)(z - a) = f(a) + \Delta(a)(z - a) + g(z)(z - a) ,$$

wobei $g(z) := \Delta(z) - \Delta(a)$ stetig in a und $g(a) = 0$ gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben $\implies \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|g(z)| \leq \varepsilon/d^2$ für alle $z \in R^n$. Wegen $|z - a| \leq L(\partial R^n) = d/2^n$ für alle $z \in R^n$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} \omega \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial R^n} \omega \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\partial R^n} (f(a) + \Delta(a)(z - a)) dz + \int_{\partial R^n} g(z)(z - a) dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\partial R^n} g(z)(z - a) dz \right| \leq 4^n \cdot d/2^n \cdot \varepsilon/d^2 \cdot d/2^n = \varepsilon , \end{aligned}$$

da der Integrand $f(a) + \Delta(a)(z - a)$ eine Stammfunktion besitzt. □

5.7 Folgerung Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{C}(D)$ und $f|_{D \setminus \{a\}}$ holomorph für ein $a \in D$. Dann ist f lokal-integrabel in D . 6. D-Stunde

Beweis. Genügt zu zeigen, daß

$$(*) \quad \int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

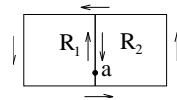
für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset D$. Nach Beweis von 5.6 gilt $(*)$ stets, wenn $R \subset D \setminus \{a\}$, d.h. $a \notin R$. Betrachten wir für $a \in R$ die beiden Fälle:

Fall 1 $a \in \partial R$. Dann ist R 'Limes' einer Folge achsenparalleler Rechtecke $R^n \subset D \setminus \{a\}$ und somit



$$\int_{\partial R} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\partial R^n} f(z) dz}_{=0} = 0 .$$

Fall 2 $a \notin \partial R$. Zerlege R in zwei Teilrechtecke $R_1 \cup R_2$ mit $a \in \partial R_1 \cap \partial R_2$



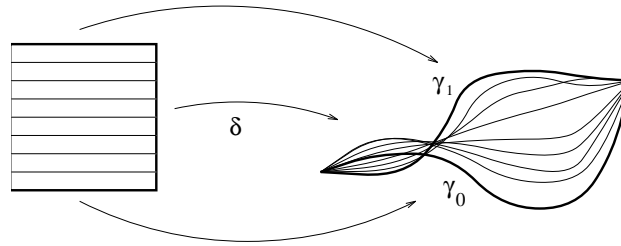
$$\implies \int_{\partial R} f(z) dz = \underbrace{\int_{\partial R_1} f(z) dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial R_2} f(z) dz}_{=0} = 0 . \quad \square$$

6. Der Cauchysche Integralsatz

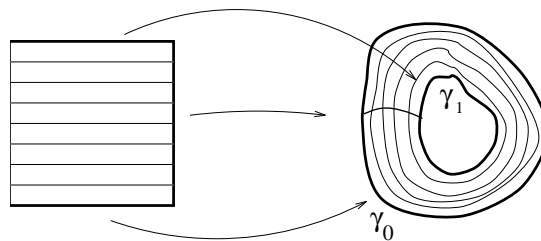
Im folgenden sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $I := [0, 1]$. Dann ist $I \times I = \{(t, s) : t, s \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ das Einheitsquadrat.

6.1 Definition Zwei stetige Kurven $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow D$ heißen *homotop in D bei festen Endpunkten* $\iff \exists$ eine stetige Abbildung $\delta: I \times I \rightarrow D$ mit $\delta(t, k) = \gamma_k(t)$ und $\delta(k, s) = \delta(k, 0)$ für alle $s, t \in I$ und $k = 0, 1$.

δ heißt Homotopie. Die Bedingungen legen δ auf dem ‘Rand’ von $I \times I$ fest. Einschränkung von δ auf unteres Randstück ist γ_0 , auf oberes γ_1 , auf linkes und rechtes jeweils konstant.



6.2 Definition Zwei geschlossene stetige Kurven $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow D$ heißen *homotop in D als geschlossene Kurven* $\iff \exists$ stetige Abbildung $\delta: I \times I \rightarrow D$ mit $\delta(t, k) = \gamma_k(t)$ und $\delta(0, s) = \delta(1, s)$ für alle $s, t \in I$ und $k = 0, 1$.



Für jedes $a \in D$ ist offenbar die Kurve $\gamma(t) \equiv a$ geschlossen, diese heißt *konstante Kurve*.

6.3 Definition Die geschlossene stetige Kurve $\gamma: I \rightarrow D$ heißt *nullhomotop in D* $\iff \exists$ konstante Kurve γ_0 in D so, daß γ_0, γ homotop in D als geschlossene Kurven.

Man sagt auch: Die geschlossene Kurve γ läßt sich in D stetig auf einem Punkt zusammenziehen.

6.4 Beispiel (i) Sei D offene Kreisscheibe. Dann ist jede stetige, geschlossene Kurve $\gamma: I \rightarrow D$ nullhomotop in D . *Beweis:* Sei $p \in D$ der Mittelpunkt und definiere $\delta: I \times I \rightarrow D$ durch $\delta(t, s) = p + s(\gamma(t) - p)$.

(ii) Sei $D = \mathbb{C}^*$ und $\gamma(t) = e^{2\pi it} \implies \gamma$ geschlossene glatte Kurve in \mathbb{C}^* , die nicht nullhomotop in \mathbb{C}^* ist (Beweis später - γ ist aber nullhomotop in \mathbb{C}).

6.5 Definition D heißt *einfach-zusammenhängend* \iff Jede geschlossene stetige Kurve in D ist nullhomotop in D .

Z.B. ist die Vereinigung zweier disjunkter Kreisscheiben einfach-zusammenhängend, aber nicht zusammenhängend.

6.6 Cauchyscher Integralsatz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und f eine holomorphe Funktion auf D . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve γ in D , die in D nullhomotop ist.

Allgemeiner zeigen wir

6.7 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und seien $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow D$ zwei stückweise glatte Kurven. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

für jedes $f \in \mathcal{H}(D)$, falls wenigstens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) γ_0, γ_1 sind homotop bei festen Endpunkten
- (ii) γ_0, γ_1 sind homotop als geschlossene Kurven.

6.6 folgt aus 6.7.ii für den speziellen Fall γ_0 konstante Kurve und $\gamma = \gamma_1$, denn wegen $\gamma'_0 \equiv 0$ gilt $\int_{\gamma_0} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}(D)$.

6.8 Bemerkung Wir werden den Beweis für 6.7 und damit 6.6 für den (wegen 5.6 allgemeineren) Fall führen, daß f lokal-integrabel statt holomorph ist.

Zunächst einige Vorbereitungen: Sei im folgenden Q ein topologischer Raum und $\varphi: Q \rightarrow D$ eine stetige Abbildung (hier vornehmlich 2 Fälle: $Q = I \times I$ und $\varphi = \delta$ Homotopie oder $Q = I$ und $\varphi = \gamma$ Kurve).

6.9 Definition $F: Q \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}(D)$ längs $\varphi \iff$ zu jedem $q \in Q$ existiert eine Umgebung U von q in Q , ein offene Umgebung V von $\varphi(q)$ in D und eine Stammfunktion G von $f|_V$ so, daß $\varphi(U) \subset V$ und $F(u) = G(\varphi(u)) \quad \forall u \in U$.

Für den Spezialfall $Q = D$ und $\varphi: D \rightarrow D$ identische Abbildung ist das der alte Begriff.

Einfach einzusehen ist (Beweis: Hörer)

6.10 Hilfssatz Sei $F: Q \rightarrow \mathbb{C}$ Stammfunktion von f längs $\varphi: Q \rightarrow D$. Dann gilt

- (i) F ist stetig
- (ii) Für jeden topologischen Raum M und jede stetige Abbildung $\sigma: M \rightarrow Q$ ist auch $F \circ \sigma$ eine Stammfunktion von f längs $\varphi \circ \sigma: M \rightarrow D$
- (iii) Für jede weitere Stammfunktion $\tilde{F}: Q \rightarrow \mathbb{C}$ von f längs φ ist die Funktion $\tilde{F} - F$ lokal-konstant.

6.11 Hilfssatz Sei $\gamma: I \rightarrow D$ eine stückweise glatte Kurve und $F: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}(D)$ längs γ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(1) - F(0) .$$

Beweis. Wegen I kompakt existieren endlich viele Zwischenpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und für $k = 1, \dots, n$ offene Teilmenge $V_k \subset D$, eine Stammfunktion F_k von $f|_{V_k}$, so daß $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset V_k$ und $F(t) = F_k(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$. \implies

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n F_k(\gamma(t_k)) - F_k(\gamma(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n F(t_k) - F(t_{k-1}) = F(1) - F(0) . \end{aligned} \quad \square$$

6.12 Hilfssatz Sei $f \in \mathcal{C}(D)$ lokal-integrabel und $\varphi: I \times I \rightarrow D$ stetig. Dann existiert eine Stammfunktion von f längs φ .

Beweis. Setze $Q := I \times I$ und bezeichne mit $T \subset \mathbb{R}$ die Menge aller $t > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset Q$ mit Umfang $\leq t$ existiert Stammfunktion von f längs $\varphi|_R$. Zu zeigen: Es gibt ein $t \in T$ mit $t \geq 4$ (denn Q hat Umfang 4).

Behauptung 1: $T \neq \emptyset$

Andernfalls würde zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Rechteck $R_n \subset Q$ mit Umfang $\leq 1/n$ so existieren, daß f keine Stammfunktion längs $\varphi|_{R_n}$ besitzt. Wähle $a_n \in R_n$ beliebig \implies Die Folge (a_n) hat Häufungspunkt $a \in Q$ (da Q kompakt). Also existiert Umgebung U von $a \in Q$ und Stammfunktion F von f längs $\varphi|_U$ (da f lokal-integrabel). Andererseits existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n \subset U \implies F|_{R_n}$ ist Stammfunktion von f längs $\varphi|_{R_n}$. Widerspruch.

Behauptung 2: $t \in T \implies 4t/3 \in T$.

Sei also $t \in T$ und $R \subset Q$ ein achsenparalleles Rechteck mit Umfang $\leq 4t/3 \implies R = R_1 \cup R_2$, wobei R_1, R_2 achsenparallele Rechtecke mit Umfang $\leq t$ sind (halbiere die beiden längeren Seiten) $\implies \exists$ Stammfunktion F_k von f längs $\varphi|_{R_k}$ für $k = 1, 2$, die Einschränkungen $F_k|_{R_1 \cap R_2}$ sind Stammfunktionen längs $\varphi|_{R_1 \cap R_2} \implies F_1|_{R_1 \cap R_2} - F_2|_{R_1 \cap R_2}$ lokal-konstant und somit konstant, da $R_1 \cap R_2$ zusammenhängend. O.B.d.A stimmen F_1, F_2 auf $R_1 \cap R_2$ überein (sonst subtrahiere von F_1 die obige Konstante), d.h. \exists genau eine Funktion $F: R \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F|_{R_k} = F_k$ für $k = 1, 2$, d.h. F ist Stammfunktion von f längs $\varphi|_R$, d.h. $4t/3 \in T$.

Beide Behauptungen ergeben zusammen: $\exists t \in T$ mit $t \geq 4$. \square

Beweis von 6.7 Sei also $f \in \mathcal{C}(D)$ lokal-integrabel und $\delta: I \times I \rightarrow D$ eine Homotopie der stückweise glatten Kurven $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow D$. Wegen 6.12 existiert Stammfunktion F von f längs δ .

Wir parametrisieren die 4 Seiten von $I \times I$ durch Kurven $\sigma_k, \tau_k: I \rightarrow I \times I$, $k = 0, 1$ vermöge $\sigma_k(t) := (k, t)$ und $\tau_k(t) := (t, k)$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\tau_1} & \\ \sigma_0 \uparrow & \boxed{I \times I} & \uparrow \sigma_1 \\ & \xleftarrow{\tau_0} & \end{array}$$

Wegen 6.10.ii ist $F_k := F \circ \sigma_k$ Stammfunktion von f längs $\delta \circ \sigma_k$, und $F \circ \tau_k$ ist Stammfunktion von f längs $\delta \circ \tau_k = \gamma_k$, d.h. wegen 6.11 gilt

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = F(1, k) - F(0, k) = F_1(k) - F_0(k).$$

Es genügt also zu zeigen, daß $F_1 - F_0$ konstant auf I ist, falls (i) oder (ii) gilt.

Fall (i) Dann ist $\delta \circ \sigma_k$ konstant $\implies h \equiv 0$ ist Stammfunktion von f längs $\delta \circ \sigma_k \implies F_k = F_k - 0$ ist lokal-konstant auf I und somit auch konstant auf $I \implies F_1 - F_0$ konstant.

Fall (ii) Dann gilt $\delta \circ \sigma_0 = \delta \circ \sigma_1$, d.h. F_0, F_1 sind Stammfunktionen von f längs $\delta \circ \sigma_0 \implies F_1 - F_0$ lokal-konstant und somit konstant auf I . \square

6.13 Folgerung Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen und einfach-zusammenhängend, so besitzt jede holomorphe Funktion auf D eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $\gamma: I \rightarrow D$ stückweise glatt, geschlossen $\implies \gamma$ nullhomotop in $D \implies \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für $f \in \mathcal{H}(D) \implies f$ integrabel wegen 5.2. \square

Anwendung: Zweige des Logarithmus:

Sei $D \subset \mathbb{C}^*$ einfach-zusammenhängendes Gebiet $\implies \exists F \in \mathcal{H}(D)$ mit $F'(z) = 1/z$.

$\exists c \in \mathbb{C}^*$ mit $\exp(F(z)) = cz$ (differenziere $\exp(F(z))/z$) $\implies F$ kann so gewählt werden, daß $c = 1$, d.h. $\exp(F(z)) = z$. Jedes derartige F heißt 'Zweig des Logarithmus auf D '. Ist F Zweig des Logarithmus, so auch $F + 2n\pi i \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Ist $1 \in D$ und $F(1) = 0$, so heißt F 'Hauptzweig des Logarithmus.' Ist speziell

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\} = \{re^{it} : r > 0 \text{ und } |t| < \pi\}$$

die negativ geschlitzte Ebene $\implies D$ einfach-zusammenhängend, und der Hauptzweig des Logarithmus wird mit \log oder \ln bezeichnet.

Sei nun $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}^*$ stückweise glatte Kurve.

6.14 Behauptung $\exp\left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z}\right) = \frac{\gamma(\beta)}{\gamma(\alpha)}$.

Beweis. 1. Fall $D \subset \mathbb{C}^*$ ist Gebiet, und es existiert ein Zweig \log des Logarithmus auf D mit $\operatorname{Sp}(\gamma) \subset D$.

$$\implies \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \log(\gamma(\beta)) - \log(\gamma(\alpha)).$$

2. Fall allgemein. Dann ist γ Zusammenstückelung von Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, für die Fall 1 gilt.

6.15 Folgerung Für jede stückweise glatte geschlossene Kurve γ in \mathbb{C}^* gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}.$$

Diese ganze Zahl heißt die Umlaufzahl oder Windungszahl von γ um 0.

6.16 Alternative Version des Cauchyschen Integralsatzes Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(D)$ holomorph, $K \subset D$ Kompaktum mit stückweise glattem Rand $\implies \int_{\partial K} f(z) dz = 0$.

Ein Beweis findet sich im Anhang (vergl. 12.3).

7. Die Cauchysche Integralformel

8. D-Stunde

Sei $w \in \mathbb{C}$ und $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve. Dann heißt

$$I(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} \in \mathbb{Z}$$

die Umlaufzahl, Windungszahl oder auch kurz der Index von γ in w .

7.1 Eigenschaften des Index Sei $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise glatte, geschlossene Kurve und $W := \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma)$. Dann ist

$$\begin{aligned} I(\gamma, \cdot): W &\rightarrow \mathbb{Z} \\ w &\mapsto I(\gamma, w) \end{aligned}$$

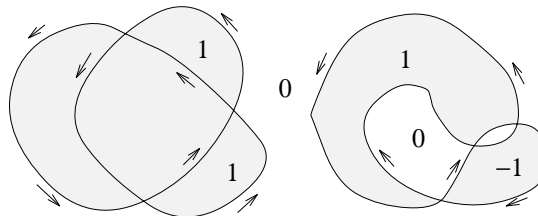
eine lokal-konstante Funktion auf W . Insbesondere ist $I(\gamma, \cdot)$ konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von W und

$$\text{Inn}(\gamma) := \{w \in W : I(\gamma, w) \neq 0\}$$

(genannt ‘Inneres von γ ’) ist beschränkt in \mathbb{C} .

Beweis. $I(\gamma, w)$ ist als Integral stetig in w und ganzzahlig, d.h. lokal-konstant. Wegen $\text{Sp}(\gamma)$ kompakt existiert ein $r > 0$ mit $D := \{|z| > r\} \subset W$. Für $|w|$ hinreichend groß ist $|I(\gamma, w)| < 1 \implies I(\gamma, w) = 0$ für $w \in D \implies D \cap \text{Inn}(\gamma) = \emptyset$. \square

Beispiele: (Inneres grau)



7.2 Cauchysche Integralformel Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(D)$, γ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in D , die in D nullhomotop ist. Dann gilt

$$I(\gamma, w) \cdot f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

für alle $w \in D \setminus \text{Sp}(\gamma)$.

Beweis. Sei $w \in D \setminus \text{Sp}(\gamma)$ fest $\implies f(z) = f(w) + \Delta(z)(z - w)$ für alle $z \in D$ und Δ stetig in w . Auf $D \setminus \{w\}$ ist

$$\Delta(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

holomorph $\implies \Delta$ lokal-integrabel auf D wegen 5.7 $\implies \int_{\gamma} \Delta(z) dz = 0$ nach Cauchyschem Integralsatz und damit

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z - w} dz + \int_{\gamma} \Delta(z) dz = f(w) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} = f(w) \cdot 2\pi i \cdot I(\gamma, w). \quad \square$$

Insbesondere ist also f im Inneren von γ durch die Werte auf $\text{Sp}(\gamma)$ schon eindeutig bestimmt. Speziell also z.B.: Ist f holomorph auf Umgebung von $\{|z - a| \leq r\}$, so gilt für alle w mit $|w - a| < r$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Wir können die Cauchysche Integralformel auch schreiben in der Form ($z \rightarrow \zeta$, $w \rightarrow z$)

$$I(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in D \setminus \text{Sp}(\gamma).$$

Die linke Seite ist holomorph auf $D \setminus \text{Sp}(\gamma)$. Was ist dann $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ angewendet auf die rechte Seite?

7.3 Hilfssatz aus der reellen Analysis Sei $I = [0, 1]$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: I \times V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $t \in I$, $x \in V$ und $1 \leq k \leq n$ existiere $\partial f/\partial x_k(t, x)$, und es sei $\partial f/\partial x_k: I \times V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert $F(x) := \int_0^1 f(t, x) dt$ stetig differenzierbare Funktion F auf V mit $\partial F/\partial x_k(x) = \int_0^1 \partial f/\partial x_k(t, x) dt$ für alle k .

Beweis. Einfache Anwendung des Mittelwertsatzes.

Formulierung für unsere Zwecke: Sei $K \subset \mathbb{C}$ Teilmenge, $\gamma: I \rightarrow K$ stückweise glatte Kurve, $W \subset \mathbb{C}$ offen, $f: K \times W \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so daß $f(\zeta, z)$ für alle $\zeta \in K$ holomorph als Funktion von $z \in W$ (und zusätzlich $df/dz: K \times W \rightarrow \mathbb{C}$ sei ebenfalls stetig - wir werden später sehen (vgl. 7.10), daß diese Bedingung in der holomorphen Situation automatisch erfüllt ist). Dann gilt

7.4 Hilfssatz $F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta, z) d\zeta$ definiert holomorphe Funktion auf W mit

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{df}{dz}(\zeta, z) d\zeta.$$

Beweis. $F \in \mathcal{C}^1(W)$ und

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\zeta, z) d\zeta = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial F}{\partial z}(z) = F'(z). \quad \square$$

Als Anwendung erhalten wir durch Differentiation.

7.5 Cauchy-Integralformel für die Ableitung Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{H}(D)$ eine holomorphe Funktion auf D . Dann ist f n -mal komplex differenzierbar und für die n -te Ableitung $f^{(n)} \in \mathcal{H}(D)$ gilt:

$$I(\gamma, z)f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

für jede nullhomotope, stückweise glatte, geschlossene Kurve γ in D und $z \in D \setminus \text{Sp}(\gamma)$.

Beweis. Durch Induktion nach n . Für $n = 0$ ist $f^{(0)} = f$ und die Behauptung ist genau die Cauchy-Integralformel. Sei also $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $K := \text{Sp}(\gamma)$, $W := D \setminus K$. Dann definiert $g(\zeta, z) := f(\zeta)/(\zeta - z)^{n+1}$ stetige Funktion $g: K \times W \rightarrow \mathbb{C}$ mit $dg/dz(\zeta, z) = (n+1)f(\zeta)/(\zeta - z)^{n+2}$ ebenfalls stetig. Wegen $I(\gamma, z)$ lokal-konstant \implies

$$I(\gamma, z)f^{(n+1)}(z) = \frac{d}{dz} \left(I(\gamma, z)f^{(n)}(z) \right) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} (n+1) \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta. \quad \square$$

7.6 Folgerung $\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{C}^\infty(D)$.

7.7 Folgerung Für jedes offene $D \subset \mathbb{C}$ und jedes $f \in \mathcal{C}(D)$ sind äquivalent

- (i) f holomorph
- (ii) f lokal-integrabel

Beweis. (i) \implies (ii) bereits bewiesen (vgl. 5.6). (ii) \implies (i) (auch Satz von Morera genannt): Sei f lokal-integrabel und $a \in D \implies \exists$ offene Umgebung U von a in D und $\exists F \in \mathcal{H}(U)$ mit $F' = f|_U \implies f|_U$ holomorph. Also f holomorph, da $a \in D$ beliebig war. \square

7.8 Folgerung Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(D)$ mit $|f| \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $a \in D$ und $r > 0$ mit $\{|z - a| < r\} \subset D$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M \quad \text{Cauchysche Ungleichungen.}$$

Beweis. Wähle $\rho > 0$ mit $\rho < r$ beliebig und definiere $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ durch $\gamma(t) = a + \rho e^{2\pi i t} \implies \gamma$ nullhomotop in D und somit

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \implies |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} = \frac{n!}{\rho^n} M.$$

Mit $\rho \nearrow r$ folgt die Behauptung. \square

Weitere Folgerung:

9. D-Stunde

7.9 Satz von Liouville Jede beschränkte holomorphe Funktion f auf \mathbb{C} ist konstant.

Beweis. Angenommen $|f| \leq M \in \mathbb{R} \implies |f'(a)| \leq M/r$ für alle $a \in \mathbb{C}$ und alle $r > 0 \implies f' \equiv 0 \implies f$ konstant. \square

Der Satz von Liouville ergibt sofort einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra: Es sei $p(z)$ ein komplexes Polynom von Grad $n \geq 1$. Dann existiert ein $R > 0$ mit $|p(z)| > 1$ für alle z mit $|z| > R$. Angenommen, p hat keine Nullstelle in \mathbb{C} . Dann ist $f := 1/p$ eine beschränkte holomorphe Funktion auf \mathbb{C} . Nach Liouville ist dann aber f und folglich auch p konstant, ein Widerspruch. \square

Als weitere Folgerung von 7.5 zeigen wir

7.10 Lemma Sei Q topologischer Raum, $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: Q \times D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für jedes feste $q \in Q$ sei $f(q, z)$ holomorph in z . Dann ist auch $df/dz: Q \times D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Beweis. Sei $a \in D$ fest. Dann existiert ein $r > 0$ mit $K := \{|z - a| \leq r\} \subset D$. Sei $S := \partial K$ und U das Innere von $K \implies h: S \times Q \times U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $h(\zeta, q, z) := f(q, \zeta)(\zeta - z)^{-2}$ ist stetig, und somit ist auch $df/dz(q, z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial K} h(\zeta, q, z) d\zeta$ stetig auf $Q \times D$. \square

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und (f_k) Folge stetiger Funktionen auf D . Man sagt: (f_k) konvergiert kompakt gegen die Funktion f auf $D \iff$ Für jedes Kompaktum $K \subset D$ konvergiert die Folge der Einschränkungen $(f_k|_K)$ gleichmäßig auf K gegen $f|_K$.

7.11 Satz von Weierstraß Sei (f_k) eine Folge holomorpher Funktionen auf $D \subset \mathbb{C}$, die kompakt gegen die Grenzfunktion f konvergiert. Dann ist auch f holomorph, und die Folge der Ableitungen (f'_k) konvergiert kompakt gegen f' .

Beweis. f ist als kompakter Limes stetiger Funktionen stetig. Für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset D$ gilt

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial R} f_k(z) dz = 0$$

$\implies f$ lokal-integrierbar $\implies f$ holomorph. $f' = \lim f'_k$ folgt wie im Beweis von 7.10. \square

Im reellen falsch: $f(x) = |x|$ ist gleichmäßiger Limes differenzierbarer Funktionen auf \mathbb{R} .

7.12 Alternative Version der Cauchyschen Integralformel Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(D)$, $n \in \mathbb{Z}$, $K \subset D$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand. Dann gilt für jedes a im Innern von K

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

8. Potenzreihen

Jeder 'formale' Ausdruck $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$, $c_n \in \mathbb{C}$, heißt formale Potenzreihe (in X über \mathbb{C}), dabei gelte für jedes $g = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n$: $f = g \iff c_n = d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

[Formal heißt: Das Summensymbol ist nicht die Aufforderung, etwas zu summieren. Es kommt vielmehr auf die Folge der Koeffizienten (c_n) an, man könnte also sauberer formale Potenzreihen als Zahlenfolgen in \mathbb{C} definieren.]

Sei $F := \mathbb{C}[[X]] := \{\text{formale Potenzreihen in } X \text{ über } \mathbb{C}\}$. Man setzt für f, g wie oben und $c \in \mathbb{C}$

$$f + g := \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) X^n \quad fg := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} c_j d_k \right) X^n \quad cf := \sum_{n=0}^{\infty} (c c_n) X^n$$

$\implies F$ ist eine Algebra (über \mathbb{C}). $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ heißt Polynom vom Grad $\leq d \iff c_n = 0$ für alle $n > d$ (schreiben dann auch $\sum_{n=0}^d c_n X^n$).

Sei $S := \mathbb{C}[X]$ die Unter algebra aller Polynome. Identifizieren wir $c \in \mathbb{C}$ mit dem konstanten Polynom $cX^0 \in S$, erhalten wir die Kette von Algebren

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}[[X]].$$

Sei nun $f = \sum c_n X^n \in F$. Ist dann $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ konvergent, so bezeichnen wir den Reihenwert mit $f(z)$. Ist die Reihe divergent, so ist $f(z)$ nicht definiert. Offenbar gilt stets $f(0) = c_0$ (konstantes Glied).

8.1 Satz Zu jedem $f = \sum c_n X^n \in F$ existiert genau ein $R = R(f)$ mit $0 \leq R \leq \infty$ und

(i) für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ konvergiert die Reihe $\sum c_n z^n$ absolut

(ii) für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ divergiert die Reihe $\sum c_n z^n$

[R heißt Konvergenzradius von f und $\{|z| < R\}$ heißt Konvergenzgebiet von f].

Beweis. Setze (wobei $1/\infty := 0$ und $1/0 := \infty$ gelte)

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

ad (i) Angenommen $|z| < R \implies \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| < 1$ d.h. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, p < 1$ mit

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| \leq p < 1 \quad \forall n \geq n_0$$

$\implies |c_n z^n| \leq p^n \quad \forall n \geq n_0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ absolut konvergent.
 ad (ii) Angenommen, $\sum c_n z^n$ konvergent $\implies |c_n z^n| \leq 1$ für $n \geq n_0 \implies$

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| \leq 1 \quad \text{für } n \geq n_0 \implies |z| \leq R. \quad \square$$

Offenbar gilt auch $R = \sup\{r \geq 0 : \sum |c_n| r^n < \infty\}$.

8.2 Lemma Für alle $f, g \in \mathbb{C}[[X]]$ gilt

$$R(f+g) \geq \min(R(f), R(g)) \quad \text{und} \quad R(f \cdot g) \geq \min(R(f), R(g)).$$

Beweis. Sei $f = \sum c_n X^n, g = \sum d_n X^n$ und $r < \min(R(f), R(g)) \implies$

$$\sum |c_n + d_n| r^n \leq \sum |c_n| r^n + \sum |d_n| r^n < \infty,$$

d.h. $r \leq R(f+g)$. Ferner gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j+k=n} c_j d_k \right| r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} |c_j| \cdot |d_k| \right) r^n = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| r^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |d_k| r^k \right) < \infty,$$

d.h. $r \leq R(f \cdot g)$. Die Behauptung ergibt sich nun durch Limesbildung $r \nearrow \min(R(f), R(g))$. \square

8.3 Folgerung Die Menge $K := \mathbb{C}\langle X \rangle$ aller konvergenten Potenzreihen $f \in F$ (d.h. $R(f) > 0$) ist eine Unteralgebra von F . Wir haben also Kette von Algebren

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}\langle X \rangle \subset \mathbb{C}[[X]].$$

8.4 Satz Es sei $f = \sum c_n X^n$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann stellt $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ auf der Kreisscheibe $D := \{|z| < R\}$ eine holomorphe Funktion dar. Die Reihe $\sum c_n z^n$ konvergiert kompakt auf D . Für alle $z \in D$ gilt zudem $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ und $c_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Beweis. Sei $A \subset D$ kompakt $\implies \exists r < R$ mit $|z| \leq r$ für alle $z \in A$. Zu $\varepsilon > 0$ vorgegeben existiert somit ein n_0 mit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |c_n| r^n < \varepsilon \implies \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z^n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |c_n| r^n < \varepsilon$$

für alle $z \in A$, d.h. Konvergenz auf A ist gleichmäßig \implies Grenzfunktion holomorph auf D und f' hat angegebene Form wegen 7.11.

Als gewisse Umkehrung von 8.4 erhalten wir

8.5 Satz Es sei $0 < r \leq \infty$ und f eine holomorphe Funktion auf der Kreisscheibe $D = \{|z| < r\}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $\sum c_n X^n$ mit Konvergenzradius $R \geq r$, die auf D die Funktion f darstellt, d.h. $f(z) = \sum c_n z^n, z \in D$. Für die Koeffizienten c_n und $0 < \rho < r$ beliebig gilt

$$c_n = \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Beweis. Sei a mit $|a| < \rho < r$ fest gewählt. Für $|z| = \rho$ gilt dann $|a/z| < 1 \implies$

10. D-Stunde

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-a/z} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^n$$

gleichmäßig für alle z mit $|z| = \rho \implies$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)a^n}{z^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right)}_{=: c_n} a^n.$$

Wegen $\rho < r$ beliebig gilt also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ für alle $z \in D$, d.h. $c_n = (n!)^{-1} f^{(n)}(0)$ eindeutig bestimmt. \square

8.6 Beispiel $D = \{|z| < 1\}$ und $f(z) = (1+z^2)^{-1}$. Dann gilt

$$f(z) = (1 - (-z^2))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$\text{mit } c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2} & n \text{ gerade,} \end{cases}$$

d.h. $f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$ mit Konvergenzradius 1 (wegen $f(z) = ((z-i)(z+i))^{-1}$ nicht anders zu erwarten), und für den Hauptzweig des Arcustangens (= Stammfunktion von f - vgl. Übungen) gilt

$$\arctan(z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \dots$$

8.7 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Dann sind für jede Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ äquivalent

- (i) f holomorph
- (ii) f ist lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar (das soll heißen: Zu jedem $a \in D$ existiert eine Umgebung $U \subset D$ von a und eine konvergente Potenzreihe $\sum c_n X^n$ derart, daß $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ für alle $z \in U$ gilt).

Beweis. (i) \implies (ii) Sei $a \in D$ fest und setze $w := z-a \implies g(w) := f(a+w)$ ist holomorph als Funktion von w in Umgebung von $0 \in \mathbb{C} \implies \exists r > 0, \sum c_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ für $|w| < r$, d.h. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ für $|z-a| < r$.

(ii) \implies (i) Sei wieder $a \in D$ fest und $w := z-a \implies g(w) = \sum c_n w^n$ holomorph in Umgebung von 0 wegen Satz 8.4 $\implies f(z) = g(z-a)$ holomorph in Umgebung von a . \square

[Die Eigenschaft (ii) in 8.7 wird häufig 'analytisch', hier genauer 'komplex-analytisch' genannt. Offenbar ist für jedes $a \in D$ die zugehörige Potenzreihe $\sum c_n X^n$ durch a eindeutig bestimmt - denn $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Die Reihe $\sum c_n (z-a)^n$ heißt die *Taylorreihe* von f in a .]

8.8 Folgerung Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, und $f \in \mathcal{H}(D)$ sei auf keiner Umgebung von $a \in D$ konstant. Dann existiert genau eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und ein $g \in \mathcal{H}(D)$ mit $g(a) \neq 0$ und

$$f(z) - f(a) = (z-a)^k g(z) \quad \forall z \in D.$$

Beweis. Es gelte o.B.d.A. $a = f(a) = 0$. Dann existiert eine offene Umgebung V von 0 in D und in V eine konvergente Reihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$. Wegen $f|_V \neq 0$ existiert

$$k := \min\{n \geq 1 : c_n \neq 0\} \in \mathbb{N} \implies f(z) = z^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^{n-k}}_{=:g(z)}$$

mit $g \in \mathcal{H}(V)$ und $g(0) = c_k \neq 0$. Durch $g(z) := (z-a)^{-k} f(z)$ für alle $z \in D \setminus V$ kann g zu einer auf ganz D holomorphen Funktion fortgesetzt werden. \square

8.9 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in \mathcal{H}(D)$ mit $f \neq 0$. Dann ist die Nullstellenmenge $N_f := \{z \in D : f(z) = 0\}$ diskret in D (d.h. hat keinen Häufungspunkt in D).

Beweis. Sei Ω das Innere von N_f . Wegen $f \neq 0$ ist $\Omega \neq D$, und $\Omega \subset D$ ist offen. Angenommen, $\Sigma := D \setminus \Omega$ ist nicht offen. Dann existiert ein $a \in \Sigma$ und eine Folge (a_k) in Ω mit $a = \lim a_k$. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $f^{(n)}(a_k) = 0$, d.h. $f^{(n)}(a) = 0$ wegen $f^n \in \mathcal{H}(D)$ stetig. Also verschwindet die Taylorreihe von f in a identisch, d.h. $a \in \Omega$, Widerspruch. Also ist Σ doch offen und damit folgt $\Omega = \emptyset$ wegen D zusammenhängend. Angenommen, $b \in D$ sei Häufungspunkt von N_f . Dann gilt $b \in N_f$. Wegen $\Omega = \emptyset$ ist f auf keiner Umgebung von b konstant. Nach 8.8 existiert eine Umgebung U von $b \in D$ mit $U \cap N_f = \{b\}$, Widerspruch. \square

11. D-Stunde

8.10 Bemerkung Im allgemeinen hat die Nullstellenmenge N_f Häufungspunkte auf dem Rand ∂D von D . Etwa im Fall $D = \mathbb{C}^*$, $f(z) = \sin(\pi/z)$ gilt $f(1/n) = 0$ für $n = 1, 2, \dots$

8.11 Identitätssatz Sei $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $M \subset D$ eine Teilmenge, die mindestens einen Häufungspunkt in D besitzt (z.B. wenn M offen und nicht-leer ist). Dann gilt für je zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{H}(D)$ mit $f|_M = g|_M$ bereits $f = g$.

Beweis. Wende 8.9 an auf $h := f - g$. \square

Wir können 8.8 verbessern zu

8.12 Lemma Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in \mathcal{H}(D)$ nicht konstant, so existiert zu jedem $a \in D$ eine offene Umgebung $U \subset D$, eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und ein $h \in \mathcal{H}(U)$ mit $h'(a) \neq 0$ und $f(z) - f(a) = h(z)^k$ für alle $z \in U$.

Beweis. Nach 8.8 existiert eine Darstellung $f(z) - f(a) = (z-a)^k g(z)$ mit g holomorph in einer Umgebung V von a und $g(a) \neq 0$. Wähle offene Umgebung $W \subset \mathbb{C}^*$ von $g(a)$ und einen Zweig \log des Logarithmus auf $W \implies \exists$ offene Umgebung $U \subset V$ von a mit $g(U) \subset W$. Setze

$$(*) \quad h(z) := (z-a) \exp\left(\frac{1}{k} \log g(z)\right).$$

Dann gilt

$$h(a) = 0 \quad \text{und} \quad h'(a) = \exp\left(\frac{1}{k} \log g(a)\right) \neq 0. \quad \square$$

8.13 Satz Für jedes offene $D \subset \mathbb{C}$, jedes $f \in \mathcal{H}(D)$ und jedes $a \in D$ sind äquivalent

- (i) f ist lokal-injektiv in a (d.h. es gibt eine Umgebung $U \subset D$ von a , auf der die eingeschränkte Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv ist).
- (ii) f ist lokal-biholomorph in a (d.h. es gibt offene Umgebungen $U \subset D$ von a und $V \subset \mathbb{C}$ von $f(a)$ zusammen mit einer holomorphen Funktion $g \in \mathcal{H}(V)$, so daß $f|_U: U \rightarrow V$ bijektiv und $g(f(z)) = z$ für alle $z \in U$ gilt).
- (iii) $f'(a) \neq 0$.

Beweis. (i) \implies (iii) Sei f lokal-injektiv in a . Dann existiert nach Lemma 8.12 um a eine Darstellung $f(z) - f(a) = h(z)^k$ für ein $k \geq 1$. Da die k -te Potenz nur für $k = 1$ lokal-injektiv in $0 \in \mathbb{C}$ ist, muß folglich $k = 1$ und somit $f'(a) = h'(a) \neq 0$ gelten.

(iii) \implies (ii) Für $f = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re}(f)$ gilt $f' = u_x + iv_x$ für $u_x := \partial u / \partial x$, $v_x := \partial v / \partial x$ und somit unter Verwendung der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$J := \det \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2.$$

Ist also $f'(a) \neq 0$, so folgt aus dem (reellen) Satz über implizite Funktionen: \exists offene Umgebungen U von $a \in D$, V von $f(a)$ in $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ und \mathcal{C}^1 -Funktion $g: V \rightarrow U$ mit $f: U \rightarrow V$ bijektiv und $g = (f|U)^{-1}$. Schreiben wir $g = r + is$ mit $r = \operatorname{Re}(g)$, so erfüllt g wegen

$$\begin{pmatrix} r_x & s_x \\ r_y & s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} v_y & -v_x \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$

auch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, d.h. g ist holomorph.

(ii) \implies (i) ist trivial. □

8.14 Satz (von der Gebietstreue) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(D)$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann ist $f(D)$ auch ein Gebiet.

Beweis. Wegen f stetig und D zusammenhängend ist auch $f(D)$ zusammenhängend. Wir müssen also zeigen: Für jedes $a \in D$ ist $f(D)$ Umgebung von $f(a)$. Nun existiert nach 8.12 eine offene Umgebung $U \subset D$ von a und $h \in \mathcal{H}(U)$ mit $f(z) = f(a) + h(z)^k$, $z \in U$, wobei $h'(a) \neq 0$ und $k \geq 1$. Da $h(U)$ Umgebung von $h(a) = 0 \in \mathbb{C}$, ist auch $h^k(U)$ Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ und somit $f(D)$ Umgebung von $f(a)$. □

8.15 Maximumprinzip Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(D)$. Besitzt dann $|f|$ ein lokales Maximum in D (d.h. $\exists a \in D$ und Umgebung $U \subset D$ von a mit $|f(z)| \leq |f(a)| \quad \forall z \in U$), so ist f konstant.

Beweis. Angenommen, f nicht konstant. Dann ist $f|U$ nicht konstant und $f(U)$ Umgebung von $f(a)$, d.h. $|f(z)| \leq |f(a)| \quad \forall z \in U$ nicht möglich. □

8.16 Folgerung $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $K \subset D$ kompakt, $f \in \mathcal{H}(D)$ nicht-konstant. Dann gilt

$$\sup_{z \in K} |f(z)| < \sup_{z \notin K} |f(z)|.$$

Beweis. Falls nicht, existiert $a \in K$ mit $|f(a)| = \sup_{z \in K} |f(z)| = \sup_{z \in D} |f(z)| \implies f$ konstant wegen 8.15. □

9. Laurentreihen und isolierte Singularitäten

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ fest vorgegeben. Dann heißt

$$D := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$$

ein Kreisring (mit Mittelpunkt a und Radien r_1, r_2). Als Verallgemeinerung der Potenzreihenentwicklung auf Kreisscheiben erhalten wir:

9.1 Satz Jede auf dem Kreisring $D = \{r_1 < |z - a| < r_2\}$ holomorphe Funktion f läßt sich auf D in eine kompakt konvergente Reihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n, \quad z \in D$$

entwickeln, genannt *Laurentreihe* von f auf D . Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und jedes ρ mit $r_1 < \rho < r_2$ gilt

$$(*) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz ,$$

insbesondere ist die Reihenentwicklung durch f eindeutig bestimmt.

Beweis. O.B.d.A. ist $a = 0$. (*) definiert c_n unabhängig von ρ . Sei $A \subset D$ ein Kompaktum. Dann existieren ρ_1, ρ_2 mit $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ so, daß A im Inneren des kompakten Kreisrings $K := \{\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2\} \subset D$ liegt. K hat stückweise glatten Rand, für alle $z \in A$ gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=: f_2(z)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta}_{=: f_1(z)} .$$

Wir untersuchen $f_k(z)$ für $k = 1, 2$ getrennt. Für $k = 2$ und $z \in A, |\zeta| = \rho_2$ gilt

12. D-Stunde

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - z/\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} ,$$

d.h.

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

ist gleichmäßig konvergente Potenzreihe auf A . Für $k = 1$ und $z \in A, |\zeta| = \rho_1$ gilt

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \zeta/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} .$$

Mit dem gleichen Argument folgt $f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$ gleichmäßig auf A , d.h.

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$$

gleichmäßig auf A . Damit ist die Existenz bewiesen.

Eindeutigkeit: Angenommen, $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k z^k$ kompakt konvergent auf D , wobei $d_k \in \mathbb{C}$. Wähle $n \in \mathbb{Z}$ fest. Dann gilt

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}} = \frac{d_n}{z} + \underbrace{\sum_{k \neq n} d_k z^{k-n-1}}_{\text{integabel auf } D} \implies d_n = \frac{d_n}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = c_n . \quad \square$$

Für den Kreisring D um $0 \in \mathbb{C}$ folgt aus dem Beweis von 9.1, daß jedes $f \in \mathcal{H}(D)$ eine eindeutige Darstellung

$$f(z) = \frac{c}{z} + g'(z), \quad z \in D ,$$

hat, wobei $c \in \mathbb{C}$ und $g \in \mathcal{H}(D)$ (genauer $c = c_{-1}$ und $g(z) = \sum_{n \neq -1} c_n z^{n+1}/(n+1)$). Definieren wir $\mathcal{H}(D)' := \{g' : g \in \mathcal{H}(D)\}$, so hat also der Faktorraum $\mathcal{H}(D)/\mathcal{H}(D)'$ die Vektorraumdimension 1. Allgemeiner gilt für beliebige Gebiete D : $\dim \mathcal{H}(D)/\mathcal{H}(D)'$ zählt die 'Anzahl der Löcher von D '.

Wir wollen nun die Vielfachheit der Nullstellen von holomorphen Funktionen definieren. Wir lassen uns dabei leiten von der Vorstellung, daß für jede um $a \in \mathbb{C}$ holomorphe Funktion g das Produkt $f(z) = (z-a)^k g(z)$ mindestens eine k -fache Nullstelle in a hat: Sei also $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(D)$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{D} := D \cup \{a\}$ offen gegeben (ist $a \notin D$, d.h. $a \in \partial D$, so heißt a ein isolierter Randpunkt von D und isolierte Singularität von f).

9.2 Definition $\omega_f(a) := \sup\{k \in \mathbb{Z} : \exists g \in \mathcal{H}(\tilde{D}) \text{ mit } f(z) = (z-a)^k g(z) \ \forall z \in D\}$
 heißt die Nullstellenordnung von f in a . (Die Grenzfälle $\sup \mathbb{Z} = \inf \emptyset = +\infty$ und $\inf \mathbb{Z} = \sup \emptyset = -\infty$ seien zugelassen, d.h. $\omega_f(a) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$).

9.3 Charakterisierung durch Laurentreihen Sei $r > 0$ so klein gewählt, daß $U := \{0 < |z-a| < r\} \subset D$ und $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ die Laurententwicklung auf U ist. Dann gilt $\omega_f(a) = \inf\{n \in \mathbb{Z} : c_n \neq 0\}$.

Beweis. Für $k \in \mathbb{Z}$ und geeignetes $g \in \mathcal{H}(\tilde{D})$ gelte $f(z) = (z-a)^k g(z)$. Die Potenzreihenentwicklung von g um a liefert dann $c_n = 0$ für alle $n < k$ und damit auch für alle $n < \omega_f(a)$, d.h. $m := \inf\{n : c_n \neq 0\} \geq \omega_f(a)$. Angenommen, $m > \omega_f(a)$. Dann gilt $m \in \mathbb{Z}$ und für die auf D holomorphe Funktion $g(z) := f(z)(z-a)^{-m}$ gilt in a die Potenzreihenentwicklung $g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m}$, d.h. $\omega_f(a) \geq m$, Widerspruch. \square

9.4 Riemannscher Hebbarkeitssatz Sei a eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f \in \mathcal{H}(D)$. Dann sind äquivalent

- (i) f holomorph in a fortsetzbar (d.h. $\exists \tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{D})$ mit $\tilde{D} = D \cup \{a\}$ und $\tilde{f}|_D = f$)
- (ii) \exists Umgebung U von $a \in \tilde{D}$, so daß f auf $U \setminus \{a\}$ beschränkt ist
- (iii) $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$
- (iv) $\omega_f(a) \geq 0$.

Beweis. (i) \implies (ii) \implies (iii) trivial.

(iii) \implies (iv) $g(z) := (z-a)f(z)$ ist stetig und damit holomorph fortsetzbar auf \tilde{D} wegen 5.7. Wegen $g(a) = 0$ gilt $\omega_g(a) \geq 1$ und damit $\omega_f(a) \geq 0$.

(iv) \implies (i) Potenzreihenentwicklung von f in a . \square

9.5 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und a isolierte Singularität von $f \in \mathcal{H}(D)$. Dann sind äquivalent

- (i) Zu jedem $M > 0$ existiert Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von a mit $|f(z)| \geq M$ für alle $z \in U \cap D$ (d.h. $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$)
- (ii) $-\infty < \omega_f(a) < 0$.

13. D-Stunde

Beweis. (i) \implies (ii) Zu $M = 1$ wähle Umgebung U wie in (i) und definiere $g \in \mathcal{H}(U)$ durch

$$g(z) := \begin{cases} 0 & z = a \\ 1/f(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

(die Holomorphie folgt mit 5.7).

$\implies g(z) = (z-a)^k h(z)$ für gewisses $k \geq 1$ und $h \in \mathcal{H}(U)$ mit $h(a) \neq 0$. Dann gilt aber $h(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und $f(z) = (z-a)^{-k}/h(z)$, d.h. $\omega_f(a) = -k$.

(ii) \implies (i) Setze $k := -\omega_f(a)$, dh. $1 \leq k < +\infty$. Dann existiert $g \in \mathcal{H}(\tilde{D})$ mit

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k} \quad \text{mit} \quad g(a) \neq 0 \quad \implies \quad (i). \quad \square$$

9.6 Definition Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und a eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{H}(E)$. Dann heißt a

- (i) hebbare Singularität, falls $\omega_f(a) \geq 0$
- (ii) Pol der Ordnung $-\omega_f(a)$, falls $-\infty < \omega_f(a) < 0$
- (iii) wesentliche Singularität, falls $\omega_f(a) = -\infty$.

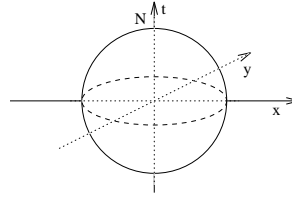
9.7 Beispiel $z/\sin(z)$ hat eine hebbare Singularität in $a = 0$ und einen Pol der Ordnung 1 in π . Die Funktion $\exp(1/z)$ hat eine wesentliche Singularität in $a = 0$.

9.8 Satz von Casorati-Weierstraß Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und a eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion $f \in \mathcal{H}(D)$. Dann ist $f(U \cap D)$ dicht in \mathbb{C} für jede Umgebung U von a .

Beweis. Übungsaufgabe.

Warum Name 'Pol'? Sei $S^2 := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + t^2 = 1\}$ die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 .

Dann heißt $N := (0, 0, 1) \in S^2$ der 'Nordpol'.



Definiere

$$\tau: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad \tau(x, y, t) = \frac{x + iy}{1 - t}$$

$\implies \tau$ ist Homöomorphismus wegen

$$\tau^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{z\bar{z} + 1}, \frac{2y}{z\bar{z} + 1}, \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right) \quad z := x + iy$$

(stereographische Projektion von N auf die (x, y) -Ebene $\approx \mathbb{C}$).

Führen wir Symbol ∞ ein und definieren $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, können wir τ fortsetzen zu Bijektion $\tau: S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ vermöge $\tau(N) = \infty$. Topologisiere $\widehat{\mathbb{C}}$ so, daß τ Homöomorphismus ($U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Umgebung von $\infty \iff \widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ beschränkte Teilmenge von \mathbb{C}). $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt Riemannsche Zahlenkugel.

9.9 Definition Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. Dann heißt f eine meromorphe Funktion, falls gilt

- (i) Die Polstellenmenge $P_f := \{z \in D : f(z) = \infty\}$ ist diskret in D
- (ii) Die Einschränkung von f auf $D \setminus P_f$ ist holomorph
- (iii) Jedes $a \in P_f$ ist ein Pol von f ($\implies f: D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ist insbesondere stetig und $\omega_f: D \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ nimmt den Wert $-\infty$ nicht an).

Sei $\mathcal{M}(D) := \{\text{meromorphe Funktionen auf } D\} \implies \mathcal{H}(D) \subset \mathcal{M}(D)$. Obwohl $\widehat{\mathbb{C}}$ keine algebraische Struktur trägt ($+$ und \cdot können nicht sinnvoll von \mathbb{C} auf $\widehat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden – Ausdrücke wie $\infty + \infty$ oder $0 \cdot \infty$ führen sofort zu Unstimmigkeiten) ist dieses für die Erweiterung der Verknüpfungen $+$ und \cdot von $\mathcal{H}(D)$ auf $\mathcal{M}(D)$ möglich: Seien zwei meromorphe Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(D)$ gegeben. Summe $f_1 + f_2$ und Produkt $f_1 f_2 \in \mathcal{M}(D)$ sind dann wie folgt definiert: Ist $a \in D$ beliebig, so existiert Umgebung $U \in D$ von a und Darstellung $f_j(z) = g_j(z)/(z - a)^k$ mit $g_j \in \mathcal{H}(U)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann sei

$$f_1 + f_2|_U := \frac{g_1 + g_2}{(z - a)^k} \quad \text{und} \quad f_1 f_2|_U := \frac{g_1 g_2}{(z - a)^{2k}}.$$

$\implies f_1 + f_2, f_1 f_2$ in $\mathcal{M}(D)$ wohldefiniert, und es gilt:

9.10 Lemma $\mathcal{M}(D)$ ist komplexe Algebra mit Eins, die $\mathcal{H}(D)$ als Unter algebra enthält. Ist D ein Gebiet, so ist $\mathcal{M}(D)$ ein Körper (der Funktionenkörper von D).

Beweis. Nicht schwierig – sei dem Leser überlassen.

9.11 Beispiel (i) $\cot := 1/\tan \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit Polstellenmenge $\pi\mathbb{Z}$.

(ii) Ist D Gebiet, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $f \neq 0 \implies f' \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ und $f'/f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ heißt logarithmische Ableitung von f . Ist $f = f_1 f_2 \dots f_n \neq 0$, so gilt

$$\frac{f'}{f} = \frac{f'_1}{f_1} + \frac{f'_2}{f_2} + \dots + \frac{f'_n}{f_n}.$$

10. Der Residuenkalkül

Im folgenden sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\Delta \subset \mathbb{C}$ eine in D diskrete Teilmenge und $f \in \mathcal{H}(D \setminus \Delta)$ (f ist in D mit Ausnahme isolierter Singularitäten holomorph).

Für jedes $a \in D$ wähle $r > 0$ so, daß $R := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\} \subset D \setminus \Delta$ und setze $\text{Res}_f(a) := c_{-1}$, wobei $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$ die Laurententwicklung von f im Kreisring R ist. $\text{Res}_f(a)$ heißt das *Residuum* von f in a . Offenbar gilt (deshalb der Name)

$$\text{Res}_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz \quad \text{falls } 0 < \rho < r.$$

Die Menge $\{a \in D : \text{Res}_f(a) \neq 0\}$ ist in Δ enthalten und somit auch diskret in D .

10.1 Beispiel

- (i) Ist $\omega_f(a) \geq -1$ (d.h. f hat höchstens einen Pol 1. Ordnung in a) $\implies \text{Res}_f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$. Klar, denn $f(z) = a_{-1}/(z - a) + h(z)$, wobei h holomorph in a .
- (ii) Sei D Gebiet, $f \in \mathcal{M}(D)$ mit $f \neq 0 \implies \text{Res}_{f'/f}(a) = \omega_f(a)$.

Beweis. Für $k := \omega_f(a)$ gilt $f(z) = (z - a)^k g(z)$, $g \in \mathcal{H}(D)$, $g(a) \in \mathbb{C}^* \implies$

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{k}{z - a} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{holomorph in } a} \implies \text{Behauptung.}$$

10.2 Residuensatz (Spezielle Form) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\Delta \subset D$ eine in D diskrete Teilmenge und $f \in \mathcal{H}(D \setminus \Delta)$. Dann gilt für jedes Kompaktum $K \subset D$ mit stückweise glattem Rand $\partial K \subset D \setminus \Delta$ 14. D-Stunde

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in K \cap \Delta} \text{Res}_f(a).$$

Beweis. $K \cap \Delta$ ist kompakt und diskret, also endlich, etwa $K \cap \Delta = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \overset{\circ}{K}$ mit $a_j \neq a_k$ für $j \neq k$. $\implies \exists \varepsilon > 0$ mit $K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| \leq \varepsilon\} \subset \overset{\circ}{K}$ und $K_j \cap K_k = \emptyset$ für $j \neq k \implies \tilde{K} := K \setminus (\overset{\circ}{K}_1 \cup \overset{\circ}{K}_2 \cup \dots \cup \overset{\circ}{K}_r) \subset D \setminus \Delta$ Kompaktum mit stückweise glattem Rand \implies (Cauchy-Integral-Satz)

$$0 = \int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{j=1}^r \int_{\partial K_j} f(z) dz.$$

Nun gilt aber

$$\int_{\partial K_j} f(z) dz = \int_{|z-a_j|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_f(a_j). \quad \square$$

Der Residuensatz liefert einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra: Sei $p(z)$ ein normiertes Polynom vom Grade n . Dann hat $q(z) := z^n - p(z)$ Grad $< n$. Man findet leicht ein $R > 0$ derart, daß für jedes $0 \leq t \leq 1$ das Polynom $p_t(z) := z^n + tq(z)$ keine Nullstelle in $\{|z| \geq R\}$ hat. Die Gesamtzahl aller Nullstellen von p_t in \mathbb{C} wird somit durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{p'_t}{p_t} dz$$

gegeben, das als stetige, ganzzahlige Funktion in t gar nicht von t abhängen kann. Für $t = 0$ ist der Wert $= n$, d.h. auch p hat genau n Nullstellen in \mathbb{C} . □

Ohne Beweis formulieren wir (für einen Beweis vergl. Anhang 13.7):

10.3 Residuensatz (Homotope Version) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\Delta \subset D$ eine in D diskrete Teilmenge und $f \in \mathcal{H}(D \setminus \Delta)$. Ist dann γ eine stückweise glatte geschlossene Kurve in $D \setminus \Delta$, die in D nullhomotop ist, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in \Delta} I(\gamma, a) \operatorname{Res}_f(a)$$

(da $I(\gamma, a) = 0$ für fast alle $a \in \Delta$, ist die Summe endlich).

10.4 Beispiel

- (i) Sei $f(z) = \pi z / \sin \pi z \implies f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ und $P_f \subset \mathbb{Z}$. Insbesondere gilt $\operatorname{Res}_f(a) = 0$ für alle $a \notin \mathbb{Z}$. Sei $k \in \mathbb{Z}$ fest

$$\begin{aligned} \implies \sin \pi z &= (z - k)\pi h(z) \quad \text{für ein } h \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \quad \text{mit } h(k) = \cos \pi k = (-1)^k \\ \implies f(z) &= \frac{1}{z - k} \cdot \underbrace{\frac{z}{h(z)}}_{\text{holomorph in } k} \end{aligned}$$

und somit $\operatorname{Res}_f(k) = \lim_{z \rightarrow k} z/h(z) = (-1)^k k$, also auch $\operatorname{Res}_f(0) = 0$ und insgesamt $P_f = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- (ii) Auswertung von Integralen (vgl. z.B. Cartan, BI). Sei $I := \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$ zu berechnen, wobei $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ rationale Funktion, für die $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ die Bedingung $Q(x, y) \neq 0$ erfüllen, falls $x^2 + y^2 = 1$. Lösung: Setze $z = z(t) = e^{it} \implies \cos t = \operatorname{Re}(z) = (z + 1/z)/2$ und $\sin t = \operatorname{Im}(z) = (z - 1/z)/2i$ sowie $dz/dt = ie^{it} = iz \implies I = 2\pi \sum_{|w| < 1} \operatorname{Res}_h(w)$ mit $h(z) := R((z - 1/z)/2i, (z + 1/z)/2)$.

10.5 Beispiel $r(x, y) = 1/(a + x)$, $a > 1$ fest $\implies I := \int_0^{2\pi} (a + \sin t)^{-1} dt = 2\pi \operatorname{Res}_h(\alpha)$, wobei $h(z) = 2iz/(z^2 + 2iaz - 1)$, $\alpha = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$. Wegen $\operatorname{Res}_h(\alpha) = 1/\sqrt{a^2 - 1}$, gilt also $I = 2\pi/\sqrt{a^2 - 1}$ [kann man auch direkt mit der Substitution $x = \tan t/2$ bekommen].

Man kann auch uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$, $\int_0^{\infty} \rho(t) dt$ u.s.f. als Anwendung des Residuensatzes erhalten.

11. Analytische Fortsetzung

11.1 Problem Seien $D \subset \tilde{D} \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f \in \mathcal{H}(D)$. Wann existiert $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{D})$ mit $\tilde{f}|_D = f$? Wenn \tilde{f} existiert, ist dieses eindeutig bestimmt und heißt holomorphe Fortsetzung von f auf \tilde{D} .

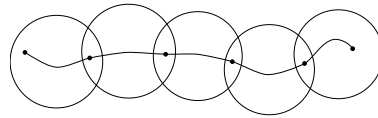
Sei nun $a \in \mathbb{C}$ fest und $\mathcal{U}_a := \{\text{offene Umgebungen von } a \in \mathbb{C}\}$, $\mathcal{F}_a := \bigcup_{U \in \mathcal{U}_a} \mathcal{H}(U)$ (disjunkte Vereinigung). Seien $f, g \in \mathcal{F}_a$, d.h. $f \in \mathcal{H}(U)$, $g \in \mathcal{H}(V)$ mit $U, V \in \mathcal{U}_a$. Dann heißen f, g äquivalent in a (in Zeichen $f \sim g$) $\iff \exists W \in \mathcal{U}_a$ mit $W \subset U \cap V$ und $f|_W = g|_W$. Sei $\mathcal{O}_a := \mathcal{F}_a / \sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Die Elemente von \mathcal{O}_a heißen holomorphe Funktionskeime in a . Offenbar kann \mathcal{O}_a mit der Menge aller konvergenten Potenzreihenentwicklungen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ um a identifiziert werden. Für jedes $f \in \mathcal{F}_a$ heißt f_a (= Äquivalenzklasse, in der f liegt) der von f in a induzierte Keim. \mathcal{O}_a ist eine komplexe Algebra mit Eins.

Unsere Frage lautet nun: Gegeben ein Keim $q \in \mathcal{O}_a$, für welche $U \in \mathcal{U}_a$ existiert $f \in \mathcal{H}(U)$ mit $q = f_a$?

11.2 Definition Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Kurve mit Endpunkten $a := \gamma(0)$ und $b := \gamma(1)$. Dann heißt $p \in \mathcal{O}_a$ analytisch fortsetzbar längs $\gamma \iff \exists$ endlich viele Zwischenpunkte $0 =$

$t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und für $k = 1, \dots, n$ existierten offene Kreisscheiben D_k zusammen mit holomorphen Funktionen $f_k \in \mathcal{H}(D_k)$ so, daß

- (i) $\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset D_k$ für alle k
- (ii) f_k und f_{k+1} stimmen auf $D_k \cap D_{k+1}$ überein für alle $k < n$
- (iii) $(f_1)_a = p$.



Man zeigt leicht: Der Keim $q := (f_n)_b \in \mathcal{O}_b$ hängt nicht von der Auswahl der D_1, \dots, D_n (und den damit festgelegten f_1, \dots, f_n ab - Induktion nach n). Man sagt: 'q entsteht aus p durch analytische Fortsetzung längs γ ' (auch Kreiskettenverfahren genannt).

11.3 Beispiel Sei \log Hauptzweig des Logarithmus auf $H = \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$, $a = 2$ und $p \in \mathcal{O}_a$ der Keim von $1/\log$ in $a \implies p$ längs Kurve $\gamma(t) = 2 - t$ nicht in $1 \in \mathbb{C}^*$ fortsetzbar, aber p längs Kurve $\gamma_1(t) = (2 - t)e^{2\pi it}$ doch in $1 \in \mathbb{C}^*$ fortsetzbar.

Sei wieder $I = [0, 1]$.

15. D-Stunde

11.4 Monodromiesatz Sei $\delta: I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ Homotopie bei festgehaltenen Endpunkten der Kurven $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow \mathbb{C}$. In $a := \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ sei ein Keim $p \in \mathcal{O}_a$ gegeben. Für jedes $s \in I$ sei p analytisch fortsetzbar längs der Zwischenkurve γ_s (d.h. $\gamma_s(t) = \delta(t, s)$). Dann stimmen die analytischen Fortsetzungen von p längs γ_0 und γ_1 in \mathcal{O}_b überein, wobei $b = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

Beweis. Sei $q_s \in \mathcal{O}_b$ der Keim, der durch analytische Fortsetzung von p längs γ_s entsteht, $s \in I$. Aus dem Identitätssatz folgt leicht, daß $s \mapsto q_s$ eine lokal-konstante Abbildung $I \rightarrow \mathcal{O}_b$ definiert. Wegen I zusammenhängend ist diese konstant. \square

Sei nun $D \subset \mathbb{C}$ festes Gebiet. Für jedes $a \in D$ sei $D_a \subset \mathcal{O}_a$ die Menge aller $p \in \mathcal{O}_a$, die längs jeder Kurve $\gamma: I \rightarrow D$ mit $\gamma(0) = a$ analytisch fortsetzbar sind $\implies D_a \subset \mathcal{O}_a$ ist Unteralgebra mit Eins $1 \in D_a$.

11.5 Beispiel Sei $f \in \mathcal{H}(D)$, $U \subset D$ offen und $F \in \mathcal{H}(U)$ mit $F' = f|_U$ (d.h. F Stammfunktion von f auf U). Dann gilt $F_a \in D_a$ für alle $a \in U$.

Aus dem Monodromiesatz erhalten wir

11.6 Folgerung Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann induziert jede Kurve $\gamma: I \rightarrow D$ vermöge analytischer Fortsetzung einen Algebra-Isomorphismus $D_a \rightarrow D_b$, wobei $a := \gamma(0)$, $b := \gamma(1)$ die Endpunkte sind. Kurven, die in D homotop bei festgehaltenen Endpunkten sind, induzieren den gleichen Isomorphismus. Speziell für geschlossene Kurven $\gamma: I \rightarrow D$ erhalten wir also für $a := \gamma(0) = \gamma(1)$ einen Algebren-Automorphismus $D_a \rightarrow D_a$, der Monodromieoperator genannt wird (= Identität, falls γ nullhomotop in D).

11.7 Lemma Sei $D \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängendes Gebiet. Dann definiert $f \mapsto f_a$ für jedes $a \in D$ einen (surjektiven) Algebraisomorphismus $\mathcal{H}(D) \rightarrow D_a$.

Anhang

Die beiden folgenden Paragraphen wurden nicht in der Vorlesung behandelt. Mit ihnen werden die in der Vorlesung ohne Beweis zitierten Sätze 6.16 und 10.3 vollständig bewiesen.

12. Beziehungen zum Satz von Stokes

Wir haben in §4 schon darauf hingewiesen, daß bei dem Kurvenintegral $\int f(z) dz$ eigentlich nicht die Funktion $f(z)$ sondern die Differentialform $f(z) dz$ integriert wird. Wir wollen das jetzt präzisieren. Um den Umfang der Einführung in die Differentialformen möglichst klein zu halten, geben wir nur ‘ad-hoc’-Definitionen (für eine ausführliche und koordinateninvariante Vorgehensweise vgl. die einschlägige Literatur).

Es sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\mathcal{C}(U)$ die komplexe Algebra aller stetigen \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf U . Mit $\mathcal{C}^k(U)$ werde die Unter algebra aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet wobei $0 \leq k \leq +\infty$. Mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ bezeichnen wir die Koordinaten des \mathbb{R}^n .

12.1 Definition Jeder formale Ausdruck

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j \quad \text{mit} \quad f_j \in \mathcal{C}(U)$$

heißt eine stetige (komplex-wertige) Differentialform vom Grade 1 oder auch 1-Form auf U . Dabei sei vereinbart, daß die 1-Formen $\omega = \sum f_j dx_j$ und $\tilde{\omega} = \sum \tilde{f}_j dx_j$ genau dann übereinstimmen, wenn $f_j = \tilde{f}_j$ für alle j gilt. Sind alle f_j in $\mathcal{C}^k(U)$, so heißt die Form $\omega = \sum f_j dx_j$ von der Klasse \mathcal{C}^k (oder auch k -mal stetig differenzierbar).

Vermöge $\omega + \tilde{\omega} = \sum (f_j + \tilde{f}_j) dx_j$ und $g\omega = \sum (gf_j) dx_j$ für $g \in \mathcal{C}(U)$ ist die Gesamtheit aller 1-Formen auf U ein $\mathcal{C}(U)$ -Modul. Für jedes $f \in \mathcal{C}^1(U)$ heißt die 1-Form

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

die (äußere) Ableitung (oder auch der Korand) von f . Die 1-Form ω heißt exakt oder auch integrabel, wenn $\omega = df$ für ein $f \in \mathcal{C}^1(U)$ gilt (und dann heißt f eine Stammfunktion von ω). Weiter heißt ω geschlossen oder auch lokal-integrabel, wenn zu jedem $a \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von a existiert, so daß die eingeschränkte Form $\omega|_V$ exakt ist.

Sei nun $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n): [\alpha, \beta] \rightarrow U$ für reelle Zahlen $\alpha < \beta$ eine glatte Kurve in U (d.h. $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ existiert und $\gamma': [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig). Für jede 1-Form $\omega = \sum f_j dx_j$ definieren wir dann das Kurvenintegral längs γ durch

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha}^{\beta} h(t) dt \quad \text{wobei} \quad h(t) = \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t).$$

Diese Definition überträgt sich mühelos auf stückweise glatte Kurven. Offenbar gilt im Fall einer exakten 1-Form $\omega = df$ wegen $h(t) = [f(\gamma(t))]'$

$$(*) \quad \int_{\gamma} df = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)).$$

Die Gleichung (*) ist einerseits nichts weiter als der sogenannte *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, andererseits kann er auch als der Stokessche Satz auf der untersten Stufe aufgefaßt werden. Der ‘orientierte Rand’ $\partial\gamma$ der glatten Kurve γ sei die Teilmenge $\{\gamma(\alpha), \gamma(\beta)\} \subset U$, wobei der Endpunkt $\gamma(\beta)$ den Orientierungsfaktor +1 und der Anfangspunkt $\gamma(\alpha)$ den Faktor

–1 zugewiesen bekommt. Wird für jedes (positiv orientierte) $a \in U$ das ‘nulldimensionale’ Integral $\int_a f$ einfach als $f(a)$ definiert, so können wir also (*) schreiben in der Form

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f$$

für alle $f \in \mathcal{C}^1(U)$ und alle stückweise glatten Kurven γ in U . Wenn diese Formel auch keine neue Erkenntnis liefert, so macht sie doch schon das Charakteristikum von Sätzen des Stokesschen Typs augenfällig: *Das Integral längs γ über den Korand von f ist das Integral längs des Randes von γ über f .* Betrachten wir nun alles eine Stufe (genauer ‘einen Grad’) höher:

12.2 Definition Jeder formale Ausdruck

$$\omega = \sum_{j,k=1}^n f_{jk} dx_j \wedge dx_k \quad \text{mit} \quad f_{jk} \in \mathcal{C}(U)$$

heißt eine stetige (komplex-wertige) Differentialform vom Grade 2 oder auch eine 2-Form auf U . Dabei sei vereinbart, daß die 2-Formen $\omega = \sum f_{jk} dx_j \wedge dx_k$ und $\tilde{\omega} = \sum \tilde{f}_{jk} dx_j \wedge dx_k$ genau dann übereinstimmen, wenn für alle j, k gilt

$$f_{jk} - f_{kj} = \tilde{f}_{jk} - \tilde{f}_{kj} .$$

Die Gesamtheit aller 2-Formen ist wieder in offensichtlicher Weise ein $\mathcal{C}(U)$ -Modul. Für alle j, k gilt aufgrund der Gleichheitsvereinbarung in 12.2, daß $dx_j \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_j$ und damit insbesondere $dx_j \wedge dx_j = 0$ für alle j, k gilt. Wir können also jede 2-Form ω eindeutig in der Form

$$\omega = \sum_{j < k} f_{jk} dx_j \wedge dx_k , \quad f_{jk} \in \mathcal{C}(U)$$

schreiben. Das Symbol \wedge kann als alternierendes Produkt für 1-Formen $\tilde{\omega} = \sum \tilde{f}_j dx_j$ und $\omega = \sum f_k dx_k$ definiert werden vermöge

$$\tilde{\omega} \wedge \omega = \sum_{j,k=1}^n \tilde{f}_j f_k dx_j \wedge dx_k = \sum_{j < k} (\tilde{f}_j f_k - \tilde{f}_k f_j) dx_j \wedge dx_k .$$

Die äußere Ableitung (oder auch der Korand) $d\omega$ der 1-Form ω wird dann definiert durch

$$d\omega = \sum_{k=1}^n (df_k) \wedge dx_k = \sum_{j < k} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) dx_j \wedge dx_k .$$

Für jedes $f \in \mathcal{C}^2(U)$ verifiziert man leicht $ddf = 0$.

Man kann nun das Integral über 2-Formen längs orientierter 2-dimensionaler Flächen mit Rand in U definieren und eine zu (*) analoge Stokessche Formel ableiten. Wir wollen das hier nur für den uns interessierenden Fall $n = 2$ diskutieren, d.h. für $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$: Sei also $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Die Koordinaten von $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit (x, y) statt (x_1, x_2) . Die 1- bzw. 2-Formen auf U haben dann eindeutige Darstellungen $p(z) dx + q(z) dy$ bzw. $h(z) dx \wedge dy$ mit $p, q, h \in \mathcal{C}(U)$. Für die differenzierbaren Funktionen $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ gilt $dz = dx + i dy$, $d\bar{z} = dx - i dy$ und folglich $d\bar{z} \wedge dz = 2i dx \wedge dy$. Für jedes $f \in \mathcal{C}^1(U)$ gilt weiter

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} ,$$

dabei ist das erste Gleichheitszeichen die Definition der äußeren Ableitung und das zweite durch Einsetzen leicht zu verifizieren.

Sei nun $K \subset U$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ∂K und $\omega = g(z) dx \wedge dy$ eine 2-Form auf U . Wir definieren dann

$$\int_K \omega := \iint_K g(z) dx dy .$$

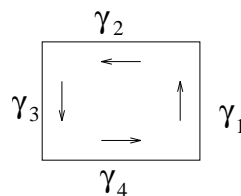
Für unsere Zwecke reicht nun der folgende

12.3 Spezialfall des Satzes von Stokes

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $K \subset U$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand. Dann gilt

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega$$

für jede stetig-differenzierbare 1-Form ω auf U .

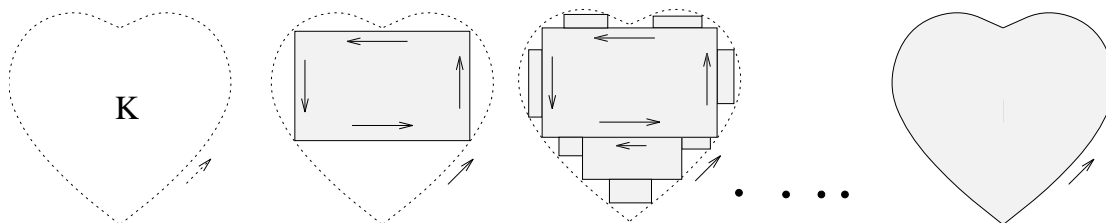


Wir führen den Beweis für den Fall, daß $K = \{(x, y) : \alpha_1 \leq x \leq \alpha_2, \beta_1 \leq y \leq \beta_2\}$ ein achsenparalleles Rechteck ist.

Dann ist $\int_{\partial K} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega$. Es genügt, den Fall $\omega = q(z) dy$ anzunehmen ($\omega = p(z) dx$ geht analog). Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\beta_1}^{\beta_2} q(\alpha_2, y) dy + \int_{\beta_2}^{\beta_1} q(\alpha_1, y) dy = \int_{\beta_1}^{\beta_2} (q(\alpha_2, y) - q(\alpha_1, y)) dy \\ &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial q}{\partial x}(z) dx dy = \int_K d\omega \end{aligned}$$

wegen $d\omega = \frac{\partial q}{\partial x} dx \wedge dy$ für $\omega = q(z) dy$. Der allgemeine Fall läßt sich nun durch ein Approximationsargument auf den Rechteckfall zurückführen:



□

12.4 Folgerung Die stetig-differenzierbare 1-Form ω auf U ist geschlossen genau dann, wenn $d\omega = 0$ gilt.

Beweis. Ist ω geschlossen, so gilt lokal $\omega = df$ und damit $d\omega = ddf = 0$. Zum Beweis der Umkehrung darf angenommen werden, daß für $d\omega = h(z) dx \wedge dy$ gilt: $\text{Re}(h(z)) > 0$ für alle

$z \in U$. Dann liefert 12.3 sofort $\operatorname{Re}(\int_{\partial K} \omega) > 0$ für jedes achsenparallele Rechteck $K \subset U$, d.h. ω ist nicht geschlossen. \square

Für jedes $f \in \mathcal{C}^1(U)$ und $\omega = f(z) dz$ ist offenbar $d\omega = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$. Wegen 12.4 ist folglich $\omega = f(z) dz$ genau dann geschlossen, wenn f holomorph ist. Es sei darauf hingewiesen, daß wir dieses in 7.7 bereits allgemeiner für alle $f \in \mathcal{C}(U)$ bewiesen haben. Für holomorphes f und $\omega = f(z) dz$ gilt also $d\omega = 0$, und wir erhalten 6.16 direkt aus 12.3 mit

$$\int_{\partial K} f(z) dz = \int_K d\omega = 0.$$

Man kann nun auch eine Cauchysche Integralformel für \mathcal{C}^1 -Funktionen aufstellen: Sei etwa $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Sei ferner $K \subset U$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand und a ein Punkt im Innern von K . Für jedes $\varepsilon > 0$ hinreichend klein hat dann auch das Kompaktum $K_\varepsilon := \{z \in K: |z - a| \geq \varepsilon\}$ stückweise glatten Rand, und es gilt mit Stokes für die 1-Form $\omega = \frac{f(z)}{z-a} dz$

$$\int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K_\varepsilon} \omega + \int_{|z-a|=\varepsilon} \omega = \int_{K_\varepsilon} d\omega + i \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{it}) dt.$$

Wegen $d\omega = \frac{\partial f/\partial \bar{z}}{z-a} d\bar{z} \wedge dz$ erhalten wir daraus im Limes für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\partial f/\partial \bar{z}}{z-a} dz \wedge d\bar{z}.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß der letzte Term dieser Cauchyschen Integralformel für \mathcal{C}^1 -Funktionen ein uneigentliches Integral ist, das aber nach Einführung von Polarkoordinaten um a zu einem eigentlichen Integral wird.

Man kann allgemeiner Differentialformen beliebigen Grades einführen (und benötigt diese auch). 3-Formen haben etwa die Darstellung

$$\omega = \sum_{i < j < k} f_{ijk} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

Mit $\Omega^p(U)$ werde der $\mathcal{C}(U)$ -Modul aller stetigen p -Formen auf U bezeichnet. In einheitlicher Form werden Differentialformen üblicherweise als alternierende Multilinearformen auf Tangentialräumen eingeführt.

13. Homologe Versionen der Integralformeln

Im folgenden sei stets $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $\Gamma := \Gamma(D)$ die Menge aller stückweise glatten, geschlossenen Kurven in D .

13.1 Definition Jede endliche formale Summe

$$c = \sum_{k=1}^p c_k \gamma_k \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad \gamma_k \in \Gamma$$

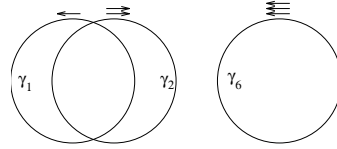
heißt ein (komplexer stückweise-glatte) Zyklus in D (oder auch eine geschlossene Kette). Sind die Koeffizienten c_k in \mathbb{R} oder gar in \mathbb{Z} , so spricht man auch von einem reellen oder ganzzahligen.

Natürlich muß in dieser Definition gesagt werden, wann zwei formale Summen übereinstimmen sollen. Dazu ist es bequemer, formale Summen der Gestalt

$$c = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \gamma, \quad c_\gamma \in \mathbb{C}$$

zu benutzen, wobei $c_\gamma \neq 0$ nur für endliche viele $\gamma \in \Gamma$ gilt. Dann soll $\sum c_\gamma \gamma = \sum \tilde{c}_\gamma \gamma$ gelten, wenn $c_\gamma = \tilde{c}_\gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$ zutrifft. Dann ist klar, daß die Menge $Z^1(D)$ aller 1-Zyklen in offensichtlicher Weise ein komplexer Vektorraum mit Γ als Basis ist.

Ist etwa $\gamma_k(t) = k + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $r := 3/2$, so veranschaulichen wir uns den ganzzahligen Zyklus $c = \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_6$ als:



Ist $c = \sum c_k \gamma_k$ ein 1-Zyklus in D , so definieren wir für jede stetige 1-Form w auf D das Kurvenintegral längs c durch

$$\int_c \omega := \sum_k c_k \int_{\gamma_k} \omega.$$

In diesem Sinne kann \int als Bilinearform $Z^1(D) \times \Omega^1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ aufgefaßt werden. Die Spur des Zyklus $c = \sum c_k \gamma_k$ definieren wir als

$$\text{Sp}(c) := \bigcup_k \text{Sp}(\gamma_k)$$

(wobei in der Darstellung von c vorausgesetzt sei, daß die γ_k paarweise verschieden und alle Koeffizienten $c_k \neq 0$ seien). Der Index $I(c, w)$ von c in $w \in W := \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(c)$ ist wie in §7 definiert als

$$I(c, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - w} \in \mathbb{C}.$$

Als Funktion in w ist diese lokal-konstant auf W (und ganzzahlig, wenn c ganzzahlig ist). Ebenso wie in §7 heißt

$$\text{Inn}(c) := \{w \in W : I(c, w) \neq 0\}$$

das Innere des Zyklus c (kann auch für $c \neq 0$ leer sein). Offenbar gilt $\text{Inn}(c) \subset \bigcup_k \text{Inn}(\gamma_k)$.

13.2 Definition Der Zyklus c in D heißt nullhomolog in D (oder auch ein Rand in D), wenn $\text{Inn}(D) \subset D$ gilt.

13.3 Beispiel Definiere γ_r auf $[0, 2\pi]$ durch $\gamma_r(t) = re^{it}$. Dann ist γ_1 nicht nullhomolog in \mathbb{C}^* , aber $\gamma_2 - \gamma_1$ ist nullhomolog in \mathbb{C}^* .

13.4 Bemerkung Für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve γ in D gilt:

$$\gamma \text{ nullhomotop in } D \implies \gamma \text{ nullhomolog in } D.$$

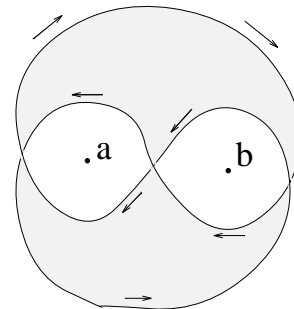
Beweis. Sei $w \in \mathbb{C} \setminus D$. Dann ist $f(z) = (z - w)^{-1}$ holomorph auf D und folglich

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = 0,$$

d.h. $w \notin \text{Inn}(\gamma)$ und somit $\text{Inn}(\gamma) \subset D$. □

Die Umkehrung ist falsch, wie folgende Kurve γ in $D = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ zeigt:

γ ist nullhomolog aber nicht nullhomotop in D . Wird allerdings γ in den Kreuzungspunkten aufgeschnitten und entsprechend der Orientierung anders wieder zusammengesetzt – ändert das Kurvenintegral nicht – ergibt sich eine in D nullhomotope Kurve.



13.5 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und c ein in D nullhomologer Zyklus. Dann gilt für jede auf D holomorphe Funktion f , jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $a \in D \setminus \text{Sp}(c)$

$$(i) \quad \int_c f(z) dz = 0$$

$$(ii) \quad I(c, a)f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Beweis. (Nach Dixon, vergl. Lang) Es genügt, (ii) für den Spezialfall $n = 0$ zu beweisen, denn für beliebiges n ergibt sich die Formel durch Differentiation – ebenso folgt (i) aus (ii) unter Verwendung der Funktion $g(z) := (z-a)f(z)$ wegen

$$\int_c f(z) dz = \int_c \frac{g(z)}{z-a} dz = I(c, a)2\pi i g(a) = 0.$$

Ziel ist also der Beweis von

$$I(c, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle $z \in D \setminus \text{Sp}(c)$. Definiere zunächst $\delta: D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\delta(\zeta, z) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z. \end{cases}$$

Behauptung 1 δ ist stetig auf $D \times D$.

Es genügt, die Stetigkeit von δ in jedem Punkt $(a, a) \in D \times D$ zu zeigen. Dazu wähle eine offene Kreisscheibenumgebung $U \subset D$ von a . Für alle $\zeta, z \in U$ gilt dann auch

$$\delta(\zeta, z) = \int_0^1 f'(z + t(\zeta - z)) dt,$$

denn für $\zeta = z$ ist das trivial und für $\zeta \neq z$ folgt das aus der Tatsache, daß dann $(\zeta - z)^{-1}f(z + t(\zeta - z))$ eine Stammfunktion in t des Integranden ist. Folglich ist g stetig auf $U \times U$ und damit auf $D \times D$.

Definiere nun $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \int_c \delta(\zeta, z) d\zeta.$$

Behauptung 2 Es gibt eine holomorphe Funktion $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g = h|_D$.

Für jedes feste ζ ist $\delta(\zeta, z)$ stetig und damit wegen 5.7 holomorph als Funktion von z . Wegen 7.10 ist also g holomorph auf D . Wegen c nullhomolog in D gilt $K := \text{Sp}(c) \cup \text{Inn}(c) \subset D$. Das Komplement $G := \mathbb{C} \setminus K$ ist als Vereinigung von (offenen) Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(c)$ selbst offen, d.h. K ist abgeschlossen in \mathbb{C} . Es existiert ein $R > 0$ mit $\text{Sp}(c) \subset \{|z| \leq R\}$, d.h. $\{|z| > R\} \cap K = \emptyset$, d.h. K ist beschränkt in \mathbb{C} und folglich kompakt. Definiere $h \in \mathcal{H}(G)$ durch

$$(13.6) \quad h(z) := \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Für jedes $z \in D \cap G$ gilt dann

$$h(z) - g(z) = \int_c \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \delta(\zeta, z) \right) d\zeta = \int_c \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z) I(c, z) = 0,$$

was die Behauptung beweist.

Aus 13.6 folgt sofort $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |h(z)| = 0$. Mit Liouville erhalten wir daraus $h \equiv 0$. Für alle $z \in D \setminus \text{Sp}(c)$ gilt somit

$$\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i \mathbf{I}(c, z) f(z) = g(z) = 0. \quad \square$$

Wir erhalten als Folgerung

13.7 Residuensatz (Homologe Version) $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\Delta \subset D$ eine in D diskrete Teilmenge und $f \in \mathcal{H}(D \setminus \Delta)$. Ist dann c nullhomologer Zyklus in D mit $\text{Sp}(c) \cap \Delta = \emptyset$, so gilt

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in \Delta} \mathbf{I}(c, a) \text{Res}_f(a).$$

Beweis. $K := \text{Sp}(c) \cup \text{Inn}(c) \subset D$ ist kompakt (vergl den Beweis von 13.5). Also ist $K \cap \Delta$ endlich, d.h. $K \cap \Delta = \{a_1, \dots, a_r\}$ für paarweise verschiedene $a_j \in \overset{\circ}{K}$. Wie im Beweis von 10.2 seien kompakte Kreisscheiben K_1, \dots, K_r gewählt. Für $c_j := \mathbf{I}(c, a_j)$ und $\gamma_j: [0, 2\pi] \rightarrow \partial K_j$ definiert durch $\gamma_j(t) = a_j + \varepsilon e^{it}$ ist dann

$$\tilde{c} := c - \sum_{j=1}^r c_j \gamma_j$$

ein Zyklus mit $\text{Inn}(\tilde{c}) \subset D \setminus \Delta$, d.h. \tilde{c} ist nullhomolog in $D \setminus \Delta \implies \int_{\tilde{c}} f(z) dz = 0$ und somit

$$\int_c f(z) dz = \sum_{j=1}^r c_j \int_{\gamma_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^r \mathbf{I}(c, a_j) \text{Res}_f(a_j). \quad \square$$

Es sei darauf hingewiesen, daß 13.7 wegen 13.4 insbesondere 10.3 beweist.

14. Übungsaufgaben

1. Man zeichne folgende Mengen:

1. $A_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \geq r\}$, $a \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$.
2. $A_2 := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(iz) < 2\pi\}$.
3. $A_3 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leq c\}$, $c \in \mathbb{R}$.
4. $A_4 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = c|z + 1|\}$, $c > 0$.

Welche dieser Mengen sind offen, abgeschlossen, zusammenhängend?

2. Man zeige, daß für alle komplexen Zahlen z, w gilt:

$$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) \quad \text{und}$$

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) .$$

Man deute das Ergebnis anschaulich geometrisch.

3. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f_j: D_j \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, wobei

1. $f_1(z) = \operatorname{Im}(\exp(z))$
2. $f_2(z) = |\sin z|$
3. $f_3(z) = |z^3 - z^2|^{-1}$

mit $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq \pi, |\operatorname{Re}(z)| \leq 1\}$, $D_2 := i \cdot D_1$ und $D_3 := \{|z| \leq 2, z^3 \neq z^2\}$.

4. Sei $p(z) := az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c$, wobei $b, z \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathbb{R}$ und $ac - b\bar{b} < 0$.

1. Zeigen Sie, daß die Gleichung $p(z) = 0$ eine Kreislinie oder eine reell-affine Gerade in der komplexen Ebene darstellt.
2. Zeigen Sie, daß jede Kreislinie und jede reell-affine Gerade in der komplexen Ebene die Gestalt $\{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}$ mit einem p der obigen Form hat.
3. Was stellt die Menge $D := \{z \in \mathbb{C} : p(z) > 0\}$ dar?

5. Sei $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie und $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

Welche Bedingung muß $f(t)/t$ für $t \in S$ erfüllen, damit der Vektor $f(t)$ 'tangentiell' an S im Punkte t ist. Testen Sie dieses für die Funktion $f(z) := \alpha - \bar{\alpha}z^2$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig, und skizzieren sie f als Vektorfeld im Falle $\alpha = 1$.

6. Gegeben seien auf \mathbb{C} die Funktionen $\sin z := (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, $\cos z := (e^{iz} + e^{-iz})/2$.

1. Berechnen Sie deren Nullstellen.
2. Berechnen Sie $\sin^2 + \cos^2$.
3. Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |\sin z| \leq 1\}$ (Vergl. Aufgabe 3).
4. Berechnen Sie die Ableitung von \sin und von \cos .

7. Es seien $A, B \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen derart, daß f in $a \in A$ und g in $b := f(a)$ reell differenzierbar sind. Definiere $\bar{f}: A \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$.

1. Beweisen Sie

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a) \quad \text{und} \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a).$$

2. Beweisen Sie die Kettenregel für die Wirtinger-Ableitungen:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(a) = \frac{\partial g}{\partial w}(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a),$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{\partial g}{\partial w}(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a).$$

8. Sei $f(z) := 2z^2\bar{z} - z\bar{z}^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

1. Berechnen Sie für diese Funktion die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

2. In welchen Punkten $a \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar? Berechnen Sie in diesen Punkten den Wert $f'(a)$.

9. Man beweise oder widerlege: Es existiert eine holomorphe Funktion f auf \mathbb{C} , so daß $\operatorname{Re}(f) = u$ mit

1. $u(z) := x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$

2. $u(z) := x^3 - 6x^2 - 3xy^2 + 2y^2$.

10. Sei $K \subset \mathbb{C}$ das kompakte Rechteck mit den Eckpunkten $\pm 1 \pm i$. Man berechne durch direkte Anwendung der Definitionen die Integrale

$$\int_{\partial K} \frac{dz}{z} \quad \text{und} \quad \int_{\partial K} \operatorname{Re}(z) dz.$$

11. Sei $f = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re}(f)$ eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß f konstant ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $|f|$ ist konstant,

2. Es gibt eine differenzierbare Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, deren partielle Ableitungen in keinem Punkt gleichzeitig verschwinden und für die $F(u, v) \equiv 0$ gilt.

12. Sei $\gamma_1(t) := (\cos t)e^{it}$ und $\gamma_2(t) := (\cos 2t)e^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ sowie $\gamma_3(t) := te^{2\pi it}$ für $0 \leq t \leq 1$.

1. Man skizziere die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

2. Man berechne die Länge von γ_1 .

3. Man berechne für $k = 1, 2, 3$ das Integral $I_k := \int_{\gamma_k} z e^z dz$. (Hinweis: Finde eine Stammfunktion).

13.

1. Zeigen Sie, daß $G := \{re^{it} : r > 0 \text{ und } |t| < \pi\}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} ist. Skizzieren Sie dieses.
2. Zeigen Sie, daß durch $f(re^{it}) := \ln(r) + it$ eine Funktion auf G mit $\exp(f(z)) = z$ für alle $z \in G$ definiert wird.
3. Sei $f = u + iv$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil. Berechnen Sie $u(x, y)$ und $v(x, y)$ explizit und zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß f holomorph ist.

- 14.** Sei $D \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet mit $1 \in D$, und es sei f eine Stammfunktion von $1/z$ auf D mit $f(1) = 0$. Man zeige

1. Für jedes $r > 0$ existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = r$ und $w \notin D$.
2. $\exp(f(z)) = z$ für alle $z \in D$. (Hinweis: $\exp(f(z))/z$ ist konstant!)
3. Es existiert genau eine stetige Funktion $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(1) = 0$ und $z = |z|e^{i\varphi(z)}$ für alle $z \in D$.

(f heißt Hauptzweig des Logarithmus auf D , vgl. auch Aufgabe 13.)

- 15.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(D)$ und $F: I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar.

1. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung an F' dafür an, daß F eine Stammfunktion von f längs einer glatten Kurve $\gamma: I \rightarrow D$ ist.
2. Man bestimme mit Hilfe von Teilaufgabe (1.) eine Stammfunktion F von f längs γ für $I := \mathbb{R}$, $\gamma(t) := e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{1}{z}$ und $D := \mathbb{C}^*$. Skizziere γ in Abhängigkeit von α in den typischen Fällen.

- 16.** Die geschlossenen Kurven $\gamma_1, \gamma_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ seien definiert durch

$$\gamma_1(t) := 1 + 2|t|e^{i\pi t}, \quad \gamma_2(t) := e^{2\pi it} .$$

1. Man berechne unter Verwendung des Integralsatzes von Cauchy das Integral

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} .$$

2. Sind γ_1, γ_2 homotop als geschlossene Kurven in \mathbb{C}^* ?

- 17.** Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\sigma(z) := \bar{z}$ die Konjugationsabbildung auf \mathbb{C} und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Man zeige:

1. $U^\sigma := \sigma(U)$ ist offen in \mathbb{C} .
2. Die Funktion f ist genau dann holomorph in U , wenn $f^\sigma := \sigma \circ f \circ \sigma$ holomorph in U^σ ist.

- 18.** Sei $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und f eine auf K definierte stetige Funktion die im Inneren von K holomorph ist.

Man zeige:

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0 .$$

- 19.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine auf D holomorphe Funktion mit $\tan(f(z)) = z$ für alle $z \in D$ (genannt Zweig des Arcustangens).

1. Man berechne $f'(z)$ und zeige $D \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.
2. In $D := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \neq 0 \text{ oder } |\operatorname{Im}(z)| < 1\}$ existiert genau ein f mit $f(0) = 0$ und $\tan(f(z)) \equiv z$. (Hauptzweig)
3. Das Gebiet D in (2) ist maximal in dem Sinne, daß auf keinem echten Obergebiet von D ein Zweig des Arcustangens existiert.

(Hinweis: $\frac{1}{1+z^2}$ ist Linearkombination der Funktionen $\frac{1}{z+i}$ und $\frac{1}{z-i}$)

- 20.** Aus der reellen Analysis ist bekannt, daß die reelle Funktion $\arctan(x)$ Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist und deshalb insbesondere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

gilt. Man gebe einen alternativen Beweis für diese Gleichheit unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes an.

(Hinweis: Betrachte für $K_r := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z-i| \leq r\}$ Integrale der Form

$$\int_{\partial K_r} \frac{1}{1+z^2} dz .)$$

- 21.** Sei $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \neq 0 \text{ oder } |\operatorname{Im}(z)| > 1\}$

1. Ist D einfach zusammenhängend?
2. Existiert ein Zweig des Arcustangens auf D ?

- 22.** Berechne mit Hilfe der Integralformel von Cauchy folgende Integrale:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z^2-1)(z-1)^2}, \quad \int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z+i} dz, \quad \int_{|z+2i|=3} \frac{\exp(z)}{z^2+\pi^2} dz$$

- 23.** Seien $a, b \in \mathbb{C}$ fest gegeben. Man bestimme die Menge aller Werte des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)},$$

wobei γ alle stückweise glatten, geschlossenen Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ durchläuft.

24. Sei D ein Gebiet in \mathbb{C} und f eine auf D stetige Funktion. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ die Menge aller $\int_{\gamma} f(z) dz$, wobei γ alle stückweise glatten, geschlossenen Kurven in D durchläuft.

1. Man zeige, daß Ω eine Untergruppe von \mathbb{C} ist.
2. Man gebe ein Gebiet D und ein $f \in \mathcal{C}(D)$ an, für die $\Omega = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ gilt.
3. Kann f in (2) nicht-holomorph gewählt werden?

25. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $D = -D$. Man zeige

1. Jedes $f \in \mathcal{H}(D)$ hat eine eindeutige Darstellung $f = g + u$, wobei $g, u \in \mathcal{H}(D)$ gerade (d.h. $g(-z) = g(z)$) bzw. ungerade (d.h. $u(-z) = -u(z)$) sind.
2. Sei $K \subset D$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ∂K und $a \in D$ ein fester Punkt. Welche Bedingung muß a erfüllen, damit für alle $f \in \mathcal{H}(D)$ und g, u wie in (1)

$$u(a) = \frac{a}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z^2 - a^2} dz$$

gilt. Stelle eine entsprechende Integralformel für $g(a)$ auf.

26. f und g seien holomorphe Funktionen auf \mathbb{C} mit $f(z) = g(1/z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Man zeige, daß f und g konstant sind.

27. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $f_n(z) := n^{-2} \sin(nz)$. Man bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe $\sum_{n \geq 1} f_n(z)$ absolut konvergiert.

28. Es sei

$$f := \sum_{n \geq 0} c_n X^n \in F := \mathbb{C}[[X]]$$

eine formale Potenzreihe. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß f in F invertierbar ist.

Insbesondere gebe man eine Rekursionsformel für die Koeffizienten von f^{-1} an.

29. Sei $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ und \log der Hauptzweig des Logarithmus auf H .

1. Man entwickle \log um jeden Punkt $a \in H$ in eine Potenzreihe und bestimme deren Konvergenzgebiet H_a . Die darauf repräsentierte holomorphe Funktion werde mit f_a bezeichnet.
2. Für welche Punktepaare (a, b) in H gilt $-1 \in H_a \cap H_b$ und $f_a(-1) \neq f_b(-1)$.

30. Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

1.
$$\sum_{n \geq 1} n^{\alpha} z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

2.
$$\sum_{n \geq 1} (1 - 1/n)^{n^2} z^n,$$

3.
$$\sum_{n \geq 0} 2^{-n} z^{2^n} .$$

31. Sei f eine auf \mathbb{C} holomorphe Funktion. Man zeige, daß f ein Polynom ist, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n)} = 0$.
2. Es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $|f(z)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

32. Man entwickle die Funktion f in eine Potenzreihe um den Nullpunkt und bestimme den Konvergenzradius:

1.
$$f(z) := \frac{2z + 3}{z + 1}$$

2.
$$f(z) := \log(1 + z) .$$

33. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und f eine auf dem Abschluß \overline{D} von D nicht-konstante stetige Funktion, deren Einschränkung auf D holomorph ist. Man zeige:

1. Ist $|f|$ konstant auf dem Rand ∂D von D , so hat f eine Nullstelle in D .
2. Gilt die Aussage in (1) auch dann, wenn die Beschränktheit von D nicht vorausgesetzt wird?

34.

1. Sei $u := \exp(2\pi i/n)$, $n > 0$ ganz. Man zeige, daß die Zahlen u^k , $k = 1, \dots, n$, genau die n verschiedenen Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$ sind (genannt die n -ten *Einheitswurzeln*).
2. Man zeige, daß die Menge H aller Einheitswurzeln eine dichte Teilmenge von $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist (d.h. $\overline{H} = \mathbb{T}$).
3. Man finde das Konvergenzgebiet D der Reihe $g(z) := \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ und zeige, daß die Funktion $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ in keinen Randpunkt von D stetig fortsetzbar ist.
(Hinweis: Für $0 < t < 1$ und $u \in H$ betrachte $\lim_{t \rightarrow 1} |g(tu)|$.)

35. Man zeige:

1. Für jedes nicht-konstante $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ist $f(\mathbb{C})$ dicht in \mathbb{C} .
2. Ist a eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion $f \in \mathcal{H}(D)$, so ist für jede Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von a die Menge $f(U \cap D)$ dicht in \mathbb{C} .

Hinweis: Betrachte Funktionen der Form $g(z) = (f(z) - c)^{-1}$

36. Es sei f eine auf $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 5, |z - 2| > 1, |z + 2| > 1\}$ holomorphe Funktion. Man zeige: Es gibt eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$f(z) = \frac{a}{z - 2} + \frac{b}{z + 2} + g'(z), \quad z \in D,$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $g \in \mathcal{H}(D)$.

- 37.** Man entwickle die Funktion $f(z) := ((z-i)(z-2))^{-1}$ um $a = 1$ in eine Laurentreihe so, daß die Reihe für

$$1. z = 1/2 \qquad 2. z = i/2 \qquad 3. z = 2i$$

konvergiert. Welches sind die genauen Konvergenzgebiete der Reihen?

- 38.** Man bestimme die Singularitäten der folgenden Funktionen und gebe an, von welcher Art sie sind:

1. $f(z) := z/(e^z - 1)$,
2. $f(z) := (1 - e^z)/(1 + e^z)$,
3. $f(z) := (\sin z + \cos z)^{-1}$,
4. $f(z) := \exp(-1/z)$,
5. $f(z) := 1/\sin(\pi/z)$.

39.

1. f, g seien holomorphe Funktionen auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. Man zeige, daß für $h := f/g$ und jedes $a \in D$ mit $g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$ gilt: $\text{Res}_h(a) = f(a)/g'(a)$.
2. Man berechne $\text{Res}_h(a)$ für jedes $a \in \mathbb{C}$, wobei
 - i. $h(z) := (z(e^z - 1))^{-1}$,
 - ii. $h(z) := (z(z - \pi))^{-2}$,
 - iii. $h(z) := (1 + z^n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

- 40.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der folgenden Eigenschaft: $z \in D, t \in \mathbb{R} \Rightarrow z + t \in D$. Sei ferner f eine auf D holomorphe Funktion mit $f(z+1) = f(z)$ für alle $z \in D$. Man zeige:

1. Es gibt einen Kreisring $K = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$, und eine auf K holomorphe Funktion g mit $f(z) = g(\exp(2\pi iz))$ für alle $z \in D$.
2. f besitzt auf D eine kompakt konvergente Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2n\pi iz) \quad \text{mit} \quad c_n = \int_0^1 f(a+t) \exp(-2n\pi i(a+t)) dt$$

für jedes $a \in D$ (die Integrale hängen nicht von der Auswahl von a ab).

- 41.** Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ eine endliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ sei $f(p)$ das Produkt aller euklidischen Abstände von p zu p_1, p_2, \dots, p_r .

1. Man zeige, daß f auf \overline{D} – aber nicht auf D – das Maximum (Minimum) annimmt.
2. Welche der beiden Aussagen in (1) gelten für beschränkte Gebiete $D \subset \mathbb{R}$ entsprechend?

42.

1. Seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und f eine auf $D \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion, die im Punkte a einen Pol der Ordnung 2 hat. Man zeige:

$$g(z) := (z - a)^2 f(z), \quad z \in D \setminus \{a\},$$

ist holomorph in a fortsetzbar und $\text{Res}_f(a) = g'(a)$.

2. Man berechne

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{iz} dz}{z(z^2 + 1)^2}.$$

- 43.** Es sei $c \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Man betrachte die Menge \mathcal{F} aller holomorphen Funktionen $w = w(z)$, die in offenen zusammenhängenden Umgebungen der $1 \in \mathbb{C}^*$ definiert sind und dort der komplexen Differentialgleichung $w' = cw/z$ genügen. $V \subset \mathcal{O}_1$ sei die Menge aller derjenigen holomorphen Funktionskeime, die von Funktionen $f \in \mathcal{F}$ im Punkt 1 induziert werden.

1. Man zeige, daß V ein komplexer Vektorraum der Dimension 1 ist (differenziere Quotienten von Lösungen).
2. Man gebe ein nicht-triviales Element aus V explizit an und zeige, daß jeder Keim aus V längs jeder Kurve γ in \mathbb{C}^* mit Anfangspunkt 1 analytisch fortgesetzt werden kann.
3. Für die geschlossene Kurve $\gamma(t) := \exp(2\pi it)$, $0 \leq t \leq 1$, bestimme man den zugehörigen Monodromieoperator auf V in Abhängigkeit von c .

15. Einige Symbole

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	natürliche, ganze, reelle, komplexe Zahlen	3
\mathbb{C}^*	Gruppe der komplexen Zahlen $\neq 0$	3
\mathbb{T}	Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1	3
$\arg(z)$	Argument von z	3
$\text{Sp}(\gamma)$	Spur der Kurve γ	3
$f'(a)$	komplexe Ableitung von f in a	4
$df/dz(a)$	$= f'(a)$	4
$\mathcal{C}(D)$	Raum der stetigen Funktionen auf D	5
$\mathcal{H}(D)$	Raum der holomorphen Funktionen auf D	5
\exp	komplexe Exponentialfunktion	5
$\partial f/\partial z, \partial f/\partial \bar{z}$	Wirtinger Ableitung nach z , nach \bar{z}	6
$\mathcal{C}^n(D)$	Raum der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D	8
$\int_{\gamma} f(z) dz$	Krvenintegral längs γ	9
$L(\gamma)$	Bogenlänge von γ	9
$\int_{\partial K} f(z) dz$	Integral über den orientierten Rand von K	11
$I(\gamma, w)$	Index, Windungszahl von γ in w	18
$\text{Inn}(\gamma)$	Das Innere der Kurve γ	18
$f^{(n)}$	n -te komplexe Ableitung von f	19
$F := \mathbb{C}[[X]]$	Ring der formalen Potenzreihen in X über \mathbb{C}	21
$S := \mathbb{C}[X]$	Polynomring über \mathbb{C}	21
$R(f)$	Konvergenzradius von f	21
$K := \mathbb{C}\langle X \rangle$	Ring der konvergenten Potenzreihen	22
$\arctan(z)$	Hauptzweig des Arcustangens	23
$\omega_f(a)$	Nullstellenordnung von f in a	27
S^2	Einheitssphäre im \mathbb{R}^3	28
∞	unendlich ferner Punkt in $\widehat{\mathbb{C}}$	28
$\widehat{\mathbb{C}}$	Riemannsche Zahlenkugel	28
P_f	Polstellenmenge von f	28
$\mathcal{M}(D)$	Ring der meromorphen Funktionen auf D	28
$\text{Res}_f(a)$	Residuum von f in a	29
\mathcal{O}_a	Ring der holomorphen Funktionskeime in a	30
f_a	von f in a induzierter Keim	30
D_a	in \mathcal{O}_a Raum der im Gebiet D unbegrenzt analytisch fortsetzbaren Keime	31
\wedge	äußeres Produkt von Differentialformen	33
$\Omega^p(U)$	$\mathcal{C}(U)$ -Modul der stetigen p -Formen auf U	35

analytische Fortsetzung	30	Kurvenintegrale	9
analytische Funktion	23	Laplace-Operator	8
Arcustangens	23	Laurententwicklung	26
Argument von z	3	Laurentreihe	25, 44
Aufwickelhomomorphismus	3, 6	Liouville	20
Auswertung von Integralen	30	logarithmische Ableitung	28
Bogenlänge	9	Logarithmus	6, 17, 24, 30
Casorati-Weierstraß	27	lokal-biholomorph	24
Cauchy-Riemann Differentialgleichungen	8	lokal-injektiv	24
Cauchysche Integralformel	18	lokal-integrabel	13, 32
Cauchysche Ungleichungen	20	lokal-konstant	3
Cauchyscher Integralsatz	14-15	lokales Maximum	25
Differentialform	9, 11, 31-32	Maximumprinzip	25
Drehstreckungen	8	meromorph	28
einfach-zusammenhängend	15, 17, 31	Mittelwertsatz	19
Einheitswurzel	43	Monodromieoperator	31, 45
exakt	32	Monodromiesatz	31
formale Potenzreihe	21	Morera	20
Fundamentalsatz der Algebra	20, 29	Nordpol	27
Funktionenkörper	28	nullhomolog	36
Gebiet	4	nullhomotop	15
Gebietstreue	24	Nullstellenmenge	23
geschlossen	32	Nullstellenordnung	26
glatte Kurve	9, 32	orientierte Rand	32
glattes Randstück	10	Parametertransformation	10
harmonisch	8	Pol	27
Hauptzweig des Arcustangens	23	Polstellenmenge	28
Hauptzweig des Logarithmus	17, 30	Polynom	21
hebbare Singularität	27	Potenzreihen	21
holomorphe Funktion	5	reell differenzierbar	6
holomorphe Funktionskeime	30	Residuenkalkül	28
homotop	15	Residuensatz	29, 37
Homotopie	15, 31	Residuum	28
Identitätssatz	24	Riemannsches Zahlenkugel	27
Index	18	Riemannscher Hebbbarkeitssatz	26
Innere einer Kurve	18	Spur einer Kurve	3
integrabel	11, 32	Spur eines Zyklus	35
Integral	11	Stammfunktion	11, 32
isolierte Singularität	26	Stammfunktion längs φ	16
isolierter Randpunkt	26	stereographische Projektion	27
Keim	30	stückweise glatte Kurve	9, 32
Kette	35	stückweise glatter Rand	11
Kettenregel für die Wirtinger-Ableitungen	39	Stokes	31
kompakte Konvergenz	20	Taylorreihe	23
komplex differenzierbar	4	Umlaufzahl	18
komplex-analytisch	23	wegzusammenhängend	3
komplexe Ableitung	4	Weierstraß	20
konstante Kurve	15	wesentliche Singularität	43
konvergente Potenzreihe	22	wesentliche Singularität	27
Konvergenzgebiet	21, 42	Windungszahl	18
Konvergenzradius	21, 43	Wirtinger Ableitung	7
Kreiskettenverfahren	30	zusammenhängend	3
Kreisring	25	Zweig des Arcustangens	41
Kurve, glatt	9	Zweig des Logarithmus	17
Kurvenintegral	32	Zyklus	35