

# Komplexe Analysis

Vorlesung

W. Kaup

0. Symbolverzeichnis .....	2
1. Komplexe Differentialrechnung auf Banachräumen .....	3
2. Rückführung auf den eindimensionalen Fall .....	5
3. Potenzreihen in komplexen Banachräumen .....	6
4. Der endlich-dimensionale Fall .....	9
5. Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen .....	12
6. Einfache Folgerungen .....	14
7. Fortsetzungssätze .....	16
8. Holomorphiegebiete und Holomorphiehüllen .....	19
9. Beispiele für Holomorphiehüllen .....	22
10. Komplexe Mannigfaltigkeiten .....	25
11. Invariante Metriken .....	28
12. Hermitesche Metriken .....	33
13. Holomorphe Vektorfelder .....	37
14. Holomorphe Flüsse .....	39
15. Vektorfelder und Automorphismen .....	41
16. Automorphismen beschränkter Gebiete .....	43
A. Anhang .....	46
L. Literatur .....	48
I. Index .....	49

## 0. Einige Symbole

$df$	komplexe Ableitung von $f$	3
$d^k f$	$k$ -te Ableitung von $f$	3
$\mathcal{H}(U, V)$	Raum aller holomorphen Abbildungen $f : U \rightarrow V$	3
$\mathcal{H}(U)$	Algebra der holomorphen Funktionen auf $E$	3
$\text{Aut}(U)$	Automorphismengruppe von $U$	3
$\text{GL}(E)$	allgemeine lineare Gruppe von $E$	4
$L_a, R_a$	Links-, Rechtsmultiplikation mit $a$	4
$g'(a)$	eindimensionale Ableitung von $g$ in $a$	5
$\hat{q}$	zur $k$ -linearen Abbildung $q$ gehörendes Polynom	6
$\mathcal{S}_k$	Permutationsgruppe der Stufe $k$	6
$\mathcal{L}_s^k(E, F)$	Raum der symmetrischen stetigen $k$ -linearen Abbildungen $E \rightarrow F$	7
$\mathcal{P}_k(E, F)$	Raum der stetigen $k$ -homogenen Polynome $E \rightarrow F$	7
$\mathbb{T}$	Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1	8
$\mathbb{D}$	offener Einheitskreis in $\mathbb{C}$	8
$\partial f / \partial z_j$	partielle komplexe Ableitung nach $z_j$	9
$B_r(a), B_r$	offene Kugel mit Radius $r$ um $a$ , um 0	14
$H \oplus K$	direkte Summe abgeschlossener Unterräume	16
$H \times K$	direktes Produkt der Banachräume $H, K$	16
$\text{codim}$	Codimension	17
$\mathcal{O}_a$	Algebra der holomorphen Funktionskeime in $a$	21
$f_a$	Funktionskeim von $f$ in $a$	21
$\mathcal{O}^F$	Garbe der $F$ -wertigen holomorphen Funktionskeime	21
$\mathcal{E}(D)$	Holomorphiehülle von $D$	22
$M \times N$	direktes Produkt komplexer Mannigfaltigkeiten	26
$M/\Gamma$	Raum der $\Gamma$ -Bahnen in $M$	26
$\mathbb{P}(E)$	Projektiver Raum von $E$	27
$\mathbb{P}_n$	$n$ -dimensionaler projektiver Raum	27
$TM$	Tangentialbündel von $M$	28
$T_a M$	Tangentialraum in $a$ an $M$	28
$Tf$	Differential von $f$	28
$\dot{\gamma}(0)$	Tangentialvektor der Kurve $\gamma$ im Anfangspunkt	29
$L_\mu(\gamma)$	$\mu$ -Bogenlänge von $\gamma$	29
$f^*(\nu)$	zurückgeliftete Pseudonorm	29
$\omega$	Poincaré-Metrik	30
$\kappa_M$	Kobayashi-Pseudonorm	30
$\gamma_M$	Carathéodory-Seminorm	31
$U(\Phi)$	unitäre Gruppe der hermiteschen Form $\Phi$	35
$\mathfrak{V}(M)$	Raum der holomorphen Vektorfelder auf $M$	37
$[X, Y]$	Klammerprodukt der Vektorfelder $X$ und $Y$	37
$\mathbf{aut}(M)$	Raum aller vollständigen holomorphen Vektorfelder auf $M$	38
$\exp$	Exponentialabbildung auf $\mathbf{aut}(M)$	42
$\mathcal{L}(E, F)$	Banachraum aller stetigen linearen Abbildungen $E \rightarrow F$	46
$E'$	Dualraum von $E$	46
$\mathcal{L}^k(E, F)$	Raum aller stetigen $k$ -linearen Abbildungen $E^k \rightarrow F$	47

## 1. Komplexe Differentialrechnung auf Banachräumen

Zur Einführung der Holomorphie auf Banachräumen wird der Zugang nach Cauchy-Riemann gewählt: Holomorphie = Komplexe Differenzierbarkeit. Die Äquivalenz mit anderen Definitionen – insbesondere der Weierstraßsche Zugang über die lokale Entwickelbarkeit in konvergente Potenzreihen – wird später gegeben.

Im folgenden seien  $E, F$  stets komplexe Banachräume,  $U \subset E$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow F$  eine Abbildung (auch  $F$ -wertige Funktion genannt).  $\mathcal{L}(E, F)$  sei der Banachraum aller stetigen linearen Abbildungen  $\lambda : E \rightarrow F$  versehen mit der Norm  $\|\lambda\| := \sup\{\|\lambda(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$ , vergl. Anhang.

**1.1 Definition**  $f$  heißt **komplex differenzierbar** in  $a \in U$  (im Sinne von Fréchet)  $\iff \exists \lambda \in \mathcal{L}(E, F)$  mit

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{\|z - a\|} \|f(z) - f(a) - \lambda(z - a)\| = 0$$

(d.h.  $f$  wird in  $a$  durch die affine Abbildung  $\tau(z) = f(a) + \lambda(z - a)$  approximiert).

Man überlegt sich leicht, daß die stetige lineare Abbildung  $\lambda$  in 1.1 eindeutig durch  $f$  und  $a$  bestimmt ist – sie heißt die **Ableitung** (auch totale Ableitung oder Fréchet-Ableitung) von  $f$  in  $a$  und werde mit  $df(a)$  bezeichnet. Eine äquivalente Charakterisierung wird gegeben durch

**1.2 Lemma** Die Abbildung  $f : U \rightarrow F$  ist genau dann komplex differenzierbar in  $a \in U$ , wenn eine Abbildung  $\Delta : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- (i)  $f(z) = f(a) + \Delta(z)(z - a)$  für alle  $z \in U$ ,
- (ii)  $\Delta$  ist stetig im Punkte  $a \in U$  (und dann gilt  $df(a) = \Delta(a)$ ).

*Beweis.* Sei  $f$  komplex differenzierbar in  $a$ . Zum Nachweis, daß  $\Delta$  mit den Eigenschaften (i) und (ii) existiert, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $a = 0 \in E$ ,  $f(a) = 0 \in F$  und  $df(a) = 0 \in \mathcal{L}(E, F)$  annehmen. Definiere  $\Delta(z) \in \mathcal{L}(E, F)$  für alle  $z \neq 0$  aus  $U$  durch  $w \mapsto \lambda_z(w) \cdot f(z)$ , wobei  $\lambda_z \in E'$  eine Linearform mit  $\lambda_z(z) = 1 = \|\lambda_z\| \cdot \|z\|$  ist (die Existenz einer derartigen Linearform folgt aus dem Satz von Hahn-Banach, vergl. Anhang A3). Für  $z = 0$  setzen wir noch  $\Delta(0) := 0 \in \mathcal{L}(E, F)$ . Damit gilt  $f(z) = \Delta(z)(z)$  und, falls  $z \neq 0$ ,  $\|\Delta(z)\| = \|\lambda_z\| \cdot \|f(z)\| = \|f(z)\|/\|z\|$ . Daraus folgt  $\lim_{z \rightarrow 0} \Delta(z) = df(0) = 0$ , d.h. die Abbildung  $\Delta$  ist stetig in 0.

Wird umgekehrt für  $f$  die Existenz einer Abbildung  $\Delta$  mit den Eigenschaften (i), (ii) vorausgesetzt, so sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen, die komplexe Differenzierbarkeit in  $a$  mit  $df(a) = \Delta(a)$  zu zeigen.  $\square$

Es gelten die üblichen Rechenregeln der Differentialrechnung, so z. B.

$$d(f + g)(a) = df(a) + dg(a) \quad ,$$

falls  $f, g : U \rightarrow F$  komplex differenzierbar in  $a$  sind, wie auch die **Kettenregel**

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a), \quad b := f(a),$$

falls  $f : U \rightarrow V \subset F$  komplex differenzierbar in  $a \in U$ ,  $g : V \rightarrow G$  komplex differenzierbar in  $b \in V$  und  $V \subset F$  offen ist. Ferner ist  $f$  stetig in  $a$ , wenn  $f$  komplex differenzierbar in  $a$  ist.

**1.3 Definition**  $f : U \rightarrow F$  heißt komplex differenzierbar oder auch **holomorph**  $\iff df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$  existiert für alle  $a \in U$ . Dann heißt  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  die **komplexe Ableitung** von  $f$ . Ist diese wieder holomorph (wir werden das später allgemein zeigen), so heißt  $d^2f := ddf : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$  die zweite Ableitung von  $f$  – allgemeiner  $d^k f$  die  $k$ -te Ableitung von  $f$ . Für  $k = 0$  setzen wir  $d^0 f := f$ .

**1.4 Bemerkung** Dieser Holomorphiebegriff ist offensichtlich invariant gegen Übergang zu äquivalenten Normen auf  $E$  und  $F$  – hängt also nur von den Topologien auf  $E, F$  ab.

Für jedes offene  $U \subset E$  und jedes offene  $V \subset F$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{H}(U, V)$  die Menge aller holomorphen Abbildungen  $f : U \rightarrow F$  mit  $f(U) \subset V$ , und wir sprechen von holomorphen Abbildungen  $U \rightarrow V$ . Offenbar ist  $\mathcal{H}(U, F)$  ein komplexer Vektorraum und  $\mathcal{H}(U) := \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$  eine komplexe Algebra mit Eins. Eine holomorphe Abbildung  $f : U \rightarrow V$  heißt **biholomorph**, wenn  $f$  bijektiv und auch  $f^{-1}$  holomorph ist (dann ist insbesondere  $df(a) : E \rightarrow F$  ein linearer Homöomorphismus für alle  $a \in U$ ). Existiert eine biholomorphe Abbildung  $U \rightarrow V$ , so heißen  $U, V$  **biholomorph äquivalent**. Jede biholomorphe Abbildung  $g : U \rightarrow U$  heißt ein **Automorphismus** von  $U$ . Die Gesamtheit  $\text{Aut}(U)$  aller Automorphismen von  $U$  ist eine Gruppe bezüglich Komposition, die (holomorphe) **Automorphismengruppe** von  $U$ .

### 1.5 Beispiel

- (i) Ist  $f : U \rightarrow F$  konstant, so gilt  $df(a) = 0$  für alle  $a \in U$ .
- (ii) Ist  $f : E \rightarrow F$  stetig linear, so gilt  $df(a) = f$  für alle  $a \in E$  (d.h.  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  ist konstant und somit  $d^2f \equiv 0$ ).
- (iii) Ist  $f : E \rightarrow F$  linear und unstetig, so ist  $f$  in keinem Punkt von  $E$  komplex differenzierbar.

**1.6 Übungsaufgabe** Ist  $E = E_1 \times \dots \times E_k$  (vergl. A.5) für Banachräume  $E_1, \dots, E_k$ , so ist jede stetige  $k$ -lineare Abbildung  $f : E \rightarrow F$  holomorph, und es gilt

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^k f(a_1, \dots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, \dots, a_k)$$

für alle  $a = (a_1, \dots, a_k)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_k) \in E$ .

**1.7 Beispiel** Sei  $A := \mathbb{C}^{n \times n}$  der  $n^2$ -dimensionale Vektorraum aller  $n \times n$ -Matrizen  $z = (z_{ij})$  über  $\mathbb{C}$ , wobei  $i$  der Zeilen- und  $j$  der Spaltenindex sei. Dann ist  $\det : A \rightarrow \mathbb{C}$  ein homogenes Polynom vom Grade  $n$ , und  $G := \text{GL}(n, \mathbb{C}) := \{z \in A : \det(z) \neq 0\}$  ist die offene Untergruppe aller invertierbaren Matrizen. Wir behaupten, daß die durch  $f(z) = z^{-1}$  definierte Inversenbildung  $f : G \rightarrow G$  holomorph ist. Dazu betrachten wir für jede Matrix  $z = (z_{ij})$  die Adjunkte  $\tilde{z} = (\tilde{z}_{ij}) \in A$ , wobei jedes  $\tilde{z}_{ij}$  gerade die Determinante derjenigen Matrix ist, die aus  $z$  entsteht, indem alle Elemente der  $j$ -ten Zeile und der  $i$ -ten Spalte durch 0 ersetzt werden, im Kreuzungspunkt dagegen eine 1 gesetzt wird. Dann liefert  $z \mapsto \tilde{z}$  ein homogenes Polynom  $A \rightarrow A$  vom Grade  $n - 1$ , und nach bekannten Entwicklungssätzen der linearen Algebra ist  $z\tilde{z} = \det(z)e$  für die Einheitsmatrix  $e \in A$ . Dieses zeigt, daß auch die Inversenbildung  $f(z) = \det(z)^{-1} \cdot \tilde{z}$  holomorph ist.  $\square$

Die Aussage dieses Beispiels kann von  $E = \mathbb{C}^n$  auf komplexe Banachräume beliebiger Dimension übertragen werden, allerdings haben wir im allgemeinen keine Determinante zur Verfügung.

**1.8 Übungsaufgabe** Es seien  $A := \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$  die Endomorphismenalgebra von  $E$  und  $G := \text{GL}(E)$  die Gruppe der invertierbaren Elemente von  $A$ . Für jedes  $a \in A$  sei  $L_a$  die durch  $z \mapsto az$  definierte Linksmultiplikation – analog sei  $R_a$  durch  $z \mapsto za$  definiert. Dann ist  $G \subset A$  offen (vergl. A.1), und die durch  $f(z) = z^{-1}$  definierte Inversenbildung  $f : G \rightarrow G$  ist holomorph mit

$$df(a) = -R_b \circ L_b, \quad b := a^{-1}$$

für alle  $a \in G$  (d.h. also  $df(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1}$  für alle  $h \in A$ ). Zum Beweis zeige man für das Einselement  $e := \text{id}_E$  von  $G$  und jedes  $h \in A$  mit  $\|h\| < 1$  die Reihendarstellung

$$(e - h)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} h^k.$$

**Zusatz:** Differenzierbarkeit kann analog zu Definition 1.1 natürlich auch im reellen Fall eingeführt werden: Sind etwa  $X, Y$  beliebige reelle Banachräume, ist  $\mathcal{L}(X, Y)$  der (reelle) Banachraum aller stetigen linearen Abbildungen  $X \rightarrow Y$ , so heißt für eine offene Teilmenge  $U \subset X$  eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  (reell) differenzierbar in  $a \in U$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow a} \|x - a\|^{-1} \|f(x) - f(a) - \lambda(x - a)\| = 0$  für ein geeignetes (und dann eindeutig bestimmtes)  $\lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$  gilt. Wieder schreiben wir  $df(a)$  statt  $\lambda$  und bezeichnen mit  $\mathcal{C}^1(U, Y)$  den reellen Vektorraum aller überall differenzierbaren Funktionen  $f : U \rightarrow Y$  mit stetiger Ableitung  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ . Allgemeiner ist  $\mathcal{C}^k(U, Y)$  der Raum aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren  $Y$ -wertigen Funktionen auf  $U$ .

Sind nun wieder  $E, F$  komplexe Banachräume, so können diese auch als reelle Banachräume aufgefaßt werden. Neben  $\mathcal{L}(E, F)$  haben wir somit auch den komplexen Banachraum  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$  aller stetigen reell-linearen Abbildungen  $E \rightarrow F$ . Offenbar gilt  $\mathcal{L}(E, F) = \{\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F) : \lambda(iv) = i\lambda(v) \quad \forall v \in E\}$ . Allgemeiner hat jedes  $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$  eine eindeutige Darstellung  $\lambda = \lambda^+ + \lambda^-$ , wobei  $\lambda^+$  komplex-linear und  $\lambda^-$  konjugiert-linear ist (d.h.  $\lambda^\varepsilon \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$  erfüllt  $\lambda^\varepsilon(iv) = \varepsilon i \lambda^\varepsilon(v)$  für  $\varepsilon = \pm$ ). Man braucht ja nur für jedes  $v \in E$  die offensichtlichen Gleichungen

$$i\lambda(v) = i\lambda^+(v) + i\lambda^-(v), \quad \lambda(iv) = i\lambda^+(v) - i\lambda^-(v)$$

nach  $\lambda^+(v)$  und  $\lambda^-(v)$  aufzulösen. Für jedes offene  $U \subset E$  und jede reell-differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow F$  mit Ableitung  $df(a) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$  in  $a \in U$  bezeichnen wir mit  $\partial f(a) := df(a)^+ \in \mathcal{L}(E, F)$  den zugehörigen komplex-linearen Anteil und mit  $\bar{\partial} f(a) := df(a)^-$  den konjugiert-linearen Anteil. Die Holomorphie von  $f$  ist offensichtlich äquivalent zur Gleichung  $\bar{\partial} f = 0$  (und dann gilt  $df = \partial f$ ). Diese Gleichung ist eine Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung.

## 2. Rückführung auf den eindimensionalen Fall

Wir betrachten holomorphe Funktionen  $g(z)$  der einen komplexen Variablen  $z \in \mathbb{C}$  mit beliebigen Zielräumen  $F$ . Durch Komposition mit beliebigen stetigen Linearformen  $\lambda : F \rightarrow \mathbb{C}$  werden daraus  $\mathbb{C}$ -wertige holomorphe Funktionen  $\lambda \circ g$  im klassischen Sinne.

Im folgenden seien  $W \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge,  $F$  ein komplexer Banachraum und  $g : W \rightarrow F$  eine Abbildung. Man überzeugt sich dann leicht, daß  $g$  genau dann komplex differenzierbar in  $a \in W$  ist, wenn

$$(2.1) \quad g'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} \in F$$

existiert (und dieser Limes ist dann  $dg(a)(1)$ ).

**2.2 Satz** *Ist  $W \subset \mathbb{C}$  offen, so ist eine stetige Abbildung  $g : W \rightarrow F$  genau dann holomorph, wenn  $\lambda \circ g : W \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist für jede stetige Linearform  $\lambda \in F' := \mathcal{L}(F, \mathbb{C})$ .*

*Beweis.* Sei  $\lambda \circ g$  holomorph für jedes  $\lambda \in F'$ . Ist dann  $a \in W$ , so muß die Existenz von  $g'(a)$  nachgewiesen werden. Dazu dürfen wir  $a = 0$  annehmen. Für  $r > 0$  mit  $K := \{|z| \leq r\} \subset W$  gilt die Cauchysche Integralformel

$$(2.3) \quad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{g(t)}{t-z} dt$$

für alle  $z$  mit  $|z| < r$ . Zum Beweis wende jedes  $\lambda \in F'$  auf beide Seiten von (2.3) an und beachte (A.3), (A.9). In der üblichen Weise kann der Integrand in eine Potenzreihe nach  $z$  entwickelt werden, die auf jeder Kreisscheibe  $|z| \leq \rho$ ,  $\rho < r$  gleichmäßig konvergiert. Wegen  $g$  stetig darf Integration und Summation vertauscht werden, und wir erhalten für  $g$  eine auf jedem  $B_\rho := \{|z| \leq \rho\}$ ,  $\rho < r$ , gleichmäßig konvergente Potenzreihenentwicklung

$$(2.4) \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

wobei

$$(2.5) \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{g(t)}{t^{k+1}} dt \in F.$$

Insbesondere ist also  $g$  komplex differenzierbar in  $a$  (warum?). □

**2.6 Folgerung** *Ist  $W \subset \mathbb{C}$  offen, so ist jede holomorphe Abbildung  $g : W \rightarrow F$  beliebig oft komplex differenzierbar, und für jedes  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a \in W$ ,  $r > 0$  mit  $\{|z - a| \leq r\} \subset W$  gilt*

$$g^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{g(a+t)}{t^{k+1}} dt \in F.$$

*Beweis.* Für jedes  $\lambda \in F'$  und  $f := \lambda \circ g$  gilt  $f' = \lambda \circ g'$ . □

Seien nun wieder  $E, F$  beliebige komplexe Banachräume,  $U \subset E$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow F$  eine Abbildung. Für jedes  $a \in U$  und jedes  $v \in E$  existiert dann eine offene Umgebung  $W \subset \mathbb{C}$  mit  $a + tv \in W$  für alle  $t \in W$ . Ist dann die durch  $g(t) = f(a + tv)$  definierte Abbildung  $g : W \rightarrow F$  komplex differenzierbar in  $0 \in W$ , so heißt  $d_v f(a) := g'(0)$  die (komplexe) **Richtungsableitung** von  $f$  in Richtung  $v$  im Punkte  $a$ . Ist insbesondere  $f$  holomorph so gilt offenbar stets  $d_v f(a) = df(a)(v)$ .

**2.7 Definition** Eine Abbildung  $f : U \rightarrow F$  heißt **G-holomorph** (oder auch holomorph im Sinne von Gateaux), wenn alle komplexen Richtungsableitungen  $d_v f(a)$  existieren für  $a \in U$  und  $v \in E$ .

G-holomorphe Abbildungen brauchen nicht stetig zu sein – so ist etwa jede unstetige lineare Abbildung  $E \rightarrow F$  G-holomorph aber nicht holomorph. Andererseits folgt aus 2.2 unmittelbar

**2.8 Satz** *Eine stetige Abbildung  $f : U \rightarrow F$  ist genau dann G-holomorph, wenn für jedes  $\lambda \in F'$  die Komposition  $\lambda \circ f$  eine G-holomorphe Funktion auf  $U$  ist.*

**2.9 Bemerkung** Nach einem Resultat von Dunford (vgl. [2], p. 126) kann in 2.2 und damit auch in 2.8 auf die Stetigkeit von  $f$  verzichtet werden.

### 3. Potenzreihen in komplexen Banachräumen

Wir führen für beliebige komplexe Banachräume den Begriff der formalen Potenzreihe ein. Die zugehörigen Konvergenzgebiete sind vollkommen kreisförmige Gebiete, die natürlichen Verallgemeinerungen der offenen Kreisscheiben in  $\mathbb{C}$

Seien  $E, F$  komplexe Banachräume und  $k \geq 1$  eine natürliche Zahl. Für jede  $k$ -lineare Abbildung  $q : E^k \rightarrow F$  (vgl. Anhang) definiert

$$p(z) := q(z, \dots, z), \quad z \in E,$$

eine Abbildung  $p : E \rightarrow F$ , die wir auch mit  $\widehat{q}$  bezeichnen und  $k$ -**homogenes Polynom**<sup>†</sup> von  $E$  nach  $F$  nennen. Setzen wir

$$\|p\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|p(x)\| \leq +\infty$$

für  $p = \widehat{q}$ , so gilt offenbar  $\|p\| \leq \|q\|$ . Für jede Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_k$  definiert auch

$$q^\sigma(z_1, \dots, z_k) := q(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$$

eine  $k$ -lineare Abbildung  $q^\sigma : E^k \rightarrow F$  mit  $\widehat{q} = \widehat{q^\sigma}$ . Die  $k$ -lineare Abbildung  $q$  wird **symmetrisch** genannt, falls  $q^\sigma = q$  für alle  $\sigma \in \mathcal{S}_k$  gilt. Offenbar ist

$$q_s := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} q^\sigma$$

eine symmetrische  $k$ -lineare Abbildung mit  $\widehat{q}_s = \widehat{q}$ . Wir wollen deshalb im folgenden für  $p = \widehat{q}$  stets annehmen, daß die  $k$ -lineare Abbildung  $q$  symmetrisch ist. Dann ist aber  $q$  durch  $p = \widehat{q}$  bereits eindeutig bestimmt, genauer gilt für alle  $h_1, \dots, h_k \in E$  die Polarisationsformel

$$(3.1) \quad q(h_1, \dots, h_k) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{t_1 = \pm 1} \cdots \sum_{t_k = \pm 1} \frac{p(t_1 h_1 + \dots + t_k h_k)}{t_1 t_2 \cdots t_k}.$$

Der Beweis von (3.1) ist nicht schwierig, benötigt jedoch einige Schreiarbeit: Sei  $S$  die Menge aller Abbildungen  $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  und sei  $T := \{t \in \mathbb{R}^k : |t_j| = 1 \forall j\}$ . Die Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_k$  ist in  $S$  enthalten, und es gilt für jedes  $\sigma \in S$

$$\sum_{t \in T} \frac{t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \cdots t_{\sigma(k)}}{t_1 t_2 \cdots t_k} = \begin{cases} 2^k & \sigma \in \mathcal{S}_k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

(denn liegt z.B.  $j \in \{1, \dots, k\}$  nicht im Bild der Abbildung  $\sigma$ , so kommen alle Summanden paarweise mit gegensätzlichem Vorzeichen vor und heben sich fort). Also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} \frac{p(t_1 h_1 + \dots + t_k h_k)}{t_1 t_2 \cdots t_k} &= \sum_{t \in T} \frac{q(t_1 h_1 + \dots + t_k h_k, \dots, t_1 h_1 + \dots + t_k h_k)}{t_1 t_2 \cdots t_k} \\ &= \sum_{t \in T} \sum_{\sigma \in S} \frac{q(t_{\sigma(1)} h_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)} h_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(k)} h_{\sigma(k)})}{t_1 t_2 \cdots t_k} \\ &= \sum_{\sigma \in S} \sum_{t \in T} \frac{t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \cdots t_{\sigma(k)}}{t_1 t_2 \cdots t_k} q(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(k)}) \\ &= 2^k \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} q(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(k)}) = 2^k k! q(h_1, h_2, \dots, h_k). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich insbesondere

$$(3.2) \quad \|p\| \leq \|q\| \leq \frac{k^k}{k!} \|p\|,$$

und folglich ist  $p$  genau dann stetig, wenn  $\|p\| < \infty$  gilt.

<sup>†</sup> Da der Körper der komplexen Zahlen unendlich ist, brauchen wir nicht zwischen Polynomen und Polynomabbildungen zu unterscheiden

**3.3 Übungsaufgabe** Jedes stetige  $k$ -homogene Polynom  $p : E \rightarrow F$  ist holomorph, und  $dp : E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  ist ein  $(k-1)$ -homogenes Polynom, genauer

$$dp(z)(h) = k q(h, z, \dots, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{p(z+th)}{t^2} dt$$

für alle  $z, h \in E, k \geq 1$  und  $q = \tilde{p}$ .

**3.4 Übungsaufgabe** Es sei  $q : E^k \rightarrow F$  eine symmetrische  $k$ -lineare Abbildung und  $p = \hat{q} : E \rightarrow F$  das zugehörige  $k$ -homogene Polynom. Man zeige für alle  $a, h \in E$ :

(i) Es existieren  $c_0, c_1, \dots, c_k \in F$  mit

$$p(a+th) = \sum_{j=0}^k c_j t^j \quad \text{für alle } t \in \mathbb{C}.$$

(ii)

$$c_j = \binom{k}{j} q(\underbrace{h, \dots, h}_j, \underbrace{a, \dots, a}_{k-j}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{p(a+th)}{t^{j+1}} dt \quad \text{für alle } j \leq k.$$

**3.5 Beispiel** Es sei  $E = \mathbb{C}^k$  mit der Norm  $\|z\| := |z_1| + \dots + |z_k|$  für alle  $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ . Durch

$$p(z) = z_1 z_2 \cdots z_k$$

wird dann ein  $k$ -homogenes Polynom  $p : E \rightarrow \mathbb{C}$  definiert – die zugehörige symmetrische  $k$ -lineare Abbildung  $q : E^k \rightarrow \mathbb{C}$  wird offensichtlich durch

$$q(z^1, \dots, z^k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} z_1^{\sigma(1)} z_2^{\sigma(2)} \cdots z_k^{\sigma(k)}$$

für alle  $z^1, z^2, \dots, z^k \in E$  gegeben, wobei  $z^i = (z_1^i, \dots, z_k^i) \in \mathbb{C}^k$  für  $i = 1, \dots, k$ . Es ist einfach nachzurechnen, daß  $\|p(z)\|$  sein Maximum auf allen Einheitsvektoren  $z \in E$  für  $z = (1/k, 1/k, \dots, 1/k)$  annimmt, d.h.  $\|p\| = k^{-k}$ . Andererseits gilt für die Standardbasis  $\{e^1, \dots, e^k\}$  von  $\mathbb{C}^k$

$$q(e^1, e^2, \dots, e^k) = 1/k! ,$$

d.h.  $\|q\| \geq 1/k!$  und folglich  $k!\|q\| \geq 1 = k^k \|p\|$ , was wegen 3.2 die Identität

$$\|q\| = \frac{k^k}{k!} \|p\|$$

impliziert. Die Konstanten in 3.2 können also für kein  $k$  verbessert werden (wählt man allerdings auf  $\mathbb{C}^k$  die Norm  $\|z\| := \max(|z_1|, \dots, |z_k|)$ , so gilt für die gleichen  $p, q$  die Identität  $\|p\| = \|q\| = 1$ ).

$\mathcal{L}_s^k(E, F) := \{q \in \mathcal{L}^k(E, F) : q \text{ symmetrisch} \}$  ist ein abgeschlossener linearer Teilraum und deshalb selbst ein komplexer Banachraum. Bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}_k(E, F)$  den Raum aller stetigen  $k$ -homogenen Polynome  $E \rightarrow F$ , so ist wegen (3.2) auch dieses ein komplexer Banachraum und

$$(3.6) \quad \mathcal{L}_s^k(E, F) \rightarrow \mathcal{P}_k(E, F) \\ q \mapsto \hat{q}$$

ein linearer Homöomorphismus. Für jedes  $q \in \mathcal{L}_s^k(E, F)$  und  $p := \hat{q}$  schreiben wir auch  $\tilde{p} := q$ , d.h.  $p \mapsto \tilde{p}$  ist die Umkehrabbildung in (3.6). Für  $k = 0$  setzen wir noch  $\mathcal{P}_0(E, F) := F$ .

**3.7 Definition** Die formale Summe  $f = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$  heißt eine **formale Potenzreihe** (von  $E$  nach  $F$ ), wenn  $p_k \in \mathcal{P}_k(E, F)$  für alle  $k$  gilt. Diese heißt **lokal-gleichmäßig konvergent** um  $a \in E$ , falls eine Umgebung  $U$  von  $a$  existiert, auf der die Reihe gleichmäßig gegen eine Abbildung  $U \rightarrow F$  konvergiert.

**3.8 Übungsaufgabe** Die formale Potenzreihe  $p = \sum p_k$  von  $E$  nach  $F$  heißt ein (stetiges) **Polynom**, wenn  $p_k = 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen gilt, und dann heißt  $d := \max\{k : p_k \neq 0\}$  der **Grad** von  $p$ . Mit  $\mathcal{P}(E, F) \subset \mathcal{H}(E, F)$  werde der Unterraum aller stetigen Polynome  $E \rightarrow F$  bezeichnet. Man zeige:

- (i)  $p \in \mathcal{H}(E, F)$  ist genau dann ein Polynom, wenn für ein  $n \in \mathbb{N}$  die  $n$ -te Ableitung  $d^n p$  identisch verschwindet.
- (ii) Durch  $\|p\| := \sup\{\|p(x)\| : \|x\| \leq 1\}$  wird eine Norm auf  $\mathcal{P}(E, F)$  definiert, die nicht vollständig ist ( $E$  und  $F$  mögen positive Dimension haben).
- (iii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist die in (ii) definierte Norm vollständig auf dem Unterraum aller Polynome vom Grad  $\leq n$ .

**3.9 Lemma** Für jede formale Potenzreihe  $f = \sum p_k$  und jedes  $a \in E$  sind äquivalent:

- (i)  $f$  konvergiert lokal-gleichmäßig um  $a$ .
- (ii) Es gibt eine Umgebung  $V$  von  $a \in E$  und eine Konstante  $M > 0$ , so daß für alle  $z \in V$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\|p_k(z)\| \leq M .$$

- (iii) Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $a \in E$  und Konstanten  $M > 0$ ,  $0 < r < 1$ , so daß für alle  $z \in U$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\|p_k(z)\| \leq r^k M .$$

*Beweis.* Gilt (i), so existiert eine Umgebung  $W$  von  $a$  derart, daß  $\sum p_k(z)$  gleichmäßig in  $z \in W$  gegen ein  $h(z) \in F$  konvergiert. Insbesondere existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|h(z) - \sum_{n=0}^k p_n(z)\| < 1$  für alle  $k \geq k_0$ . Somit gilt auch  $\|p_k(z)\| \leq 2$  für alle  $z \in W$  und alle  $k > k_0$ . Da alle  $p_k$  stetig sind, existiert folglich eine Umgebung  $V \subset W$  von  $a$  und ein  $M \geq 2$  mit  $\|p_k(z)\| \leq M$  für alle  $k \leq k_0$ . Es gelte (ii). Wähle  $0 < r < 1$  so, daß  $a \in U := rV$  erfüllt ist. Dann gilt (iii) mit diesen Daten. (iii)  $\Rightarrow$  (i) folgt sofort aus der Konvergenz der geometrischen Reihe  $\sum r^k$ .  $\square$

**3.10 Definition** Das Gebiet  $D \subset E$  heißt **kreisförmig**, wenn  $tD = D$  für alle  $t \in \mathbb{T}$  gilt, wobei  $\mathbb{T}$  die Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1 sei. Das kreisförmige Gebiet  $D \subset E$  heißt **vollkommen kreisförmig** (oder auch **ausgeglichen**), wenn zusätzlich  $tD \subset D$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt.

Das Gebiet  $D \subset E$  ist also genau dann vollkommen kreisförmig, wenn  $tD \subset D$  für alle  $t \in \mathbb{ID}$  gilt, wobei  $\mathbb{ID} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  der offene Einheitskreis in  $\mathbb{C}$  ist. Oder äquivalent, wenn für jede komplexe Gerade  $L$  in  $E$  mit  $0 \in L$  der Durchschnitt  $L \cap D$  eine offene Kreisscheibe in  $L$  um  $0 \in L$  ist.

**3.11 Folgerung** Seien  $f = \sum p_k$  eine formale Potenzreihe und  $D \subset E$  die Gesamtheit aller  $a \in E$ , um die  $f$  lokal-gleichmäßig konvergiert. Dann ist  $D$  ein vollkommen kreisförmiges Gebiet in  $E$ .

*Beweis.* Es sei  $a \in D$ . Wegen 3.9 gilt  $ta \in D$  für alle  $t \in \mathbb{C}$  mit  $0 < |t| \leq 1$ . Es existieren Konstanten  $M, \varepsilon > 0$  so, daß  $\|p_k(a+h)\| \leq M$  für alle  $h \in E$  mit  $\|h\| < \varepsilon$  gilt. Aus 3.4.ii für  $j = k$  folgt

$$\|p_k(h)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{p(a+th)}{t^{k+1}} dt \right\| \leq M$$

für  $\|h\| < \varepsilon$  und damit  $0 \in D$  wegen 3.9.

Wir wollen  $D$  das **Konvergenzgebiet** der Potenzreihe  $f = \sum p_k$  nennen.  $f$  heißt **konvergente Potenzreihe**, wenn  $D$  nicht leer ist.  $f$  kann dann auch als Abbildung  $f : D \rightarrow F$  angesehen werden. Aus Lemma 3.9 für  $a = 0$  folgt leicht, daß  $f$  in  $0 \in E$  komplex differenzierbar ist und daß  $df(0) = p_1 \in \mathcal{L}(E, F)$  gilt.

**3.12 Definition** Die Abbildung  $f : U \rightarrow F$  heißt **analytisch** (genauer komplex analytisch), wenn zu jedem  $a \in U$  eine konvergente Potenzreihe  $\sum p_k$  und eine Umgebung  $V \subset U$  von  $a$  existiert mit

$$(3.13) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z-a) \quad \text{für alle } z \in V .$$

**3.14 Bemerkung** Jede analytische Abbildung ist holomorph. Die Umkehrung dieser Aussage zeigen wir später.

Die Potenzreihe  $\sum p_k$  in 3.12 hängt vom Punkt  $a \in U$  ab – so ist z. B.  $p_0 = f(a)$  und  $p_1 = df(a)$ .

**3.15 Übungsaufgabe** Für jede formale Potenzreihe  $f = \sum p_k$  von  $E$  nach  $F$  heißt

$$r := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|p_k\|}} \leq +\infty$$

der zugehörige **Konvergenzradius**. Man zeige

$$r = \sup\{ \rho \geq 0 : f \text{ konvergiert gleichmäßig auf } B_\rho \},$$

wobei  $B_\rho$  die offene Kugel mit Radius  $\rho$  um  $0 \in E$  ist.

**Zusatz** Jedes  $k$ -homogene Polynom  $p : E \rightarrow F$  ist G-holomorph, und es gilt für alle  $h_1, \dots, h_k \in E$  und  $q := \tilde{p}$  die iterierte Cauchysche Integralformel (vergl. 3.3)

$$(3.16) \quad k! q(h_1, \dots, h_k) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \int_{|t_1|=1} \dots \int_{|t_k|=1} \frac{p(t_1 h_1 + \dots + t_k h_k)}{(t_1 t_2 \dots t_k)^2} dt_k \dots dt_1 .$$

Die Polarisationsformel (3.1) kann somit als reelle Cauchysche Integralformel aufgefaßt werden, wobei  $k$ -mal über den Rand  $\{\pm 1\}$  der ‘reellen Kugel  $[-1, 1]$  integriert’ wird.

### 4. Der endlich-dimensionale Fall

Wir studieren in diesem Abschnitt Abbildungen  $f : U \rightarrow F$ , die in einer offenen Teilmenge  $U$  des  $n$ -dimensionalen Zahlenraumes  $E = \mathbb{C}^n$  definiert sind und Werte in einem beliebigen komplexen Banachraum  $F$  haben.

Je zwei Normen auf  $\mathbb{C}^n$  sind bekanntlich äquivalent – wir entscheiden uns hier für die Maximum-Norm

$$\|z\| := \max(|z_1|, \dots, |z_n|)$$

für  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ . Im Gegensatz zu 3.5 bezeichnen wir hier die Standardbasis des  $\mathbb{C}^n$  mit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  (im folgenden seien obere Indizes stets Exponenten).

Es seien wieder  $U \subset \mathbb{C}^n$  eine offene Teilmenge,  $F$  ein beliebiger komplexer Banachraum und  $f : U \rightarrow F$  eine Abbildung.

**4.1 Definition**  $f$  heißt **partiell holomorph**, wenn für jedes  $a \in U$  und jedes  $1 \leq j \leq n$  die komplexe Richtungsableitung

$$\partial f / \partial z_j(a) := d_{e_j} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (f(a + t e_j) - f(a)) \in F$$

existiert, genannt die  $j$ -te **partielle (komplexe) Ableitung von  $f$  in  $a$** .

**4.2 Definition** Für jedes  $c \in F$  und jeden Multi-Index  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$  heißt  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow F$  definiert durch

$$p(z) := c z^\nu := c z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \dots z_n^{\nu_n}$$

ein ( $F$ -wertiges) **Monom** vom Grade  $|\nu| := \nu_1 + \dots + \nu_n$ . Dabei sei  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$  die Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0.

Man überzeugt sich leicht, daß jedes Monom vom Grade  $k$  auch ein stetiges  $k$ -homogenes Polynom im Sinne des vorhergehenden Paragraphen ist (vergleiche den Spezialfall in 3.5). Umgekehrt gilt auch (ohne Stetigkeitsvoraussetzung)

**4.3 Lemma** Jedes  $k$ -homogene Polynom  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow F$  ist holomorph und besitzt eine eindeutige Darstellung

$$p(z) = \sum c_\nu z^\nu ,$$

wobei über alle  $\nu \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\nu| = k$  summiert wird und

$$(4.4) \quad c_\nu = \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^k p}{\partial z_1^{\nu_1} \dots \partial z_n^{\nu_n}}(0) \in F$$

für  $\nu! := \nu_1! \nu_2! \dots \nu_n!$  gilt.

*Beweis.* Sei  $q := \tilde{p}$  die zu  $p$  gehörige symmetrische  $k$ -lineare Abbildung. Dann gilt also

$$p(z) = q(z, \dots, z) = q\left(\sum_{i_1=1}^n z_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n z_{i_k} e_{i_k}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} q(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \quad ,$$

wobei jeder Summand ein Monom vom Grade  $k$  ist. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus 4.4. □

Jede formale Potenzreihe

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \tag{1-fache Potenzreihe}$$

kann also eindeutig in der Form

$$\tilde{f} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_{\nu} z^{\nu} \tag{n-fache Potenzreihe}$$

geschrieben werden. Beide Reihen haben i.a. unterschiedliche Konvergenzgebiete. Dabei heißt  $\tilde{f}$  gleichmäßig konvergent auf einer Teilmenge  $V \subset \mathbb{C}^n$  gegen eine Abbildung  $h : V \rightarrow F$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $I_0 \subset \mathbb{N}^n$  existiert, so daß

$$\left\| h(z) - \sum_{\nu \in I} c_{\nu} z^{\nu} \right\| < \varepsilon$$

für alle  $z \in V$  und alle endlichen Mengen  $I$  mit  $I_0 \subset I \subset \mathbb{N}^n$  gilt. Analog zu 3.9 gilt:

**4.5 Übungsaufgabe** Die  $n$ -fache Potenzreihe  $\sum c_{\nu} z^{\nu}$  konvergiert genau dann lokal-gleichmäßig um  $a \in \mathbb{C}^n$ , wenn eine Umgebung  $V$  von  $a$ , ein  $M > 0$  und ein  $0 < r < 1$  existiert mit

$$\|c_{\nu} z^{\nu}\| \leq r^{|\nu|} M$$

für alle  $z \in V$  und alle  $\nu \in \mathbb{N}^n$ . Konvergiert die  $n$ -fache Potenzreihe  $\sum c_{\nu} z^{\nu}$  in dem Punkt  $b \in \mathbb{C}^n$  bezüglich irgend einer Abzählung der Indexmenge  $\mathbb{N}^n$ , so konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig um jeden Punkt  $a \in \mathbb{C}^n$  mit  $|a_i| < |b_i|$  für alle  $i$ .

Wie sehen nun die Konvergenzgebiete von  $n$ -fachen Potenzreihen aus?

**4.6 Definition** Ein Gebiet  $D \subset \mathbb{C}^n$  heißt ein **Reinhardtgebiet**  $\iff$  Für alle  $z = (z_1, \dots, z_n) \in D$  und alle  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}$  mit  $|t_i| = 1$  für alle  $i$  gilt auch

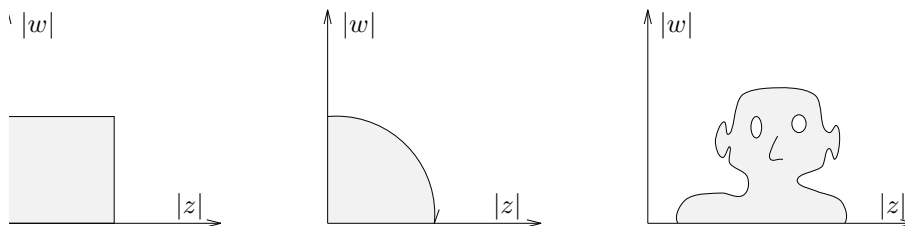
$$(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \in D \quad .$$

Gilt diese Eigenschaft sogar für alle  $t_1, \dots, t_n$  mit  $|t_i| \leq 1$ , so heißt  $D$  **vollkommenes Reinhardtgebiet**.

Als Folgerung von 4.5 ergibt sich unmittelbar

**4.7 Satz** Für jede konvergente  $n$ -fache Potenzreihe ist das zugehörige Konvergenzgebiet ein vollkommenes Reinhardtgebiet.

Reinhardtgebiete im  $\mathbb{C}^2$  lassen sich leicht durch Gebiete in der **absoluten Viertelsebene**  $V := \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, s \geq 0\}$  veranschaulichen. Betrachten wir die durch  $\tau(z, w) := (|z|, |w|)$  definierte Abbildung  $\tau : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$ . Dann sind die Reinhardtschen Gebiete in  $\mathbb{C}^2$  genau die  $\tau$ -Urbilder von Teilmengen  $P \subset V$ , die zusammenhängend und bezüglich  $V$  offen sind (Gebiete in  $V$ ). Man mache sich klar, daß jedem Punkt  $(r, s) \in V$  in  $\mathbb{C}^2$  vermöge  $\tau^{-1}$  ein Torus der Dimension  $d \leq 2$  entspricht ( $d = 2$  z.B. genau dann, wenn  $rs \neq 0$ ).



Figur 1. Einige Reinhardtgebiete im  $\mathbb{C}^2$

Die in Figur 1 dargestellten Gebiete muß man sich rotationssymmetrisch um die  $z$ - wie auch die  $w$ -Achse vorstellen. Die beiden ersten Gebiete (der Dizylinder  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$  und die euklidische Kugel  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 < 1\}$ ) sind vollkommene Reinhardtgebiete, das dritte dagegen ist nicht vollkommen.

**4.8 Satz** Seien  $U \subset \mathbb{C}^n$  offen und  $f : U \rightarrow F$  eine stetige, partiell holomorphe Abbildung. Dann ist  $f$  analytisch und insbesondere holomorph.

*Beweis.* Es genügt, zu jedem  $a \in U$  eine Umgebung  $V \subset U$  von  $a$  und eine in  $V$  gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu (z - a)^\nu, \quad z \in V,$$

zu finden. Wir dürfen  $a = 0$  annehmen und wählen  $r > 0$  so klein, daß die Kugel  $W := B_r(0)$  in  $U$  enthalten ist und  $M := \sup \|f(W)\| < \infty$  gilt (hier geht die Stetigkeit von  $f$  ein). Wegen (2.4) existiert für alle  $z \in W$  eine konvergente Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) z_1^k,$$

wobei

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{f(t, z_2, \dots, z_n)}{t^{k+1}} dt$$

und  $\rho$  mit  $\|z\| < \rho < r$  beliebig gewählt ist. Jedes  $c_k : W \rightarrow F$  ist unabhängig von der Variablen  $z_1$  und ebenfalls partiell holomorph, gestattet also mit dem gleichen Argument für jedes  $z \in W$  eine Reihendarstellung

$$c_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj}(z) z_2^j,$$

wobei jedes  $c_{kj} : W \rightarrow F$  wieder partiell holomorph und unabhängig von den Variablen  $z_1, z_2$  ist. Eingesetzt ergibt sich für  $f$  die Darstellung

$$f(z) = \sum_{k,j=0}^{\infty} c_{kj}(z) z_1^k z_2^j.$$

Iterieren des Verfahrens liefert die Darstellung

$$(*) \quad f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu z^\nu,$$

wobei jedes

$$(**) \quad c_\nu = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|t_n|=\rho} \dots \int_{|t_1|=\rho} \frac{f(t_1, t_2, \dots, t_n)}{t_1^{\nu_1+1} \dots t_n^{\nu_n+1}} dt_1 \dots dt_n$$

konstant und  $\rho < r$  beliebig ist. Das Integral (\*\*) liefert sofort die Abschätzung  $\|c_\nu\| \leq r^{|\nu|} M$ , d.h. die Reihe (\*) konvergiert lokal-gleichmäßig um  $a = 0$ . □

Etwas suggestiver läßt sich die Formel (\*\*) auch schreiben als

$$c_\nu = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_T \frac{f(t)}{t^{\nu+1}} dt,$$

wobei  $T := \{t \in \mathbb{C}^n : |t_1| = \dots = |t_n| = \rho\}$ ,  $dt := dt_1 \dots dt_n$  und  $\mathbf{1} := (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$  ist. Integriert wird also über den (reell)  $n$ -dimensionalen Torus  $T$  im reell  $2n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{C}^n$ . Durch ihre Werte auf  $T$  ist somit die holomorphe Funktion  $f$  schon eindeutig bestimmt, man nennt deshalb  $T$  auch eine **Bestimmungsfläche**.

**4.9 Bemerkung** Nach einem nicht-trivialem Resultat von Hartogs (vgl. [10] p.43) kann in den Voraussetzungen von 4.8 im Falle  $F = \mathbb{C}$  auf die Stetigkeit von  $f$  verzichtet werden.

Aus 4.8 ergibt sich noch die

**4.10 Folgerung** Für jedes holomorphe  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow F$  sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist ein  $k$ -homogenes Polynom.
- (ii)  $f(tz) = t^k f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}^n$  und alle  $t \in \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Es gelte (ii). Ist dann  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(z)$  die Entwicklung von  $f$  um  $0 \in \mathbb{C}^n$ , so liefert Koeffizientenvergleich von

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(z)t^j = \left( \sum_{j=0}^{\infty} p_j(z) \right) t^k$$

$f = p_k$ , und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**4.11 Übungsaufgabe** Man entwickle die Funktion  $f(z) = (1 - z_1 - z_2)^{-1}$  um den Ursprung des  $\mathbb{C}^2$  in eine 1-fache wie auch in eine 2-fache Potenzreihe und vergleiche die zugehörigen Konvergenzgebiete.

**4.12 Übungsaufgabe** Es sei  $U \subset \mathbb{C}^n$  ein Gebiet und  $f$  eine auf  $U$  holomorphe Funktion. Ferner seien  $r_1, \dots, r_n$  feste positive Zahlen.

- (i) Ist  $S := U \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$  und  $f|_S = 0$ , so gilt  $f = 0$ .
- (ii) Ist  $T := \{z \in U : |z_1| = r_1, \dots, |z_n| = r_n\} \neq \emptyset$  und  $f|_T = 0$ , so gilt  $f = 0$ . Hinweis: Führe (ii) mit Exponentialfunktionen auf (i) zurück.

## 5. Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen

Wir zeigen unter Verwendung der Überlegungen des vorangehenden Abschnitts, daß für beliebige komplexe Banachräume die Begriffe holomorph und analytisch äquivalent sind.

**5.1 Lemma** Für jede stetige  $G$ -holomorphe Abbildung  $p : E \rightarrow F$  und jedes  $k \in \mathbb{N}$  sind äquivalent:

- (i)  $p(tz) = t^k p(z)$  für alle  $z \in E$  und alle  $t \in \mathbb{C}$ .
- (ii)  $p$  ist ein  $k$ -homogenes Polynom.

*Beweis.* Es gelte (i). Definiere  $q : E^k \rightarrow F$  durch die Formel (3.16). Für jeden linearen Teilraum  $H \subset E$  endlicher Dimension ist dann wegen 4.8 und 4.10 die Einschränkung  $q|_{H^k}$  multilinear, d.h. auch  $q$  ist multilinear und  $p(z) = q(z, \dots, z)$  für alle  $z$ .  $\square$

**5.2 Satz** Es sei  $U \subset E$  ein vollkommen kreisförmiges Gebiet und  $f : U \rightarrow F$  eine stetige,  $G$ -holomorphe Abbildung. Dann existiert auf  $U$  eine lokal-gleichmäßig konvergente Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z) .$$

Für jedes  $k \geq 0$ , jedes  $z \in E$  und jedes  $r > 0$  mit  $rz \in U$  gilt zudem

$$(5.3) \quad p_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(tz)}{t^{k+1}} dt .$$

*Beweis.* Die rechte Seite von (5.3) ist unabhängig von  $r$  und definiert somit eine stetige Abbildung  $p_k : E \rightarrow F$ . Wegen 2.8 ist  $p_k$  auch  $G$ -holomorph. Für jedes  $z \in U$  und  $c \in \mathbb{C}^*$  wähle  $r > 0$  mit  $rcz \in U$  und setze  $s := ct$ ,  $\rho := |c|r$ . Damit gilt dann

$$p_k(cz) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(tc z)}{t^{k+1}} dt = \frac{c^k}{2\pi i} \int_{|s|=\rho} \frac{f(sz)}{s^{k+1}} ds = c^k p_k(z) ,$$

d.h. wegen 5.1 ist jedes  $p_k$  sogar ein  $k$ -homogenes stetiges Polynom. Für  $a \in U$  fest ist  $g(t) := f(ta)$  holomorph auf einer Umgebung von  $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$ . Die Potenzreihe  $g(t) = \sum p_k(a)t^k$  konvergiert für  $t = 1$ , d.h.  $f(a) = \sum p_k(a)$ . Es existiert ein  $M > 0$  mit  $\sup \|f(S)\| < M$  für  $S = \{ta : |t| = 1\}$ . Folglich existiert auch eine kreisförmige Umgebung  $W \subset U$  von  $S$  mit  $\sup \|f(W)\| < M$ , d.h. aus (5.3) folgt, daß auch  $\|p_k(z)\| \leq M$  für alle  $z \in W$  gilt. Wegen 3.9 konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig um  $a$ .  $\square$

Als Konsequenz erhalten wir

**5.4 Satz** Seien  $E, F$  komplexe Banachräume und  $U \subset E$  eine offene Teilmenge. Dann sind für jede Abbildung  $f : U \rightarrow F$  äquivalent:

- (i)  $f$  ist stetig und  $G$ -holomorph.
- (ii)  $f$  ist holomorph.
- (iii)  $f$  ist analytisch.

**5.5 Übungsaufgabe** Sei  $U \subset E$  ein kreisförmiges Gebiet. Dann gilt:

- (i) Jede auf  $U$  definierte,  $F$ -wertige holomorphe Funktion  $f$  besitzt eine auf  $U$  lokal gleichmäßig konvergente Reihendarstellung (Laurentreihe)

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k(z),$$

wobei  $p_k : U \rightarrow F$  holomorph für alle  $k \in \mathbb{Z}$  ist und  $p_k(tz) = t^k p_k(z)$  für alle  $z \in U$  und  $t \in \mathbb{C}^*$  erfüllt.

- (ii) Müssen die  $p_k$  für  $k \geq 0$  stets Polynome sein?

**5.6 Satz** Sei  $(f_k)$  eine Folge holomorpher Abbildungen  $U \rightarrow F$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Abbildung  $f : U \rightarrow F$  konvergiert. Dann ist auch  $f$  holomorph, und die Folge der Ableitungen  $df_k : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  konvergiert lokal-gleichmäßig gegen die Ableitung  $df$ .

*Beweis.*  $f$  ist stetig, da alle  $f_k$  stetig sind. Für jedes  $\lambda \in F'$  konvergiert die Folge der Funktionen  $\lambda \circ f_k$  lokal-gleichmäßig gegen  $\lambda \circ f$ , folglich ist auch  $\lambda \circ f$   $G$ -holomorph. Mit 2.8 und 5.4 folgt, daß  $f$  sogar holomorph ist. Die restlichen Behauptungen folgen leicht aus der Cauchyschen Integralformel

$$(5.7) \quad df(a)(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(a+th)}{t^2} dt$$

für alle  $a \in U, h \in E$  und  $r > 0$  so, daß  $a + th \in U$  für alle  $t \in \mathbb{C}$  mit  $|t| \leq r$ . □

**5.8 Folgerung** Jede konvergente Potenzreihe  $\sum p_k$  von  $E$  nach  $F$  stellt auf ihrem Konvergenzgebiet  $D$  eine holomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow F$  dar. Die Ableitung

$$df : D \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

hat auf  $D$  die lokal-gleichmäßige Potenzreihenentwicklung  $\sum q_k$  mit  $q_k = dp_{k+1}$ .

**5.9 Folgerung** Jede holomorphe Abbildung  $f : U \rightarrow F$  ist beliebig häufig komplex differenzierbar.

*Beweis.*  $f$  holomorph  $\Rightarrow f$  analytisch  $\Rightarrow df$  analytisch  $\Rightarrow df$  holomorph. □

Für  $f : U \rightarrow F$  holomorph und jedes  $a \in U$  existiert also die zweite Ableitung

$$d^2f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) = \mathcal{L}^2(E, F)$$

und allgemeiner die  $k$ -te Ableitung

$$d^k f(a) \in \mathcal{L}^k(E, F)$$

(vgl. (A.7)). Durch Iteration von (5.7) erhält man als Verallgemeinerung von (3.16)

$$(5.10) \quad d^k f(a)(h_1, \dots, h_k) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \int_{|t_1|=r_1} \dots \int_{|t_k|=r_k} \frac{f(a+t_1 h_1 + \dots + t_k h_k)}{(t_1 t_2 \dots t_k)^2} dt_k \dots dt_1$$

für alle  $h_1, \dots, h_k \in E$  und alle  $r_1, \dots, r_k > 0$  so, daß  $a + t_1 h_1 + \dots + t_k h_k \in U$  für alle  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}$  mit  $|t_j| \leq r_j$ .

**5.11 Folgerung** Ist  $f(z) = \sum p_k(z-a)$  die Potenzreihenentwicklung um  $a \in U$ , so ist  $d^k f(a)$  symmetrisch für alle  $k$ , und es gilt  $p_k = \hat{q}_k$  für

$$q_k := \frac{1}{k!} d^k f(a) \in \mathcal{L}_s^k(E, F).$$

**5.12 Übungsaufgabe** Es seien  $E$  ein komplexer Banachraum,  $A := \mathcal{L}(E)$  die Endomorphismenalgebra von  $E$  und  $G := \text{GL}(E)$  die Gruppe der invertierbaren Operatoren in  $A$ . Man zeige

(i)

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definiert eine holomorphe Abbildung  $\exp : A \rightarrow A$ .

(ii)

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

für alle  $z, w \in A$  mit  $zw = wz$ .

(iii)

$$\exp(A) \subset G.$$

(iv) Für jedes feste  $a \in A$  definiert  $g(t) = \exp(ta)$  einen holomorphen Gruppenhomomorphismus  $g : \mathbb{C} \rightarrow G$ . Man berechne  $g'(t) \in A$  für jedes  $t \in \mathbb{C}$ .

## 6. Einfache Folgerungen

Für alle  $a, b \in E$  sei  $[a, b] := \{a + t(b-a) : 0 \leq t \leq 1\}$  die Verbindungsstrecke zwischen  $a$  und  $b$ . Damit gilt dann

**6.1 Lemma** Ist  $U \subset E$  offen und  $f : U \rightarrow F$  holomorph, so gilt für alle  $[a, b] \subset U$

$$f(b) - f(a) = \lambda(b-a)$$

wobei

$$\lambda := \int_0^1 df(a + t(b-a)) dt \in \mathcal{L}(E, F).$$

Insbesondere gilt also

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$$

für  $M := \sup \|df([a, b])\|$ .

**6.2 Cauchysche Ungleichungen** Ist  $f(z) = \sum p_k(z-a)$  die Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $a \in U$ , so gilt

$$\|p_k\| \leq r^{-k}M$$

für jedes  $r > 0$  mit  $B := B_r(a) \subset U$  und  $\sup \|f(B)\| \leq M$ .

Beweis. Trivial wegen (5.3). □

**6.3 Identitätssatz** Ist  $U \subset E$  ein Gebiet, und sind  $f, g : U \rightarrow F$  holomorphe Abbildungen mit  $f|V = g|V$  für eine offene Teilmenge  $V \neq \emptyset$  von  $U$ , so gilt  $f = g$ .

Beweis. O.B.d.A. sei  $g = 0$ . Ist dann  $\Omega \subset U$  die größte offene Teilmenge mit  $f|_{\Omega} = 0$ , so müssen wir wegen  $V \subset \Omega$  zeigen, daß  $\Omega$  abgeschlossen in  $U$  ist. Dazu sei  $a \in \partial\Omega \cap U$  ein Randpunkt von  $\Omega$  in  $U$ . Wegen der Stetigkeit aller  $d^k f$  gilt dann  $d^k f(a) = 0$ . In der Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $a$  verschwinden somit alle Summanden, d.h.  $f$  verschwindet in einer Umgebung von  $a$  und somit gilt  $a \in \Omega$  im Gegensatz zur Annahme  $a \in \partial\Omega$ . □

**6.4 Maximumprinzip** Seien  $U \subset E$  ein Gebiet und  $f : U \rightarrow F$  eine holomorphe Abbildung. Besitzt dann  $\|f\|$  ein globales Maximum in einem Punkt  $a \in U$ , so ist  $\|f\|$  konstant.

Beweis. Wir dürfen  $v := f(a) \neq 0$  annehmen. Dann existiert ein  $\lambda \in F'$  mit  $\|\lambda\| = 1$  und  $\lambda(v) = \|v\|$  (vgl. A.3). Dann gilt für die holomorphe Funktion  $g := \lambda \circ f$  und alle  $z \in U$

$$|g(a)| = \|v\| \geq \|f(z)\| \geq |\lambda f(z)| = |g(z)|.$$

Aus dem klassischen Maximumprinzip folgt, daß  $g$  konstant auf einer Umgebung von  $a$  ist. Wegen 6.3 ist folglich  $g$  und damit auch  $\|f\|$  konstant auf  $U$ . □

Ist  $\mathbb{C}^2$  versehen mit der Norm  $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|)$  und  $U \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, so zeigt die holomorphe Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^2$  definiert durch  $f(t) = (1, t)$ , daß in 6.4 weder 'global' durch 'lokal' ersetzt werden kann (wähle  $U = \mathbb{C}$ ), noch daß bereits die Konstanz von  $f$  geschlossen werden kann (wähle  $U = \mathbb{ID}$ ). Beides ist jedoch möglich, wenn über den Ziel-Banachraum  $F$  spezielle Voraussetzungen gemacht werden. So heiße  $F$  **rund**, wenn  $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$  für je zwei linear unabhängige Vektoren  $x, y \in F$  gilt – z.B. wenn  $F$  ein Hilbertraum ist. Damit gilt dann (vgl. [5])

**6.5 Striktes Maximumprinzip** Ist  $U \subset E$  ein Gebiet,  $f : U \rightarrow F$  eine holomorphe Abbildung mit  $F$  rund und nimmt  $\|f\|$  in  $U$  ein lokales Maximum an, so ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Wegen 6.3 und 6.4 dürfen wir annehmen, daß  $\|f\|$  ein globales Maximum in  $a \in U$  besitzt. In Fortführung des Beweises von 6.4 genügt es für jedes  $w \in F$  mit  $\|w\| \leq \|v\| = \lambda(w)$  zu zeigen, daß  $w = v$  gilt. Ist das nicht der Fall, so sind  $v, w$  linear unabhängig, und wegen  $\lambda(w) \leq \|\lambda\| \|w\| \leq \|w\|$  gilt sogar  $\|v\| = \|w\| \geq \|x\|$  für  $x := (v + w)/2$ .  $\lambda(x) = \|v\|$  ergibt schließlich im Widerspruch zur Voraussetzung die Gleichung  $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ .  $\square$

**6.6 Cartanscher Eindeutigkeitssatz** Es sei  $U \subset E$  ein beschränktes Gebiet und  $f : U \rightarrow U$  eine holomorphe Abbildung. Gilt dann  $f(a) = a$  und  $df(a) = \text{id}_E$  für ein  $a \in U$ , so gilt  $f = \text{id}_U$ .

*Beweis.* Wir dürfen  $a = 0$  annehmen. Angenommen  $f \neq \text{id}_U$ . Ist dann  $\sum p_j(z)$  die Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $a = 0$ , so existiert ein  $k > 1$  mit

$$(6.7) \quad f(z) = z + p_k(z) + o(\|z\|^k)$$

für  $\|z\| \rightarrow 0$ , wobei  $0 \neq p_k \in \mathcal{P}_k(E, E)$ . Durch Induktion nach  $n$  folgt mit 6.8 für die  $n$ -te Iterierte  $f^n := f \circ f \circ \dots \circ f : U \rightarrow U$

$$f^n(z) = z + np_k(z) + o(\|z\|^k).$$

Wegen 6.2 ist somit  $\{np_k : n \in \mathbb{N}\}$  eine beschränkte Teilmenge von  $\mathcal{P}_k(E, E)$ , was im Widerspruch zur Annahme  $p_k = 0$  impliziert. Es bleibt also nachzutragen

**6.8 Hilfssatz** Gilt neben (6.7) auch

$$g(z) = z + q_k(z) + o(\|z\|^k)$$

für eine holomorphe Abbildung  $g : U \rightarrow E$  und ein  $q_k \in \mathcal{P}_k(E, E)$ , so gilt für die Komposition  $h := g \circ f$

$$h(z) = z + (p_k + q_k)(z) + o(\|z\|^k).$$

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

**6.9 Umformulierung von 6.6** Es seien  $U \subset E, V \subset F$  Gebiete und  $f, g : U \rightarrow V$  holomorphe Abbildungen mit  $f(a) = g(a)$  und  $df(a) = dg(a)$  für ein  $a \in U$ . Ist dann  $U$  beschränkt und  $g$  biholomorph, so gilt  $f = g$ .

*Beweis.* Wende 6.6 an auf  $g^{-1} \circ f : U \rightarrow U$ .  $\square$

**6.10 Folgerung** Es seien  $U \subset E, V \subset F$  kreisförmige Gebiete mit  $U$  beschränkt und  $0 \in U$ . Jede biholomorphe Abbildung  $f : U \rightarrow V$  mit  $f(0) = 0$  ist dann linear.

*Beweis.* Für jedes  $t \in \mathbb{T}$  definiere die biholomorphen Abbildungen  $f_t, g_t : U \rightarrow V$  durch  $f_t(z) := f(tz)$  und  $g_t(z) := tg(z)$ . Dann gilt  $f_t(0) = g_t(0)$  und  $df_t(0) = dg_t(0)$ , d.h.  $f_t = g_t$  wegen 6.9. Ist  $\sum p_k(z)$  die Potenzreihenentwicklung von  $f$  um  $0 \in U$ , so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(z)t = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z)t^k$$

für alle  $t \in \mathbb{T}$ . Also gilt  $p_k = 0$  für  $k \geq 2$ , d.h.  $f = p_1|U$ .  $\square$

**6.11 Folgerung** Der Dizylinder  $D := \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$  und die euklidische Kugel  $B := \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$  sind nicht biholomorph äquivalent. (Obwohl beide Gebiete einfach zusammenhängend – ja sogar zusammenziehbar – sind und die biholomorphe Äquivalenz in Analogie zum Riemannschen Abbildungssatz vermutet werden könnte. Übrigens definiert  $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2\sqrt{1 - z_1\bar{z}_1})$  eine Bijektion von  $D$  auf  $B$ , die in beiden Richtungen reell analytisch – aber natürlich nicht holomorph ist.)

*Beweis.* Angenommen, es existiert eine biholomorphe Abbildung  $h : D \rightarrow B$ . Zu  $a = h^{-1}(0) \in D$  existiert dann eine biholomorphe Abbildung  $g : D \rightarrow D$  mit  $g(0) = a$  (denn ist  $a = (a_1, a_2)$ , so wähle  $g_j \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  mit  $g_j(0) = a_j$  für  $j = 1, 2$  und setze  $g := g_1 \times g_2$ ). Für die biholomorphe Abbildung  $f := h \circ g : D \rightarrow B$  gilt dann  $f(0) = 0$ , d.h.  $f$  ist linear. Das aber ist unmöglich, da z.B. der Rand  $\partial D$  von  $D$  reelle Geradenstücke enthält,  $\partial B$  aber nicht. Also kann ein solches  $h$  nicht existieren.  $\square$

Ein weiterer Beweis von Folgerung 6.11 ergibt sich aus dem allgemeineren Satz 11.20.

**6.12 Übungsaufgabe** (Zusatz) Man zeige, daß die Aussage von 6.7 richtig bleibt, wenn statt 'U beschränkt' nur vorausgesetzt wird, daß  $\nu(U) \subset \mathbb{R}$  beschränkt ist für eine stetige Norm  $\nu : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

**6.13 Schwarzsches Lemma** (Übungsaufgabe) Für  $j = 1, 2$  sei  $E_j$  ein komplexer Banachraum mit offener Einheitskugel  $B_j$ , und  $f : B_1 \rightarrow B_2$  sei eine holomorphe Abbildung mit  $f(0) = 0$  und Ableitung  $\lambda := df(0) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Dann gilt

- (i)  $\|f(z)\| \leq \|z\|$  für alle  $z \in B_1$ ,
- (ii)  $\|\lambda\| \leq 1$ ,
- (iii)  $f$  ist biholomorph  $\iff \lambda : E_1 \rightarrow E_2$  ist ein isometrischer linearer Isomorphismus.

**6.14 Übungsaufgabe** (Verallgemeinerung des Maximumprinzips) Man zeige unter Verwendung des klassischen Maximumprinzips: Ist  $U \subset E$  ein beschränktes Gebiet,  $f : \bar{U} \rightarrow F$  eine stetige Abbildung mit  $f|_U$  holomorph und ist  $A := f(\partial U)$  das Bild des Randes  $\partial U$  von  $U$ , so gilt  $f(U) \subset \hat{A}$ . Dabei ist

$$\hat{A} := \{a \in F : \operatorname{Re}(\lambda(a)) \leq \sup(\operatorname{Re}(\lambda(A))) \quad \forall \lambda \in F'\}$$

die abgeschlossene konvexe Hülle von  $A$ .

## 7. Fortsetzungssätze

Sind  $U \subset \tilde{U}$  Gebiete in einem komplexen Banachraum  $E$  und ist  $f : U \rightarrow F$  holomorph, so entsteht die Frage: Wann existiert eine holomorphe Abbildung  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow F$  mit  $\tilde{f}|_U = f$ ? Wenn dies der Fall ist, heißt  $\tilde{f}$  eine **holomorphe Fortsetzung** von  $f$  (auf  $\tilde{U}$ ). Wegen des Identitätssatzes kann  $f$  höchstens eine holomorphe Fortsetzung auf  $\tilde{U}$  besitzen.

**7.1 Beispiel** Ist  $E = \mathbb{C}$  und  $a \in \tilde{U} \setminus U$ , so hat die auf  $U$  holomorphe Funktion  $f(z) = (z - a)^{-1}$  keine holomorphe Fortsetzung auf  $\tilde{U}$ .

Für das Folgende treffen wir nun die Konvention: Sind  $H, K \subset E$  abgeschlossene lineare Teilräume von  $E$  mit  $H \cap K = \{0\}$  und  $H + K = E$ , so schreiben wir  $E = H \oplus K$  und sprechen von einer direkten Summenzerlegung des Banachraumes  $E$ . Demgegenüber sei  $H \times K$  das direkte Produkt der Banachräume  $H$  und  $K$  versehen mit der Norm  $\|(h, k)\| := \max(\|h\|, \|k\|)$  (in diesem Fall ist auch  $H = K$  erlaubt). Ist  $E = H \oplus K$  als direkte Summe, so ist  $E$  dann auch äquivalent zu  $H \times K$ , wenn auch i.a. nicht isometrisch äquivalent. Da beide Räume jedoch die gleiche topologische wie auch holomorphe Struktur besitzen, werden wir häufig von  $E$  zu  $H \times K$  übergehen.

**7.2 Hartogsscher Kontinuitätssatz** Es seien  $H$  ein komplexer Banachraum,  $D \subset H$  ein Gebiet und  $V \neq \emptyset$  eine offene Teilmenge von  $D$ . Für  $E = \mathbb{C} \times H$  und feste  $0 \leq r_1 < r_2$  setze

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= \{(t, h) \in E : |t| < r_2, h \in D\} \\ U &:= \{(t, h) \in \tilde{U} : |t| > r_1 \text{ oder } h \in V\}. \end{aligned}$$

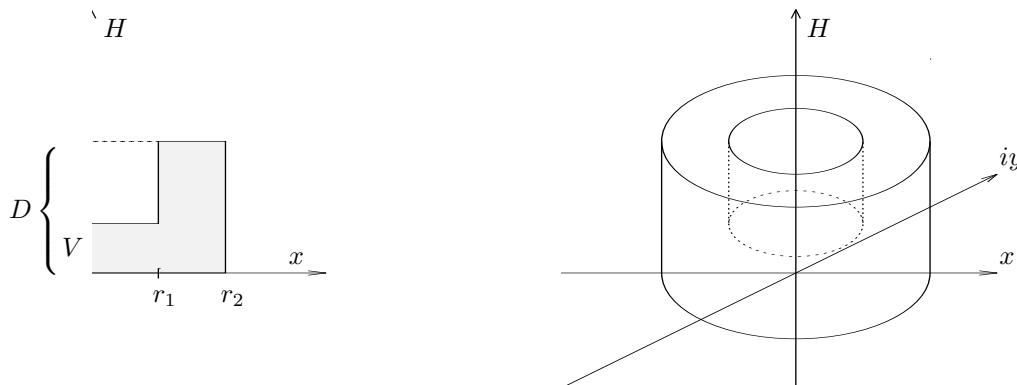
Zu jeder holomorphen Abbildung  $f : U \rightarrow F$  existiert dann genau eine holomorphe Fortsetzung  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow F$ .

*Beweis.* Sei  $\tilde{V} := \{(t, h) \in U : h \in V\}$ . Dann ist  $\tilde{V}$  eine nicht-leere offene Teilmenge von  $U$ . Zu jedem  $z = (t, h) \in \tilde{U}$  wähle ein  $r > |t|$  mit  $r_1 < r < r_2$  und setze

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{f(s, h)}{s - t} ds.$$

Aufgrund des klassischen Cauchyschen Integralsatzes hängt  $\tilde{f}(z)$  nicht von der speziellen Wahl von  $r$  ab. Da andererseits  $r$  stets für eine ganze Umgebung von  $z \in \tilde{U}$  simultan gewählt werden kann, ist  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow F$  holomorph. Aufgrund der Cauchyschen Integralformel folgt, daß  $\tilde{f}$  und  $f$  auf  $\tilde{V}$  übereinstimmen. Mit dem Identitätssatz folgt  $\tilde{f}|_U = f$ .  $\square$

Die Gebiete  $U \subset \tilde{U}$  in 7.2 sind natürlich schon dadurch bestimmt, daß man die Punkte  $(t, h)$  mit  $x = \operatorname{Re}(t) \geq 0$  in ihnen kennt. Zu Veranschaulichung können somit die beiden äquivalenten Bilder in Figur 2 dienen, bei denen das zweite zusätzlich die Rotationssymmetrie in  $t = x + iy$  andeutet.



Figur 2. Zum Hartogsschen Kontinuitätssatz

**7.3 Folgerung (Kugelsatz)** Es seien  $\dim H > 0$ ,  $E = \mathbb{C} \times H$  und  $0 \leq s < r$ . Dann besitzt jede  $F$ -wertige holomorphe Abbildung auf der Kugelschale  $U := \{z \in E : s < \|z\| < r\}$  eine holomorphe Fortsetzung auf die Kugel  $\{z \in E : \|z\| < r\}$ .

*Beweis.* Wende 7.2 an auf  $D := \{h \in H : \|h\| < r\}$  und  $V := \{h \in D : \|h\| > s\}$ . □

**7.4 Folgerung** Es seien  $E$  ein komplexer Banachraum mit  $\dim E \geq 2$ ,  $U \subset E$  eine offene Teilmenge und  $A \subset U$  eine in  $U$  diskrete Teilmenge (d.h.  $A$  hat keinen Häufungspunkt in  $U$ ). Dann besitzt jede holomorphe Abbildung  $f : U \setminus A \rightarrow F$  eine holomorphe Fortsetzung auf  $U$ .

**7.5 Folgerung** Im Falle mehrerer komplexer Veränderlicher haben holomorphe Funktionen keine isolierten Nullstellen – genauer: Ist  $\dim E > 1$ ,  $U \subset E$  ein Gebiet und  $f \in \mathcal{H}(U)$  nicht konstant, so besitzt  $f^{-1}(0)$  keinen isolierten Punkt.

*Beweis.* Angenommen, es gibt ein Gebiet  $D \subset U$  derart, daß  $D \cap f^{-1}(0)$  aus genau einem Punkt  $a$  besteht. Dann wäre  $g := 1/f$  holomorph auf  $D \setminus \{a\}$  und hätte keine holomorphe Fortsetzung auf  $D$ . □

Die zu 7.5 analoge Aussage im reellen ist bereits für Polynome falsch, wie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + y^2$  zeigt (fassen wir  $f$  als komplexes Polynom auf  $\mathbb{C}^2$  auf, so liegen in jeder Umgebung des Nullpunkts unendlich viele weitere Nullstellen von  $f$ , nämlich alle der Form  $(t, \pm it)$  mit  $t$  beliebig komplex). Nullstellen holomorpher Funktionen unterliegen starken Einschränkungen. Für jede offene Teilmenge  $U \subset E$  setzen wir

**7.6 Definition** Eine Teilmenge  $A \subset U$  heißt **analytisch**, falls es zu jedem  $a \in U$  eine offene Umgebung  $V \subset U$  von  $a$  und eine Menge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(V)$  holomorpher Funktionen auf  $V$  gibt mit

$$(7.7) \quad V \cap A = \{z \in V : f(z) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\} .$$

Es ist klar, daß jede analytische Teilmenge  $A \subset U$  abgeschlossen in  $U$  ist – denn ist  $a \notin A$ , so ist  $V \setminus A$  in (7.7) eine Umgebung von  $a \in U$  (da es ja mindestens ein  $f$  in  $\mathcal{F}$  geben muß, das in  $a$  nicht verschwindet). Weiterhin ist jede endliche Vereinigung wie auch jeder endliche Durchschnitt analytischer Mengen analytisch. Ist  $f : U \rightarrow V \subset F$  holomorph und  $A \subset V$  analytisch, so ist auch  $f^{-1}(A) \subset U$  analytisch.

**7.8 Lemma** Sind  $D \subset E$  ein Gebiet und  $A \subset D$  eine analytische Teilmenge mit  $A \neq D$ , so ist  $D \setminus A$  dicht in  $D$ .

*Beweis.* Sei  $\Omega$  der offene Kern von  $A$ , d.h. die größte offene Teilmenge von  $E$ , die in  $A$  liegt. Wir müssen  $\Omega = \emptyset$  zeigen. Da nach Voraussetzung  $\Omega$  offen in  $D$  und verschieden von  $D$  ist, genügt es zu zeigen, daß  $D \setminus \Omega$  offen in  $D$  ist (denn dann ist  $\Omega$  abgeschlossen bezüglich  $D$ ). Sei also  $a \in D \setminus \Omega$  ein beliebiger Punkt. Ist dann  $V$  eine hinreichend kleine offene zusammenhängende Umgebung von  $a$  in  $D$ , so gilt (7.7) für ein geeignetes  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(V)$ . Wegen  $a \notin \Omega$  existiert ein  $f \neq 0$  in  $\mathcal{F}$ . Der Identitätssatz liefert  $V \cap \Omega = \emptyset$ , was zu beweisen war. □

**7.9 Definition** Für jede analytische Teilmenge  $A \subset U$  und jedes  $a \in A$  heißt

$$\text{codim}_a A := \sup\{ k \in \mathbb{N} : \exists \text{ affine, komplex } k\text{-dimensionale Ebene } L \subset E \text{ mit } a \text{ isoliert in } L \cap A\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

die **Codimension** von  $A$  in  $a$ . Weiter setzen wir

$$\text{codim } A := \inf \{ \text{codim}_a A : a \in A \} .$$

**7.10 Beispiel** Die Teilmenge  $A := \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 z_3 = z_2 z_3 = 0\}$  ist analytisch in  $\mathbb{C}^3$ . Sie ist die Vereinigung der  $z_1 z_2$ -Ebene mit der  $z_3$ -Achse. Ist  $a \in A$ , so gilt  $\text{codim}_a A = 2$  falls  $a_3 \neq 0$  und  $\text{codim}_a A = 1$  sonst.  $\square$

Die Codimension der analytischen Teilmenge  $A \subset U \subset E$  ist ein Maß dafür, um wieviel kleiner  $A$  als der Banachraum  $E$  selbst ist. Analytische Mengen endlicher Codimension (das ist natürlich automatisch der Fall, wenn  $E$  endliche Dimension hat), haben eine ganz spezielle Struktur, vergl. z.B. [13]. Als einfache Konsequenz von 7.8 notieren wir

**7.11 Lemma** Ist  $D \subset E$  ein Gebiet und  $A \subset D$  analytisch, so gilt

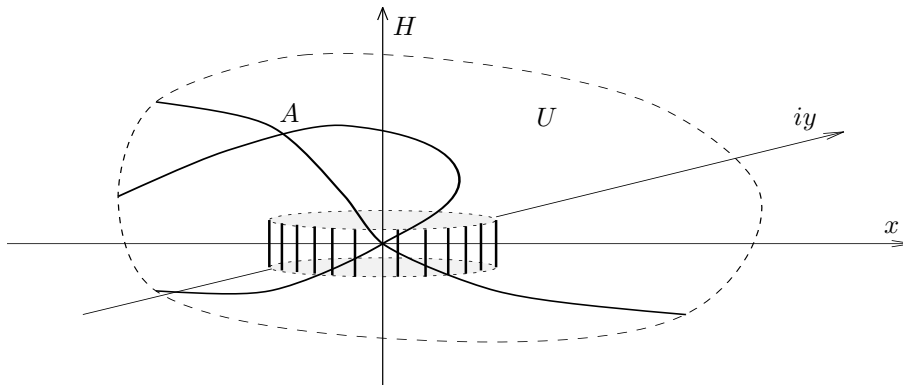
$$D = A \iff \text{codim } A = 0.$$

**7.12 Erster Riemannscher Hebbarkeitssatz** Seien  $U \subset E$  offen,  $A \subset U$  eine analytische Teilmenge mit  $\text{codim } A \geq 1$  und  $f : U \setminus A \rightarrow F$  eine holomorphe Abbildung. Ist dann  $f$  lokal-beschränkt in  $A$  (d.h. zu jedem  $a \in A$  existiert eine Umgebung  $V$  von  $a$  in  $U$  mit  $f|(V \setminus A)$  beschränkt), so besitzt  $f$  eine holomorphe Fortsetzung auf  $U$ .

*Beweis.* Wegen Lemma 7.11 und Lemma 7.8 ist  $U \setminus A$  dicht in  $U$ . Es genügt also, zu jedem  $a \in A$  eine offene Umgebung  $V \subset U$  von  $a$  zu finden, so daß die Einschränkung  $f|(V \setminus A)$  auf  $V$  holomorph fortsetzbar ist. Dazu dürfen wir  $a = 0$ ,  $E = \mathbb{C} \times H$  und  $L \cap A = \{0\}$  für die komplexe Gerade  $L := \mathbb{C} \times \{0\}$  in  $E$  annehmen. Für  $r > 0$  genügend klein und

$$B := \{t \in \mathbb{C} : |t| < r\} \quad S := \{t \in \mathbb{C} : |t| = r\}$$

gilt dann  $\overline{B} \times \{0\} \subset U$ . Wegen  $S$  kompakt und  $(S \times \{0\}) \cap A = \emptyset$  existiert eine Umgebung  $W$  von  $0 \in H$  mit  $\overline{B} \times W \subset U$  und  $S \times W \subset U \setminus A$ .



Figur 3. Zum Beweis des Kontinuitätssatzes

Für  $V := B \times W$  definieren wir die holomorphe Abbildung  $\tilde{f} : V \rightarrow F$  durch

$$\tilde{f}(t, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{f(s, w)}{s-t} ds.$$

Für  $w \in W$  beliebig aber fest gewählt sei  $g : B \rightarrow V$  definiert durch  $g(t) := (t, w)$ . Dann ist  $Z := g^{-1}(A) \subset B$  analytisch in  $B$  und  $\neq B$ , d.h.  $Z$  ist diskret. Für jedes  $\lambda \in F'$  ist somit  $\lambda \circ f \circ g$  eine  $\mathbb{C}$ -wertige holomorphe Funktion auf  $B \setminus Z$ , die in  $Z$  lokal-beschränkt ist. Der klassische Hebbarkeitssatz liefert also eine holomorphe Fortsetzung von  $\lambda \circ f \circ g$  auf ganz  $B$ , die Cauchysche Integralformel für diese Fortsetzung liefert dann  $\lambda f(t, w) = \lambda \tilde{f}(t, w)$  für alle  $t \in B \setminus Z$  (vgl. A.9). Da  $\lambda$  und  $w$  beliebig waren, folgt  $\tilde{f}|(V \setminus A) = f|(V \setminus A)$ .  $\square$

**7.13 Folgerung** Ist  $D$  ein Gebiet und  $A \subset D$  eine analytische Teilmenge mit  $A \neq D$ , so ist auch  $D \setminus A$  ein Gebiet.

*Beweis.* Angenommen  $D \setminus A = D_1 \cup D_2$  mit  $D_1, D_2$  offen,  $\neq \emptyset$  und  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ . Dann definiere  $f \in \mathcal{H}(D \setminus A)$  durch  $f \equiv 0$  auf  $D_1$  und  $f \equiv 1$  auf  $D_2$ .  $f$  hat nach 7.12 eine holomorphe Fortsetzung auf  $D$ , was dem Identitätssatz widerspricht.  $\square$

Die Voraussetzung der lokalen Beschränktheit in 7.12 kann natürlich nicht fortgelassen werden: Ist z.B.  $g$  eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf dem Gebiet  $U \subset E$  mit nicht-leerer Nullstellenmenge  $A := g^{-1}(0)$ , so ist die auf  $U \setminus A$  holomorphe Funktion  $f := 1/g$  nicht nach  $U$  holomorph fortsetzbar.

**7.14 Zweiter Riemannscher Hebbarkeitssatz** Es seien  $U \subset E$  eine offene Teilmenge und  $A \subset U$  eine analytische Teilmenge mit  $\text{codim } A \geq 2$ . Dann hat jede holomorphe Abbildung  $f : U \setminus A \rightarrow F$  eine holomorphe Fortsetzung auf  $U$ .

*Beweis.* Wir zeigen, daß  $f$  lokal-beschränkt in  $a \in A$  ist. Wie im Beweis zu 7.12 dürfen wir  $a = 0$ ,  $E = \mathbb{C}^2 \times H$  und  $L \cap A = \{0\}$  für  $L := \mathbb{C}^2 \times \{0\}$  annehmen. Es existieren dann ein  $r > 0$  und eine Umgebung  $W$  von  $0$  in  $H$  mit  $\bar{B} \times W \subset U$  und  $S \times W \subset U \setminus A$ , wobei

$$B := \{t \in \mathbb{C}^2 : \|t\| < r\} \quad , \quad S := \{t \in \mathbb{C}^2 : \|t\| = r\} .$$

Da  $S$  kompakt ist, kann  $W$  zusätzlich so klein gewählt werden, daß

$$M := \sup \|f(S \times W)\| < \infty .$$

Für  $w \in W$  fest betrachten wir die durch  $g(t) = (t, w)$  definierte Abbildung  $g : \bar{B} \rightarrow U$ . Die kompakte Menge  $Z := g^{-1}(A)$  ist analytisch in  $B$  mit  $B \setminus Z$  zusammenhängend wegen 7.13. Wegen 7.3 hat  $f \circ g : B \setminus Z \rightarrow F$  eine holomorphe Fortsetzung auf ganz  $B$  und damit sogar auf eine offene Umgebung von  $\bar{B} \subset \mathbb{C}^2$ . Das Maximumprinzip liefert dann aber  $\|f \circ g(t)\| \leq M$  für alle  $t \in B \setminus Z$ , d.h.  $\|f(z)\| \leq M$  für alle  $z \in V := B \times W$  mit  $z \notin A$ .  $\square$

**7.15 Folgerung** Es sei  $D \subset E$  ein Gebiet und  $f$  eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf  $E$  mit nicht-leerer Nullstellenmenge  $A := f^{-1}(0)$ . Dann hat die analytische Menge  $A \subset D$  die Codimension 1.

Ist  $E = X \oplus Y$  für abgeschlossene lineare Teilräume  $X, Y \subset E$ , so wollen wir ein Gebiet  $D \subset E$  ein **Hartogsgebiet** nennen, wenn  $(tx, y) \in D$  für alle  $(x, y) \in D$  und alle  $t \in \mathbb{C}$  mit  $|t| = 1$  gilt. Gilt diese Eigenschaft sogar für alle  $|t| \leq 1$ , so heißt  $D$  ein **vollkommenes Hartogsgebiet**.

**7.16 Übungsaufgabe** Als Verallgemeinerung des Hartogsschen Kontinuitätssatzes zeige man für jedes Hartogsgebiet  $D \subset X \oplus Y$  mit  $D \cap X \neq \emptyset$ : Jede holomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow F$  gestattet eine holomorphe Fortsetzung auf den offenen Kern  $\tilde{D}$  der vollkommenen Hülle  $\{(tx, y) : (x, y) \in D \text{ und } |t| \leq 1\}$ . Ist  $\dim X = 1$  oder  $\dim Y = 0$  (das ist der Fall, wenn  $D \subset E = X$  ein kreisförmiges Gebiet mit  $0 \in D$  ist), so stimmt  $\tilde{D}$  bereits mit der vollkommenen Hülle von  $D$  überein. (Hinweis: Entwickle  $f$  als Reihe  $\sum p_k$ , wobei  $p_k$  holomorph auf  $D$  ist und für jedes  $(a, b) \in D$  die Abbildung  $x \mapsto p_k(x, b)$  ein  $k$ -homogenes Polynom auf  $X$  ist.)

**7.17 Übungsaufgabe** Es seien  $V \subset W \subset E$  Gebiete,  $A \subset W$  eine analytische Teilmenge und  $L \subset E$  ein linearer Teilraum mit  $\emptyset \neq L \cap V \subset A$  und  $W \cap L$  zusammenhängend. Man zeige  $W \cap L \subset A$  (Hinweis: Betrachte zunächst den Fall  $L \subset E$  abgeschlossen und führe den allgemeinen Fall darauf zurück.)

**7.18 Übungsaufgabe** Sei  $U := \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \neq 1 \text{ oder } |z_2| > 1\}$  und  $A := \{(t, 0) \in \mathbb{C}^2 : |t| < 1\}$ . Man zeige

- (i)  $A$  ist analytisch in  $U$
- (ii)  $A$  kann in  $U$  nicht global durch holomorphe Gleichungen beschrieben werden – genauer: Es gibt keine Darstellung  $U \cap A = \{z \in U : f(z) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\}$  mit  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ .

**7.19 Übungsaufgabe** Man gebe ein Gebiet  $U \subset \mathbb{C}^2$  und eine analytische Teilmenge  $A \subset U$  mit  $\text{codim } A = 1$  so an, daß für alle  $f \in \mathcal{H}(U)$  gilt:  $f|_A = 0 \Rightarrow f = 0$ .

## 8. Holomorphiegebiete und Holomorphiehüllen

Wir behandeln die Frage, ob zu gegebener holomorpher Abbildung  $f : D \rightarrow F$  ein größtes Gebiet existiert, auf das sich  $f$  holomorph fortsetzen läßt. Die Antwort ist positiv, wenn als Definitionsbereiche allgemeinere Gebiete über  $E$  zugelassen werden. Die gleiche Aussage gilt auch für Familien holomorpher Abbildungen, die auf  $D$  definiert sind.

**8.1 Definition**  $(D, \tau)$  heißt ein **Bereich über** dem Banachraum  $E$ , falls gilt:

- (i)  $D$  ist ein Hausdorffraum und
- (ii)  $\tau : D \rightarrow E$  ist eine lokal-topologische Abbildung.

Ist  $D$  zusammenhängend, so sprechen wir auch von einem **Gebiet über**  $E$ .

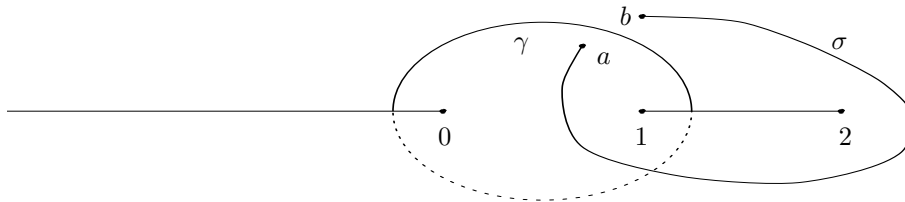
Für jedes  $a \in D$  ist  $\tau(a) \in E$ . Wir sagen,  $a$  liegt über  $\tau(a)$ . Die Gesamtheit aller Bereiche über  $E$  bildet eine Kategorie.  $\varphi : (D, \tau) \rightarrow (\tilde{D}, \tilde{\tau})$  ist ein Morphismus, falls  $\varphi : D \rightarrow \tilde{D}$  eine stetige Abbildung mit  $\tilde{\tau} \circ \varphi = \tau$  ist (d.h.  $a \in D$  und  $\varphi(a) \in \tilde{D}$  liegen jeweils über dem gleichen Punkt von  $E$ ). Der Bereich  $(D, \tau)$

heißt **schlicht**, falls  $\tau$  injektiv ist (dann ist  $\tau$  also ein Homöomorphismus auf den Bereich  $\tau(D) \subset E$ ). Jeder Bereich  $D$  in  $E$  ist auch ein Bereich über  $E$  vermöge der kanonischen Einbettung  $\tau = \text{id}_D$ .

Unter einem **Schnitt** über  $U \subset E$  in  $(D, \tau)$  verstehen wir eine stetige Abbildung  $\sigma : U \rightarrow D$  mit  $\tau \circ \sigma = \text{id}_U$  (d.h.  $\sigma(u)$  liegt stets über  $u \in U$ ). Damit können wir dann definieren, wann eine gegebene Abbildung  $f : D \rightarrow F$ ,  $F$  komplexer Banachraum, **holomorph** heißen soll: Für jedes offene  $U \subset E$  und jeden Schnitt  $\sigma : U \rightarrow D$  über  $U$  soll die Abbildung  $f \circ \sigma : U \rightarrow F$  holomorph im bereits bekannten Sinne sein. Allgemeiner heißt eine stetige Abbildung  $f : D \rightarrow \tilde{D}$  zwischen Gebieten über  $E$ ,  $\tilde{E}$  **holomorph**, wenn  $\tilde{\tau} \circ f : D \rightarrow \tilde{E}$  holomorph ist.

Im allgemeinen liegen über einem Punkt von  $\tau(D) \subset E$  mehrere Punkte von  $D$ , in denen dann  $f$  auch verschiedene Funktionswerte haben kann. Betrachten wir ein einfaches

**8.2 Beispiel** Für  $D := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z(z-1)(z-2) \neq 0\}$  definiere  $\tau, f : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\tau(z, w) = z$  und  $f(z, w) = w$ . Dann ist  $(D, \tau)$  ein nicht-schlichtes Gebiet über  $\mathbb{C}$  – über jedem  $z \in \tau(D) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$  liegen genau 2 Punkte von  $D$ , in denen die stetige Funktion  $f$  gerade die beiden Quadratwurzeln aus  $z(z-1)(z-2)$  annimmt.  $f$  ist also eine holomorphe Funktion auf  $(D, \tau)$ , die wir auch mit  $f(z) = \sqrt{z(z-1)(z-2)}$  bezeichnen.  $D$  ist nicht topologisch äquivalent zu einem Gebiet in  $\mathbb{C}$ . Dieses sieht man wie folgt ein – vergl. Figur 4:  $U \subset \mathbb{C}$  entstehe aus  $\mathbb{C}$  durch Herausnahme der negativen reellen Halbgeraden  $N$  sowie des Intervalls  $I := [1, 2]$ . Dann zerfällt  $\tau^{-1}(U) \subset D$  in zwei zu  $U$  homöomorphe Teilgebiete, d.h. man kann  $D$  auch in folgender Weise gewinnen. Lege zwei Exemplare von  $U$  ‘übereinander’ und verhefte längs inneren Punkten der Intervalle  $N$  und  $I$  ‘gegenüberliegende Ufer kreuzweise ohne Selbstdurchdringung’. Betrachte entsprechend Figur 4 die einfach geschlossene Kurve  $\gamma$  in  $D$ , wobei der Verlauf im unteren Stockwerk gestrichelt gezeichnet sei. Offenbar ist dann das Komplement dieser Kurve in  $D$  immer noch zusammenhängend, wie die gezeichnete Verbindungskurve der Punkte  $a, b \in D$  zeigt. Demgegenüber zerlegt nach dem Jordanschen Kurvensatz jede einfach geschlossene Kurve in einem Gebiet von  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$  dieses in zwei Zusammenhangskomponenten. Man kann zeigen, daß  $D$  als topologischer Raum homöomorph zu einem 2-dimensionalen Torus ist, aus dem 4 Punkte entfernt wurden.



Figur 4.

Statt  $(D, \tau)$  schreiben wir häufig auch einfach  $D$ . Mit  $\mathcal{H}(D, F)$  werde der Vektorraum aller  $F$ -wertigen holomorphen Funktionen auf  $D$  bezeichnet. Ist dann  $\varphi : D \rightarrow \tilde{D}$  ein Morphismus von Gebieten über  $E$ , so heißt  $f \in \mathcal{H}(D, F)$  **holomorph fortsetzbar** auf  $\tilde{D}$  (bezüglich  $\varphi$ ), wenn ein  $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{D}, F)$  mit  $f = \tilde{f} \circ \varphi$  existiert –  $\tilde{f}$  ist wieder eindeutig bestimmt (warum?) und heißt dann die **holomorphe Fortsetzung** von  $f$  auf  $\tilde{D}$ . Im Falle  $D \subset \tilde{D} \subset E$  ist  $\varphi$  notwendigerweise die kanonische Injektion und  $\tilde{f} \circ \varphi = f|_D$ .

Es sei wieder  $D = (D, \tau)$  ein beliebiger Bereich über  $E$ . Ist dann  $\mathcal{F}$  eine Klasse holomorpher Abbildungen definiert auf  $D$  (d.h. jedes  $f \in \mathcal{F}$  ist eine holomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow F$ , wobei  $F$  mit  $f \in \mathcal{F}$  variieren darf), so heißt  $\varphi : D \rightarrow \tilde{D}$  eine  **$\mathcal{F}$ -Erweiterung**, wenn jedes  $f \in \mathcal{F}$  holomorph fortsetzbar ist auf  $\tilde{D}$ . Eine  $\mathcal{F}$ -Erweiterung heißt **universell** – oder auch eine  **$\mathcal{F}$ -Hülle von  $D$**  –, wenn zu jeder  $\mathcal{F}$ -Erweiterung  $\psi : D \rightarrow B$  genau ein Morphismus  $\theta : B \rightarrow \tilde{D}$  mit  $\varphi = \theta \circ \psi$  existiert. Ist  $\mathcal{F}$  die Klasse aller Banachraum-wertigen holomorphen Abbildungen auf  $D$ , so heißt eine  $\mathcal{F}$ -Hülle  $\tilde{D}$  auch **Holomorphiehülle von  $D$** . Besteht  $\mathcal{F}$  nur aus einer einzigen  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktion, so heißt  $\tilde{D}$  ein **Holomorphiegebiet über  $E$** . Holomorphiegebiete über  $E$  haben also die Eigenschaft, daß auf ihnen eine  $\mathbb{C}$ -wertige holomorphe Funktion existiert, die auf kein größeres Gebiet holomorph fortsetzbar ist. Aus der eindimensionalen Funktionentheorie ist bekannt, daß jedes Gebiet über  $\mathbb{C}$  ein Holomorphiegebiet ist – auf dem Einheitskreis  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  kann z.B. die holomorphe Funktion  $f(z) = \sum z^k!$  in keinen Randpunkt von  $\mathbb{D}$  auch nur stetig fortgesetzt werden. Hauptresultat dieses Abschnitts ist

**8.3 Satz** Für jedes Gebiet  $D$  über  $E$  und jede Klasse  $\mathcal{F}$  Banachraum-wertiger holomorpher Funktionen

auf  $D$  existiert bis auf Isomorphie genau eine  $\mathcal{F}$ -Hülle über  $E$ .

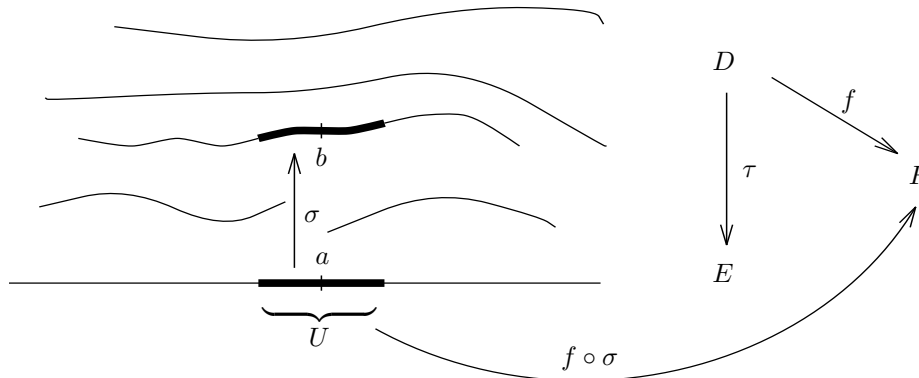
Wir behandeln zunächst den Spezialfall, daß  $\mathcal{F}$  aus einer einzigen holomorphen Abbildung  $f : D \rightarrow F$  besteht. Für jedes  $a \in E$  ist dann der Begriff des ( $F$ -wertigen) holomorphen Funktionskeimes wie folgt definiert: Sei  $\mathcal{H}_a^F$  der komplexe Vektorraum aller Abbildungen  $f : E \rightarrow F$ , die in irgendeiner offenen Umgebung von  $a$  (die von  $f$  abhängt) holomorph ist. Zwei Elemente  $f, g$  von  $\mathcal{H}_a^F$  heißen äquivalent ( $f \sim g$ ), wenn eine Umgebung  $W$  von  $a$  existiert mit  $f|_W = g|_W$ . Die Elemente von  $\mathcal{O}_a^F := \mathcal{H}_a^F / \sim$  heißen dann **holomorphe Funktionskeime** (oder besser Abbildungskeime) in  $a \in E$ . Die Vektorraumstruktur von  $\mathcal{H}_a^F$  vererbt sich auf  $\mathcal{O}_a^F$ . In offensichtlicher Weise ist  $\mathcal{O}_a := \mathcal{O}_a^{\mathbb{C}}$  eine komplexe Algebra mit Eins und  $\mathcal{O}_a^F$  ein  $\mathcal{O}_a$ -Modul. Ferner ist  $\mathcal{O}_a^F$  isomorph zum Raum aller konvergenten Potenzreihen von  $E$  nach  $F$ : Jedes  $f \in \mathcal{H}_a^F$  hat in einer kleinen Umgebung von  $a$  eine eindeutig bestimmte konvergente Potenzreihenentwicklung  $f(z) = \sum p_k(z - a)$  – der Isomorphismus wird dann durch die Zuordnung  $f \mapsto \sum p_k$  auf  $\mathcal{O}_a^F$  induziert. Ist  $U$  eine beliebige offene Umgebung von  $a \in E$  und  $f : U \rightarrow F$  holomorph, so setzen wir  $f$  auf ganz  $E$  fort (etwa durch  $f(z) = 0$  für alle  $z \in E \setminus U$ ) und bezeichnen mit  $f_a$  die zugehörige Restklasse von  $f$  in  $\mathcal{O}_a^F$  – genannt der von  $f$  in  $a$  **induzierte Keim**. Betrachten wir nun die disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{O}^F := \mathcal{O}_E^F := \bigsqcup_{a \in E} \mathcal{O}_a^F$$

zusammen mit der durch  $\pi^{-1}(a) = \mathcal{O}_a^F$  definierten Abbildung  $\pi : \mathcal{O}^F \rightarrow E$ . Für jedes offene  $U \subset E$  und jedes holomorphe  $f : U \rightarrow F$  sei  $[f] := \{f_a : a \in U\} \subset \mathcal{O}^F$ . Wir versehen  $\mathcal{O}_a^F$  mit der größten Topologie, so daß alle derartigen Teilmengen  $[f]$  offen sind. Diese ist hausdorffsch (Identitätssatz!), und die Abbildung  $\pi$  ist lokal-topologisch (denn für jedes  $f \in \mathcal{H}(U, F)$  ist  $\pi : [f] \rightarrow U$  ein Homöomorphismus). Insbesondere ist also  $\mathcal{O}^F$  ein Bereich über  $E$ , und man überzeugt sich leicht, daß die durch  $\varepsilon(f_a) := f(a)$  für jeden Keim  $f_a \in \mathcal{O}^F$  definierte Auswertungsabbildung

$$\varepsilon : \mathcal{O}^F \rightarrow F$$

holomorph ist.  $\mathcal{O}^F$  heißt die **Garbe** der ( $F$ -wertigen) holomorphen Funktionskeime auf  $E$ . Für jedes  $a \in E$  heißt  $\mathcal{O}_a^F$  der **Halm** der Garbe in  $a$ .



Figur 5.

Betrachten wir nun ein Gebiet  $D = (D, \tau)$  über  $E$  und eine holomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow F$ . Für jedes  $d \in D$  und  $a := \tau(d)$  sei dann  $f_d \in \mathcal{O}_a^F$  wie folgt definiert: Wähle eine offene Umgebung  $U$  von  $a \in E$  und einen Schnitt  $\sigma : U \rightarrow D$  durch  $d$  (d.h.  $\sigma(a) = d$ ) – der Keim  $f_d := (f \circ \sigma)_a$  hängt dann nicht von der Auswahl des Schnittes  $\sigma$  ab. Wir erhalten also durch  $d \mapsto f_d$  eine lokal-topologische Abbildung  $\varphi : D \rightarrow \mathcal{O}^F$  mit  $\varepsilon \circ \varphi = f$ , und durch diese Bedingung ist  $\varphi_f := \varphi$  auch eindeutig bestimmt. Insbesondere ist  $\varphi$  stetig, und es existiert genau eine Zusammenhangskomponente  $\tilde{D}$  von  $\mathcal{O}^F$  mit  $\varphi(D) \subset \tilde{D}$ . Vermöge  $\tilde{\tau} := \pi|_{\tilde{D}}$  ist  $\tilde{D}$  ein Gebiet über  $E$ , und  $\tilde{f} := \varepsilon|_{\tilde{D}}$  ist eine holomorphe Fortsetzung von  $f$  bezüglich des Morphismus  $\varphi : D \rightarrow \tilde{D}$ , d.h.  $\tilde{D}$  ist eine  $\mathcal{F}$ -Erweiterung für  $\mathcal{F} := \{f\}$ . Ist  $\psi : D \rightarrow B$  eine weitere  $\mathcal{F}$ -Erweiterung und  $g : B \rightarrow F$  die zugehörige holomorphe Fortsetzung von  $f$  auf  $B$ , so ergibt  $\varepsilon \circ \varphi_g \circ \psi = g \circ \psi = f$  die Beziehung  $\varphi_g \circ \psi = \varphi_f$  und folglich  $\varphi_f(D) \subset \varphi_g(B) \subset \tilde{D}$ , d.h.  $\varphi_f : D \rightarrow \tilde{D}$  ist eine universelle  $\mathcal{F}$ -Erweiterung.

Im nächsten Beweisschritt nehmen wir an, daß  $\mathcal{F}$  eine beliebige Menge von holomorphen Abbildungen

ist – genauer: Es gibt eine Menge  $S$  und für jedes  $s \in S$  einen komplexen Banachraum  $F_s$  und eine holomorphe Abbildung  $f_s : D \rightarrow F_s$  mit  $\mathcal{F} = \{f_s : s \in S\}$ . Das direkte Produkt

$$(8.4) \quad F := \prod_{s \in S} F_s$$

ist ein komplexer Vektorraum, und jede Abbildung  $g : D \rightarrow F$  wird durch eine Familie  $(g_s)_{s \in S}$  von Abbildungen  $g_s : D \rightarrow F_s$  gegeben. Wir nennen (nur im Kontext dieses Beweises)  $g$  holomorph, wenn alle  $g_s$  holomorph sind. Insbesondere liefert  $f = (f_s)_{s \in S}$  eine holomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow F$ , und es gilt, eine universelle  $\{f\}$ -Hülle von  $D$  zu finden (die dann automatisch eine universelle  $\mathcal{F}$ -Hülle von  $D$  ist). Das aber geht genau so wie im ersten Beweisschritt (insbesondere können  $\mathcal{H}_a^F, \mathcal{O}_a^F, \mathcal{O}^F$  und  $\varphi_f$  in gleicher Weise definiert werden, falls  $F$  ein Produkt der Form (8.4) ist).

Im dritten und letzten Beweisschritt wenden wir uns dem Fall zu, daß  $\mathcal{F}$  eine beliebige Klasse – also nicht notwendig eine Menge ist. Wir müssen diesen Fall behandeln, damit wir nicht mit der Logik in Konflikt geraten. Es genügt offenbar, eine Menge  $\mathcal{G}$  holomorpher Abbildungen auf  $D$  so zu finden, daß die  $\mathcal{F}$ -Erweiterungen von  $D$  genau die  $\mathcal{G}$ -Erweiterungen von  $D$  sind. O.B.d.A. dürfen wir zunächst für jede Abbildung  $f : D \rightarrow F$  aus  $\mathcal{F}$  annehmen, daß  $\lambda \circ f \neq 0$  für alle  $0 \neq \lambda \in F'$  gilt (denn ist  $\lambda \circ f = 0$ , so gilt auch  $\lambda \circ \tilde{f} = 0$  für jede holomorphe Fortsetzung  $\tilde{f}$  von  $f$ ), d.h. der lineare Aufspann  $L$  von  $f(D)$  in  $F$  ist dicht. Wählen wir also einen festen komplexen Vektorraum  $Z$ , dessen Dimension die Mächtigkeit von  $D$  ist, so brauchen wir als Zielräume nur solche Banachräume  $F$  zu betrachten, die Kompletterung von linearen Teilräumen  $L \subset Z$  bezüglich irgendwelchen Normen auf  $L$  sind. Die Klasse derartiger Banachräume  $F$  ist jedoch eine Menge. Damit ist 8.3 vollständig bewiesen.  $\square$

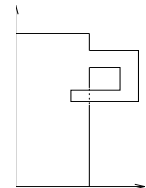
**8.5 Definition** Ein Bereich  $D$  über  $E$  heißt **holomorph separabel**, falls für alle  $x \neq y$  aus  $D$  ein  $f \in \mathcal{H}(D)$  existiert mit  $f(x) \neq f(y)$ .

**8.6 Satz** Für jede Klasse  $\mathcal{F}$  holomorpher Abbildungen auf dem Gebiet  $D$  über  $E$  ist die zugehörige  $\mathcal{F}$ -Hülle  $\tilde{D}$  holomorph separabel.

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, daß  $\mathcal{F} = \{f_s : s \in S\}$  für eine Menge  $S$  gilt, wobei  $f_s : D \rightarrow F_s$  holomorph ist für alle  $s \in S$ . Definieren wir  $F$  durch 8.4, so genügt es auf Grund unserer obigen Überlegungen zu zeigen, daß der Bereich  $\mathcal{O}^F$  über  $E$  holomorph separabel ist. Gelte also  $g(x) = g(y)$  für alle  $g \in \mathcal{H}(D)$  und feste  $x, y \in \tilde{D}$ . Dann gilt auch  $f_s(x) = f_s(y)$  für alle  $s \in S$  (verwende A.3) und  $\tau(x) = \tau(y) =: a$ . Weiter gilt auch  $f_s^{(k)}(x) = f_s^{(k)}(y)$  für jedes  $k \geq 0$  (ist  $\sigma : U \rightarrow D$  ein Schnitt durch  $x$ , so setze  $f_s^{(k)}(x) := (\sigma \circ f_s)^{(k)}(a) \in \mathcal{L}^k(E, F)$  für die  $k$ -te Ableitung). Für  $f = (f_s)_{s \in S}$  stimmen also  $f_x$  und  $f_y$  überein, d.h.  $x = y \in \mathcal{O}^F$ .  $\square$

**8.7 Übungsaufgabe** Man gebe über  $\mathbb{C}^2$  ein Gebiet an, das nicht holomorph separabel ist. Hinweis: Betrachte den ‘Bierkrug’  $\longrightarrow$

Figur 6.



**8.8 Übungsaufgabe** Es sei  $D \subset E$  ein Gebiet. Man gebe eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$  so an, daß der offene Kern  $\tilde{D}$  der abgeschlossenen konvexen Hülle von  $D$  (vgl. 6.14) die  $\mathcal{F}$ -Hülle von  $D$  ist.

### 9. Beispiele für Holomorphiehüllen

Für jedes Gebiet  $D$  über  $E$  wollen wir mit  $\varphi : D \rightarrow \mathcal{E}(D)$  die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Holomorphiehülle von  $D$  (auch Enveloppe von  $D$ ) bezeichnen.  $\mathcal{E}$  hat gewisse funktorielle Eigenschaften:

**9.1 Satz** Sind  $D_1, D_2$  Gebiete über den Banachräumen  $E_1, E_2$ , so läßt sich jede lokal-biholomorphe Abbildung  $g : D_1 \rightarrow D_2$  zu einer lokal-biholomorphen Abbildung der Holomorphiehüllen fortsetzen – genauer: Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{g} & D_2 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathcal{E}(D_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}(g)} & \mathcal{E}(D_2) \end{array}$$

mit einer eindeutig bestimmten lokal-biholomorphen Abbildung  $\mathcal{E}(g)$ . Ist  $g$  biholomorph, so ist auch  $\mathcal{E}(g)$  biholomorph.

*Beweis.* Für  $i = 1, 2$  sei das Gebiet  $D_i = (D_i, \tau_i)$  über dem Banachraum  $E_i$  gelegen.  $g : D_1 \rightarrow D_2$  ist genau dann lokal-biholomorph, wenn für die holomorphe Abbildung  $\tau := \tau_2 \circ g : D_1 \rightarrow E_2$  und jedes  $a \in D_1$  die Ableitung  $d\tau(a) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  ein linearer Homöomorphismus ist (Satz über implizite Funktionen). Wir dürfen also ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $E_1 = E_2 =: E$  annehmen.

**Spezialfall**  $D_2 = E, \tau_2 = \text{id}_E$ : Dann ist auch  $\mathcal{E}(D_2) = E$  und  $\varphi_2 = \text{id}_E$ . Es existiert eine holomorphe Fortsetzung  $h : \mathcal{E}(D_1) \rightarrow E$  von  $g : D_1 \rightarrow E$ . Wegen  $dg : D_1 \rightarrow \text{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$  holomorph nimmt auch  $dh : \mathcal{E}(D_1) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  nur Werte in  $\text{GL}(E)$  an – sonst wäre die holomorphe Abbildung  $z \mapsto dg(z)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$  nicht auf  $\mathcal{E}(D_1)$  fortsetzbar. Also ist auch  $\mathcal{E}(g) := h$  lokal-biholomorph.

**Allgemeinfall** Sei  $\mathcal{F} = \{f_s : s \in S\}$  eine Menge Banachraum-wertiger Funktionen auf  $D_2$  derart, daß  $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathcal{E}(D_2)$  eine  $\mathcal{F}$ -Hülle ist. Wir dürfen annehmen (vergl. den Beweis von 8.2 und definiere  $F$  durch 8.4), daß  $\mathcal{E}(D_2)$  eine Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{O}_E^F$  ist und  $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathcal{E}(D_2)$  durch  $\varphi_2(d) = f_d$  für  $f := (f_s)_{s \in S}$  gegeben wird. Für  $\mathcal{G} := \{f_s \circ g : s \in S\}$  und  $D := (D_1, \tau)$  ist dann  $\varphi_2 \circ g : D \rightarrow \mathcal{E}(D_2)$  wegen  $(f \circ g)_d = f_{g(d)}$  eine  $\mathcal{G}$ -Hülle von  $D$ . Die lokal-biholomorphe Abbildung  $\tau$  läßt sich (vergl. den Spezialfall) zu einer lokal-biholomorphen Abbildung  $\tilde{\tau} : \mathcal{E}(D_1) \rightarrow E$  mit  $\tilde{\tau} \circ \varphi_1 = \tau$  fortsetzen. Damit ist dann auch  $\tilde{D} := (\mathcal{E}(D_1), \tilde{\tau})$  ein Gebiet über  $E$  und als Holomorphiehülle von  $D_1$  insbesondere auch eine  $\mathcal{G}$ -Erweiterung von  $D$ , d.h. es existiert genau ein Morphismus  $\mathcal{E}(g) : \tilde{D} \rightarrow \mathcal{E}(D_2)$  mit  $\mathcal{E}(g) \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ g$ .  $\mathcal{E}(g)$  ist natürlich insbesondere lokal-biholomorph. Ist  $g$  biholomorph, so ist  $\mathcal{E}(g)\mathcal{E}(g^{-1})$  bzw.  $\mathcal{E}(g^{-1})\mathcal{E}(g)$  die Identität auf  $\mathcal{E}(D_2)$  bzw.  $\mathcal{E}(D_1)$ , d.h.  $\mathcal{E}(g)$  ist dann auch biholomorph.  $\square$

Für jedes  $t \in \mathbb{C}$  sei  $m_t \in \text{Aut}(E)$  der durch  $m_t(z) = tz$  definierte Multiplikationsoperator. Kreisförmige Gebiete in  $E$  waren nun gerade dadurch charakterisiert, daß sie invariant unter allen  $m_t$  mit  $t \in \mathbb{T} := \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$  sind. Ist  $D = (D, \tau)$  ein Gebiet über  $E$ , so können wir diesen Begriff wie folgt erweitern

**9.2 Definition**  $D$  heißt **kreisförmig**, wenn zu jedem  $t \in \mathbb{T}$  ein Homöomorphismus  $g_t : D \rightarrow D$  existiert, so daß  $\tau \circ g_t = m_t \circ \tau$  zusammen mit  $g_s g_t = g_{st}$  gilt und  $g_t(z)$  stetig von  $(t, z) \in \mathbb{T} \times D$  abhängt.  $D$  heißt **eigentlich kreisförmig**, wenn zusätzlich  $0 \in \tau(D)$  gilt.

Es ist klar, daß jedes  $g_t$  biholomorph ist und  $t \mapsto g_t$  einen Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{T} \rightarrow \text{Aut}(D)$  definiert. Treffen wir nun die Konvention, daß jedes schlichte Gebiet über  $E$  als Gebiet in  $E$  angesehen wird, so gilt

**9.3 Satz** Für jedes eigentlich kreisförmige Gebiet  $D$  über  $E$  ist die Holomorphiehülle  $\mathcal{E}(D)$  ein vollkommen kreisförmiges Gebiet in  $E$ .

*Beweis.* Nach 9.1 läßt sich  $g_t$  für jedes  $t \in \mathbb{T}$  zu einem biholomorphen Automorphismus  $\tilde{g}_t$  von  $\tilde{D} := \mathcal{E}(D)$  fortsetzen, und es gilt  $\tilde{\tau} \circ \tilde{g}_t = m_t \circ \tilde{\tau}$  als Konsequenz des Identitätssatzes auf  $\tilde{D}$ . Mit dem gleichen Argument folgt  $\tilde{g}_s \tilde{g}_t = \tilde{g}_{st}$  für alle  $s, t \in \mathbb{T}$ . Sei nun  $\Omega$  die Menge aller  $z \in \tilde{D}$ , so daß die durch  $t \mapsto \tilde{g}_t(z)$  definierte Abbildung  $\mathbb{T} \rightarrow \tilde{D}$  stetig in  $1 \in \mathbb{T}$  ist.  $\Omega$  ist offen und abgeschlossen in  $\tilde{D}$  und enthält  $D$ , d.h.  $\Omega = \tilde{D}$ . Daraus folgt leicht, daß  $\tilde{g}_t(z)$  sogar stetig in jedem  $(t, z) \in \mathbb{T} \times \tilde{D}$  ist, d.h.  $\tilde{D}$  ist selbst ein eigentlich kreisförmiges Gebiet. Sei nun  $f : \tilde{D} \rightarrow F$  eine beliebige holomorphe Abbildung. Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir  $\tilde{p}_k : \tilde{D} \rightarrow F$  durch

$$\tilde{p}_k(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(\tilde{g}_t(z))}{t^{k+1}} dt .$$

Damit gilt dann

$$(i) \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_k(z)$$

lokal-gleichmäßig auf  $\tilde{D}$ . Nach Voraussetzung existiert eine offene Umgebung von  $0 \in E$  und ein Schnitt  $\sigma : U \rightarrow \tilde{D}$ . Wählen wir  $U$  vollkommen kreisförmig, so existiert eine auf  $U$  lokal-gleichmäßig konvergente Potenzreihenentwicklung

$$(f \circ \sigma)(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(u) .$$

Mit  $p_k := 0$  für  $k < 0$  gilt  $p_k \circ \tilde{\tau} = \tilde{p}_k$  auf der offenen Teilmenge  $\sigma(U) \subset \tilde{D}$  und somit auf ganz  $\tilde{D}$ . Wegen (i) nimmt deshalb  $f$  über jedem Punkt von  $\tilde{\tau}(\tilde{D}) \subset E$  genau einen Funktionswert an. Wegen  $\tilde{D}$  holomorph separabel (vgl. 8.6) ist  $\tilde{D}$  schlicht, nach unserer Konvention also ein Gebiet in  $E$ , d.h.  $\tilde{p}_k = p_k$ .

Die Potenzreihe  $\sum p_k(z)$  konvergiert lokal-gleichmäßig auf der vollkommenen Hülle  $H$  von  $\tilde{D}$  und stellt dort eine holomorphe Fortsetzung von  $f$  dar. Da dieses für alle  $f$  gilt, muß  $H = \tilde{D}$  gelten, d.h.  $\tilde{D}$  ist vollkommen kreisförmig.  $\square$

Es treten nun durchaus nicht alle vollkommen kreisförmigen Gebiete in  $E$  als Holomorphiegebiete auf. Wir wollen das genauer für Reinhardtgebiete im  $\mathbb{C}^n$  studieren.

**9.4 Definition** Das vollkommene Reinhardtgebiet  $D \subset \mathbb{C}^n$  heißt **logarithmisch konvex**, falls

$$\{\log r : r \in D \cap \mathbb{R}_+^n\}$$

konvex in  $\mathbb{R}^n$  ist, wobei

$$\log r := (\log r_1, \dots, \log r_n)$$

für alle  $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $\mathbb{R}_+ := \{x > 0 : x \in \mathbb{R}\}$  gesetzt sei.

**9.5 Satz** Für jedes eigentliche (d.h.  $0 \in D$ ) Reinhardtgebiet  $D \subset \mathbb{C}^n$  ist die Holomorphiehülle ein logarithmisch konvexes, vollkommenes Reinhardtgebiet in  $\mathbb{C}^n$

*Beweis.* Da  $D$  insbesondere kreisförmig ist, ist die Holomorphiehülle  $\tilde{D}$  von  $D$  wegen 9.3 schlicht und nach unserer Konvention in  $\mathbb{C}^n$  enthalten. Für jedes  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$  kann der Automorphismus  $z \mapsto (t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$  zu einem Automorphismus von  $\tilde{D}$  fortgesetzt werden, d.h. auch  $\tilde{D}$  ist ein Reinhardtgebiet. Jede holomorphe Abbildung  $f : \tilde{D} \rightarrow F$  gestattet eine auf der vollkommenen Reinhardtülle von  $\tilde{D}$  lokal-gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu z^\nu.$$

Daraus folgt, daß  $\tilde{D}$  ein vollkommenes Reinhardtgebiet ist (vgl. 4.7). Seien nun  $x, y \in \tilde{D} \cap \mathbb{R}_+^n$  beliebig und  $\alpha, \beta > 0$  mit  $\alpha + \beta = 1$  gewählt. Definiere  $u \in \mathbb{R}_+^n$  durch  $\log u = \alpha \log x + \beta \log y$ . Wir müssen zeigen, daß dann  $u \in \tilde{D}$  gilt. Wegen 4.5 existieren  $0 < r < 1$  und  $M > 0$  mit

$$\|c_\nu x^\nu\| \leq r^{|\nu|} M \quad \text{und} \quad \|c_\nu y^\nu\| \leq r^{|\nu|} M.$$

Für jedes  $\nu$  mit  $c_\nu \neq 0$  gilt dann

$$\begin{aligned} \log u^\nu &= \sum_{i=1}^n \nu_i \log u_i = \alpha \left( \sum_{i=1}^n \nu_i \log x_i \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^n \nu_i \log y_i \right) \\ &= \alpha \log x^\nu + \beta \log y^\nu \\ &\leq \alpha \log \frac{r^{|\nu|} M}{\|c_\nu\|} + \beta \log \frac{r^{|\nu|} M}{\|c_\nu\|} = \log \frac{r^{|\nu|} M}{\|c_\nu\|}, \end{aligned}$$

und damit  $\|c_\nu u^\nu\| \leq r^{|\nu|} M$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}^n$ , d.h.  $u \in \tilde{D}$ .  $\square$

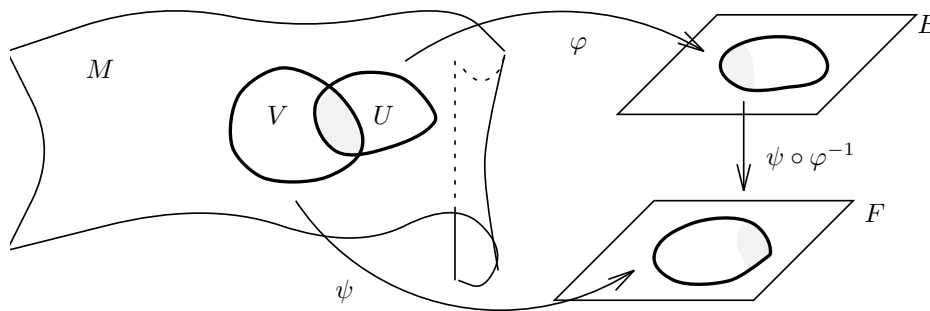
Es läßt sich nun umgekehrt für jedes logarithmisch konvexe, vollkommene Reinhardtgebiet  $D \subset \mathbb{C}^n$  zeigen, daß eine  $n$ -fache Potenzreihe mit Werten in  $\mathbb{C}$  existiert, deren genaues Konvergenzgebiet  $D$  ist (vgl. z. B. [11] p. 38), d.h. daß  $D$  ein Holomorphiegebiet ist.

**9.6 Übungsaufgabe** Bestimme die Holomorphiehülle von

$$D := \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1 \quad \text{oder} \quad |z_2| < 1\}.$$

**9.7 Übungsaufgabe** Es sei  $D$  ein Gebiet über  $E$  und  $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{D})$  die holomorphe Fortsetzung von  $f \in \mathcal{H}(D)$  auf die Holomorphiehülle  $\tilde{D}$  von  $D$ . Man zeige

$$f(D) = \tilde{f}(\tilde{D}).$$



Figur 7. Verträglichkeit von Karten

## 10. Komplexe Mannigfaltigkeiten

Es seien  $M$  ein Hausdorffraum und  $E, F$  komplexe Banachräume.

**10.1 Definition**  $(U, \varphi)$  heißt eine ( $E$ -wertige) **Karte auf  $M$** , wenn  $U \subset M$  eine offene Teilmenge und  $\varphi$  ein Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge von  $E$  ist. Ist  $(V, \psi)$  eine weitere Karte auf  $M$  (etwa mit Werten in  $F$ ), so heißen  $(U, \varphi)$  und  $(V, \psi)$  **holomorph verträglich**, wenn  $U \cap V = \emptyset$  gilt oder die **Übergangsfunktion**  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  biholomorph ist, vergl. Figur 7.

**10.2 Definition** Eine Klasse  $\mathcal{A}$  von paarweise holomorph verträglichen Karten auf  $M$  heißt ein **holomorpher Atlas** auf  $M$ , wenn zu jedem  $a \in M$  eine Karte  $(U, \varphi)$  aus  $\mathcal{A}$  existiert mit  $a \in U$ . Der holomorphe Atlas  $\mathcal{A}$  heißt **maximal**, wenn jede Karte  $(U, \varphi)$  auf  $M$ , die mit allen Karten aus  $\mathcal{A}$  holomorph verträglich ist, bereits in  $\mathcal{A}$  enthalten ist.

**10.3 Definition** Jeder maximale holomorphe Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $M$  heißt eine **komplexe Struktur** auf  $M$ .  $M$  versehen mit einer komplexen Struktur  $\mathcal{A}$  heißt eine **komplexe Mannigfaltigkeit** - wir schreiben dafür auch kurz  $M$  und nennen die Elemente von  $\mathcal{A}$  **holomorphe Karten** auf  $M$ . Existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  derart, daß es zu jedem  $a \in M$  eine holomorphe Karte um  $a$  mit Werten in  $\mathbb{C}^n$  gibt, so heißt  $M$  eine (reine)  **$n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit**. Man beachte, daß jede  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit die topologische Dimension  $2n$  besitzt. Jede zusammenhängende 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit heißt eine **Riemannsche Fläche** oder auch eine **komplexe Kurve**.

Man überzeugt sich leicht, daß zu jedem holomorphen Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $M$  genau eine komplexe Struktur  $\tilde{\mathcal{A}}$  auf  $M$  existiert mit  $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$  - wir nennen diese die von  $\mathcal{A}$  **induzierte komplexe Struktur**. In diesem Sinne ist jede offene Teilmenge  $U$  eines komplexen Banachraumes  $E$  eine komplexe Mannigfaltigkeit, wenn wir den aus der einzigen Karte  $(U, \text{id}_U)$  bestehenden Atlas auf  $U$  wählen - allgemeiner erhalten wir für jede komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  auf jeder offenen Teilmenge  $N \subset M$  eine komplexe Struktur, wenn wir die Klasse aller holomorphen Karten  $(U, \varphi)$  von  $M$  mit  $U \subset N$  betrachten (was wir im folgenden stets stillschweigend voraussetzen).

**10.4 Beispiel** Es sei  $M = \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  die Riemannsche Zahlenkugel. Dann ist  $M$  ein Hausdorffraum und  $\mathcal{A} := \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  ein holomorpher Atlas auf  $M$ , wobei  $U = \mathbb{C}, V = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \varphi(z) = z, \psi(z) = 1/z$  gesetzt sei. Aber auch  $\mathcal{B} := \{(U, \bar{\varphi}), (V, \bar{\psi})\}$  ist ein holomorpher Atlas auf  $\hat{\mathbb{C}}$ . Beide Atlanten induzieren verschiedene komplexe Strukturen auf  $\hat{\mathbb{C}}$  (die allerdings in einem gewissen Sinne isomorph sind).

**10.5 Definition** Sind  $M, N$  komplexe Mannigfaltigkeiten, so heißt eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  **holomorph**, wenn für jede holomorphe Karte  $(U, \varphi)$  auf  $M$  und jede holomorphe Karte  $(V, \psi)$  auf  $N$  mit  $f(U) \subset V$  die Abbildung  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  holomorph im bereits bekannten Sinne ist (es handelt sich dabei ja um eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen von Banachräumen).  $\mathcal{H}(M, N)$  sei die Menge aller holomorphen Abbildungen  $M \rightarrow N$ . Die Begriffe **biholomorph** und **lokal-biholomorph** ergeben sich in naheliegender Weise. Mit  $\text{Aut}(M)$  werde die Gruppe aller (biholomorphen) Automorphismen der komplexen Mannigfaltigkeit  $M$  bezeichnet.

Zum Nachweis, daß eine gegebene Abbildung  $f : M \rightarrow N$  holomorph ist, genügt es natürlich auf Grund der Holomorphie der Übergangsfunktionen zu jedem  $a \in M$  holomorphe Karten  $(U, \varphi)$  auf  $M$  und  $(V, \psi)$  auf  $N$  zu finden, so daß  $a \in U, f(U) \subset V$  gilt und  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  holomorph ist. Können zu jedem  $a \in M$  die Karten  $(U, \varphi), (V, \psi)$  mit Werten in  $E, F$  so gewählt werden, daß  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda|_{\varphi(U)}$  für ein  $\lambda \in \mathcal{L}(E, F)$  gilt, so heißt die holomorphe Abbildung  $f : M \rightarrow N$  **lokal-linearisierbar**. Kann sogar für jedes  $a \in M$  die lokale Linearisierung  $\lambda$  so gewählt werden, daß  $E = F \oplus H$  und  $\lambda(v, w) = v$  (bzw.

$F = E \oplus H$  und  $\lambda(z) = (z, 0)$  gilt, so heißt  $f$  eine **Submersion** (bzw. **Immersion**). Ist  $f : M \rightarrow N$  eine Submersion (bzw. Immersion), so existieren also zu jedem  $a \in M$  offene Umgebungen  $U$  von  $a$ ,  $V$  von  $b := f(a)$  und ein  $\sigma \in \mathcal{H}(V, U)$  mit  $f(U) \subset V$ ,  $\sigma(b) = a$  und  $f \circ \sigma = \text{id}_V$  (bzw.  $\sigma \circ f|_U = \text{id}_U$ ) - aus dem Satz über implizite Funktionen (vgl. [3], (10.2.1)) folgt leicht, daß auch diese Bedingung hinreichend ist.

Nützlich für Anwendungen ist die offensichtliche

**10.6 Kürzungsregel** Sind  $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$  stetige Abbildungen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten mit  $f \circ g$  holomorph, so gilt

- (i) Ist  $g$  eine surjektive, holomorphe Submersion, so ist  $f$  holomorph.
- (ii) Ist  $f$  eine holomorphe Immersion, so ist  $g$  holomorph.

Im folgenden seien  $M, N$  stets komplexe Mannigfaltigkeiten. Wir stellen einige einfache Verfahren zusammen, wie daraus neue komplexe Mannigfaltigkeiten gewonnen werden können.

**10.7 Direktes Produkt** Auf  $M \times N$  existiert genau eine komplexe Struktur, so daß für jede komplexe Mannigfaltigkeit  $L$  und je zwei Abbildungen  $f : L \rightarrow M$ ,  $g : L \rightarrow N$  gilt:

$$(f, g) : L \rightarrow M \times N \text{ holomorph} \iff f, g \text{ holomorph} .$$

*Beweis.* Betrachte auf  $M \times N$  alle Karten der Form  $(U \times V, \varphi \times \psi)$ , wobei  $(U, \varphi)$  holomorphe Karte auf  $M$  und  $(V, \psi)$  holomorphe Karte auf  $N$  ist.  $\square$

**10.8 Bereiche über  $M$**  Ist  $D$  ein Hausdorffraum und  $\tau : D \rightarrow M$  eine lokal-topologische Abbildung, so existiert genau eine komplexe Struktur auf  $D$  so, daß  $\tau$  lokal-biholomorph ist.

*Beweis.* Betrachte auf  $D$  alle Karten der Form  $(V, \varphi \circ \tau|_V)$ , wobei  $\tau : V \rightarrow U \subset M$  topologisch ist und  $(U, \varphi)$  eine holomorphe Karte auf  $M$  darstellt.  $\square$

**10.9 Bereiche unter  $M$**  Es sei  $D$  ein Hausdorffraum und  $\tau : M \rightarrow D$  eine surjektive, lokal-topologische Abbildung. Genau dann existiert eine komplexe Struktur auf  $D$  mit  $\tau$  lokal-biholomorph, wenn für alle  $a, b \in M$  mit  $\tau(a) = \tau(b)$  gilt: Es gibt offene Umgebungen  $U$  von  $a$ ,  $V$  von  $b$  und eine biholomorphe Abbildung  $g : U \rightarrow V$  mit  $\tau \circ g = \tau|_U$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe  $\square$

Ist  $\Gamma \subset \text{Aut}(M)$  eine Untergruppe, so können wir den **Quotientenraum**, auch **Bahnenraum** genannt,

$$Q := M/\Gamma := \{\Gamma(a) : a \in M\}$$

bilden, wobei jedes  $\Gamma(a) := \{\gamma(a) : \gamma \in \Gamma\}$  die **Bahn** von  $a$  unter  $\Gamma$  heißt. Die kanonische Projektion  $\pi : M \rightarrow Q$  ist durch  $\pi(a) = \Gamma(a)$  definiert.  $Q$  sei mit der Quotiententopologie versehen (d.h.  $U \subset Q$  ist genau dann offen, wenn  $\pi^{-1}(U) \subset M$  offen ist). Dann ist  $\pi : M \rightarrow Q$  stetig und auch offen (d.h. Bilder offener Mengen sind offen - das ist klar wegen  $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(V)$ ). Wann existiert nun eine komplexe Struktur auf  $Q = M/\Gamma$  so, daß  $\pi$  holomorph ist? Dazu muß natürlich zunächst einmal  $M/\Gamma$  hausdorffsch sein, was leider häufig nicht der Fall ist.

**10.10 Lemma** Besitzen je zwei Punkte  $a, b$  in  $M$  Umgebungen  $U, V$  mit  $\gamma(U) \cap V \neq \emptyset$  für höchstens ein  $\gamma \in \Gamma$ , so ist  $Q = M/\Gamma$  hausdorffsch, und es existiert genau eine komplexe Struktur auf  $Q$ , so daß  $\pi : M \rightarrow Q$  lokal-biholomorph ist.

*Beweis.* Für alle  $a, b \in M$  mit  $\pi(a) \neq \pi(b)$  existieren Umgebungen  $U, V$  mit  $\gamma(U) \cap V = \emptyset$  für alle  $\gamma \in \Gamma$ , d.h.  $\pi(U), \pi(V)$  sind disjunkte Umgebungen von  $\pi(a), \pi(b)$  in  $Q$ , d.h.  $Q$  ist hausdorffsch. Wende nun 10.9 an.  $\square$

Die Voraussetzungen von 10.10 sind z. B. dann erfüllt, wenn  $M = E$  ein komplexer Banachraum und  $\Gamma := \{z \mapsto z + \omega : \omega \in \Omega\}$  für eine diskrete Untergruppe  $\Omega \subset E$  ist. Zum Beispiel für  $E = \mathbb{C}$  und je zwei über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  ist  $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$  diskret und  $\mathbb{C}/\Gamma$  liefert eine komplexe Struktur auf dem Torus  $\mathbb{T}^2$  (die von der Auswahl von  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  abhängt. Man kann zeigen, daß man auf diese Weise überabzählbar viele nicht-isomorphe komplexe Strukturen auf  $\mathbb{T}^2$  erhält).

**10.11 Satz** Für eine Untergruppe  $\Gamma \subset \text{Aut}(M)$  sei  $Q := M/\Gamma$  hausdorffsch und für jedes  $q \in Q$  existiere eine offene Teilmenge  $U \subset M$  zusammen mit einer komplexen Struktur auf  $V := \pi(U)$  so, daß  $q \in V$  und  $\pi : U \rightarrow V$  eine holomorphe Submersion ist. Dann existiert genau eine komplexe Struktur auf  $Q$  so, daß  $\pi : M \rightarrow Q$  eine holomorphe Submersion ist. Zu jedem  $g \in \text{Aut}(M)$  mit  $g\Gamma = \Gamma g$  existiert genau ein  $[g] \in \text{Aut}(Q)$  mit  $\pi \circ g = [g] \circ \pi$ .

*Beweis.* Ist  $\pi : U \rightarrow V$  holomorphe Submersion, so auch  $\pi : \gamma U \rightarrow V$  für jedes  $\gamma \in \Gamma$ , d.h. wir dürfen  $U = \pi^{-1}(V)$  annehmen. Ist  $\tilde{V} \subset Q$  eine andere offene Teilmenge mit einer komplexen Struktur so, daß  $\pi : \pi^{-1}(\tilde{V}) \rightarrow \tilde{V}$  ebenfalls eine holomorphe Submersion ist, erhalten wir auf  $W = V \cap \tilde{V}$  zwei komplexe Strukturen  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ . Wegen 10.6 ist jedoch die identische Abbildung  $(W, \mathcal{A}_1) \rightarrow (W, \mathcal{A}_2)$  biholomorph, d.h.  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ , und wir erhalten eine komplexe Struktur auf  $Q$  mit den verlangten Eigenschaften.  $\square$

Eine wichtige Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten bilden die projektiven Räume. Wir gehen aus von einem komplexen Banachraum  $E$  und setzen  $E^* := E \setminus \{0\}$ . Für jedes  $z \in E^*$  ist dann  $[z] := \mathbb{C}z \subset E$  die komplexe Gerade durch  $z$  und  $0 \in E$ . Die Gesamtheit

$$\mathbb{P}(E) := \{[z] : z \in E^*\}$$

aller derartigen Geraden in  $E$  heißt der **projektive Raum** von  $E$ . Als Menge kann  $\mathbb{P}(E)$  offenbar mit  $E^*/\mathbb{C}^*$  identifiziert werden, wobei  $\mathbb{C}^*$  in natürlicher Weise mit der Untergruppe  $\{z \mapsto tz : t \in \mathbb{C}^*\}$  von  $\text{Aut}(E^*)$  identifiziert sei. Die kanonische Projektion  $\pi : E^* \rightarrow \mathbb{P}(E)$  wird dann gerade durch  $\pi(z) = [z]$  gegeben. Ist  $S := \{z \in E : \|z\| = 1\}$  die Einheitskugel von  $E$ , so erhalten wir durch

$$d([z], [w]) := \inf \{ \|x - y\| : x \in (S \cap [z]), y \in (S \cap [w]) \}$$

eine Metrik und damit insbesondere eine hausdorffsche Topologie auf  $\mathbb{P}(E)$ . Sei jetzt eine Linearform  $\lambda \in E'$  mit  $\lambda \neq 0$  fest gewählt. Der Kern  $H := \lambda^{-1}(0)$  ist eine abgeschlossene Hyperebene von  $E$  und damit selbst ein komplexer Banachraum. Ebenso ist  $\lambda^{-1}(1)$  eine affine Hyperebene von  $E$ . Zeichnen wir einen Punkt  $e$  darin aus, so kann auch  $\lambda^{-1}(1)$  als Banachraum angesehen werden – identifiziere  $\lambda^{-1}(1)$  mit  $H$  vermöge  $z \mapsto (z - e)$ . Nun ist  $U := \pi(E \setminus H) = \{[z] \in \mathbb{P}(E) : \lambda(z) \neq 0\}$  offen in  $\mathbb{P}(E)$ , und  $\varphi(z) := z/\lambda(z)$  definiert einen Homöomorphismus  $\varphi : U \rightarrow \lambda^{-1}(1)$ , d.h.  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  ist eine Karte auf  $\mathbb{P}(E)$  für  $U_\lambda := U$  und  $\varphi_\lambda := \varphi$ . Ist  $(U_\mu, \varphi_\mu)$  eine weitere Karte dieser Form, so gilt  $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) = \{[z] \in U_\lambda : \mu(z) \neq 0\}$ , und die Übergangsfunktion  $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$  wird gerade durch  $z \mapsto z/\mu(z)$  gegeben, beide Karten sind also holomorph verträglich. Wegen Hahn-Banach (vergl. A.3) überdecken alle  $U_\lambda$  ganz  $\mathbb{P}(E)$ , und wir erhalten damit einen holomorphen Atlas auf  $\mathbb{P}(E)$ . Wegen  $\mathbb{P}(E) = \pi(E^*)$  und  $E^*$  zusammenhängend ist auch die komplexe Mannigfaltigkeit  $\mathbb{P}(E)$  zusammenhängend. Zudem ist die kanonische Projektion  $\pi : E^* \rightarrow \mathbb{P}(E)$  eine holomorphe Submersion, denn

$$\begin{array}{ccc} E \setminus H & \xrightarrow{\varphi \times \lambda} & K \times \mathbb{C}^* \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{\varphi} & K \end{array} \quad ,$$

ist ein kommutatives Diagramm, wobei die waagerechten Pfeile biholomorph sind und  $H = \lambda^{-1}(0)$ ,  $K = \lambda^{-1}(1)$ ,  $U = U_\lambda$ ,  $\varphi = \varphi_\lambda$  gesetzt sei.

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  heißt  $\mathbb{P}_n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$  der  **$n$ -dimensionale projektive Raum** über  $\mathbb{C}$ . Da  $\mathbb{C}^{n+1}$  die Dimension  $n + 1$  besitzt, werden für einen holomorphen Atlas der obigen Form mindestens  $n + 1$  Karten benötigt. Bequem sind etwa die folgenden: Für jedes  $i = 0, \dots, n$  sei

$$U_i := \{[z] \in \mathbb{P}_n : z_i \neq 0\}$$

und  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  definiert durch

$$\varphi_i[z_0, z_1, \dots, z_n] = \left( \frac{z_0}{z_i}, \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right).$$

Dann ist  $\{(U_i, \varphi_i) : 0 \leq i \leq n\}$  ein holomorpher Atlas auf  $\mathbb{P}_n$ . Wegen  $S \subset \mathbb{C}^{n+1}$  kompakt ist  $\mathbb{P}_n$  kompakt. Speziell für  $n = 1$  ist  $\{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1)\}$  ein holomorpher Atlas auf  $\mathbb{P}_1$ , und für die Übergangsfunktion auf  $\mathbb{C}^*$  gilt  $\varphi_1 \varphi_0^{-1}(z) = 1/z$ . Identifizieren wir  $U_0 = \{[1, z] : z \in \mathbb{C}\}$  vermöge  $\varphi_0$  mit  $\mathbb{C}$ , so besteht das Komplement in  $\mathbb{P}_1$  aus dem einzigen Punkt  $\infty := [0, 1] \in \mathbb{P}_1$ . Die **komplex projektive Gerade**  $\mathbb{P}_1$  ist also nichts anderes als die Riemannsche Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**10.12 Übungsaufgabe** Es seien  $E, F$  komplexe Banachräume  $\neq 0$ . Man zeige:

- (i) Für jedes stetige homogene Polynom  $f : E \rightarrow F$  mit  $f^{-1}(0) = \{0\}$  definiert  $[z] \mapsto [f(z)]$  eine holomorphe Abbildung  $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(F)$  der zugehörigen projektiven Räume.
- (ii) Für je zwei Punkte  $a, b \in \mathbb{P}(E)$  existiert eine holomorphe Abbildung  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}(E)$  mit  $a, b \in f(\widehat{\mathbb{C}})$ .
- (iii)  $\mathbb{P}(E)$  ist zusammenhängend und jede holomorphe Funktion auf  $\mathbb{P}(E)$  ist konstant.
- (iv)  $\mathbb{P} : \text{GL}(E) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(E))$  ist ein Gruppenhomomorphismus. Bestimme den zugehörigen Kern.

Man kann zeigen, daß der Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{P} : \text{GL}(E) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}(E))$  surjektiv ist, d.h. also, daß  $\text{Aut}(\mathbb{P}(E)) = \mathbb{P}\text{GL}(E) \cong \text{GL}(E)/\mathbb{C}^*\text{id}$  gilt, vergl. [12].

**10.13 Satz** Für jeden komplexen Banachraum  $E$  ist der zugehörige projektive Raum  $M = \mathbb{P}(E)$  eine **homogene komplexe Mannigfaltigkeit**, d.h. die Gruppe  $\text{Aut}(M)$  operiert transitiv auf  $M$  (vergl. Definition 11.13).

*Beweis.* Seien  $[a], [b] \in M$  gegeben. Dann hat  $E$  die Darstellung  $E = H \oplus K$  mit  $K = [a] + [b]$ . Wähle ein  $g \in \text{GL}(E)$  mit  $g|_H = \text{id}$  und  $g(a) = b$ .  $\square$

Wir wollen uns noch etwas genauer die Wirkung von  $\mathbb{P}\text{GL}(E)$  auf  $\mathbb{P}(E)$  anschauen. Dazu sei ein  $\lambda \in E'$  und ein  $e \in E$  mit  $\lambda(e) = 1$  fest gewählt. Dann hat  $E$  die Darstellung  $E = H \oplus [e]$ , wobei  $H = \lambda^{-1}(0)$  der Kern von  $\lambda$  ist. Identifizieren wir jedes  $z \in H$  mit dem Punkt  $[z \oplus e] \in \mathbb{P}(E)$ , können wir also  $H \subset \mathbb{P}(E)$  als offene Teilmenge auffassen. Dabei heißt  $z$  auch **inhomogene Koordinate** des projektiven Raumes (diese wird singulär auf der **unendlich fernen Hyperebene**  $\mathbb{P}(E) \setminus H \cong \mathbb{P}(H)$ ). Jedes  $g \in \text{GL}(E)$  hat eine Zerlegung als Blockmatrix

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei  $a \in \mathcal{L}(H)$ ,  $b \in H$ ,  $c \in H'$  und  $d \in \mathbb{C}$ . Also bildet  $\mathbb{P}(g)$  den Punkt  $[z \oplus e] \in H$  in den Punkt  $[(az+b) \oplus (cz+d)e] \in \mathbb{P}(E)$  ab, beschreibt sich also in der inhomogenen Koordinate  $z \in H$  als **gebrochen lineare Transformation**

$$(10.14) \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

## 11. Invariante Metriken

Im folgenden seien  $M, N$  komplexe Mannigfaltigkeiten und  $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$  das Einheitsintervall. Eine glatte Kurve in  $M$  ist eine stetig-differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$ , d.h., daß für jede holomorphe Karte  $(U, \varphi)$  auf  $M$  mit  $J := \gamma^{-1}(U) \neq \emptyset$  die Abbildung  $\varphi \circ \gamma : J \rightarrow E$  stetig differenzierbar ist. Zwei glatte Kurven  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$  heißen **tangentiell** im Anfangspunkt ( $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ), wenn  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  und  $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$  für eine (und damit jede) holomorphe Karte  $(U, \varphi)$  um  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \in M$  gilt. Wir erhalten damit auf dem Raum  $\mathcal{K}$  aller glatten Kurven in  $M$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$ . Die Elemente von

$$TM := \mathcal{K}/\sim$$

heißen **Tangentialvektoren** an  $M$ . Ist  $\gamma \in \mathcal{K}$  und  $v := [\gamma]$  der zugehörige Tangentialvektor, so heißt  $\pi(v) := \gamma(0) \in M$  der **Fußpunkt** von  $v$ . Damit erhalten wir eine surjektive Abbildung  $\pi : TM \rightarrow M$ .  $T_a M := \pi^{-1}(a)$  heißt der **Tangentialraum** in  $a$  an  $M$ . Ist  $f : M \rightarrow N$  eine holomorphe Abbildung, so ist für jede glatte Kurve  $\gamma$  in  $M$  auch die Bildkurve  $f \circ \gamma$  in  $N$  glatt und durch  $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$  wird eine Abbildung  $Tf$  induziert, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

kommutiert. Offenbar gilt  $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$  und  $T(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$ , d.h.  $T$  ist ein kovarianter Funktor. Für jedes  $a \in M$  und  $b := f(a) \in N$  ist die Einschränkung  $T_a f$  von  $Tf$  auf den Tangentialraum  $T_a M$  eine Abbildung  $T_a f : T_a M \rightarrow T_b N$ . Ist  $U \subset M$  eine offene Teilmenge und  $\iota : U \hookrightarrow M$  die kanonische Injektion, so ist  $T\iota : TU \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset TM$  eine Bijektion. Wir wollen  $TU$  mit  $\pi^{-1}(U) \subset TM$  in diesem Sinne identifizieren.

Ist  $E$  ein komplexer Banachraum und  $U \subset E$  offen, so identifizieren wir  $TU$  mit  $U \times E$  vermöge  $[\gamma] \leftrightarrow (\gamma(0), \gamma'(0))$ . In diesem Fall ist also  $TU$  selbst eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $T_a U$  ein komplexer Banachraum für jedes  $a \in U$ . Die kanonische Projektion  $\pi : TU \rightarrow U$  ist zudem eine holomorphe Submersion. Ist  $f : U \rightarrow V$  eine holomorphe Abbildung in eine offene Teilmenge  $V$  des komplexen Banachraumes  $F$ , so wird die Abbildung

$$Tf : U \times E \rightarrow V \times F$$

gerade durch  $(a, x) \mapsto (f(a), df(a)x)$  gegeben – insbesondere ist  $Tf = f \times df$  holomorph und  $T_a f : T_a U \rightarrow T_b V$  für jedes  $a \in U$ ,  $b := f(a) \in V$  eine stetige lineare Abbildung.

Wir wollen dieses nun auf beliebige komplexe Mannigfaltigkeiten  $M, N$  und holomorphe Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  übertragen: Es existiert genau eine Topologie auf  $TM$  so, daß für jede holomorphe Karte  $(U, \varphi)$  auf  $M$  mit Werten in  $E$  die Teilmenge  $TU \subset TM$  offen und  $T\varphi : TU \rightarrow TE$  lokal-topologisch ist. Diese Topologie ist hausdorffsch,  $(TU, T\varphi)$  ist daher eine Karte auf  $TM$  mit Werten in  $E \times E$ . Alle Karten von dieser Form liefern einen holomorphen Atlas auf  $TM$  und damit eine komplexe Struktur auf  $TM$ . Wir fassen zusammen:

**11.1 Satz** Für jede komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  ist auch das Tangentialbündel  $TM$  eine komplexe Mannigfaltigkeit, und  $\pi : TM \rightarrow M$  ist eine holomorphe Submersion. Für jedes  $a \in M$  ist  $T_aM$  ein komplexer topologischer Vektorraum. Für jede holomorphe Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist  $Tf : TM \rightarrow TN$  holomorph, und  $T_af : T_aM \rightarrow T_{f(a)}N$  ist stetig linear für jedes  $a \in M$ .

Man beachte jedoch, daß zwar jede holomorphe Karte um  $a \in M$  auf dem Tangentialraum  $T_aM$  die Struktur eines komplexen Banachraumes induziert, daß aber nur die Topologie dieses Banachraumes invariant gegen Kartenwechsel ist (nicht die Norm selbst).

Betrachten wir eine glatte Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$ . Dann ist im Anfangspunkt  $\gamma(0)$  der zugehörige Tangentialvektor  $[\gamma] \in T_{\gamma(0)}M$  definiert, den wir auch mit  $\dot{\gamma}(0)$  bezeichnen wollen. Allgemeiner liefert  $\gamma$  für jedes  $t \in I$  einen Tangentialvektor  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$  in der folgenden Weise: Wir dürfen annehmen (verwende lokal holomorphe Karten), daß  $M$  offen in einem komplexen Banachraum  $E$  liegt. Dann ist  $T_{\gamma(t)}M \cong E$ , und wir setzen  $\dot{\gamma}(t) := d\gamma(t)/dt$ . Hätte man für jeden Tangentialvektor  $\dot{\gamma}(t)$ ,  $t \in I$ , eine Länge, könnte durch Aufintegrieren aller dieser Längen die Bogenlänge von  $\gamma$  definiert werden. Längen von Tangentialvektoren erhält man auf Mannigfaltigkeiten nur als zusätzliche Struktur:

**11.2 Definition** Eine Abbildung  $\mu : TM \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Pseudonorm** auf  $TM$ , falls gilt

- (i)  $\mu \geq 0$
- (ii)  $\mu$  ist lokal-beschränkt
- (iii)  $\mu(tv) = |t|\mu(v)$  für alle  $t \in \mathbb{C}$  und  $v \in TM$ .

Gilt zusätzlich die Dreiecksungleichung

- (iv)  $\mu(v + w) \leq \mu(v) + \mu(w)$  für alle  $v, w \in TM$  mit  $\pi(v) = \pi(w)$ ,

so heißt  $\mu$  eine **Seminorm** auf  $TM$ .

Eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer Pseudonorm  $\mu$  auf  $TM$  heißt eine **pseudonormierte Mannigfaltigkeit** – statt  $(M, \mu)$  schreiben wir auch häufig nur  $M$ . Ist dann  $\gamma : I \rightarrow M$  eine glatte (oder allgemeiner eine stückweise glatte) Kurve in  $M$ , so ist  $\mu \circ \dot{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und

$$L_\mu(\gamma) := \inf \left\{ \int_0^1 h(t) dt : h \geq \mu \circ \dot{\gamma} \text{ integrierbar auf } I \right\}$$

heißt die  **$\mu$ -Bogenlänge** von  $\gamma$ . Für alle  $a, b \in M$  setzen wir

$$d(a, b) := \inf \{ L_\mu(\gamma) : \gamma(0) = a, \gamma(1) = b \} \in \mathbb{R} .$$

Man zeigt unschwer, daß  $d = d_\mu$  eine stetige Pseudometrik auf  $M$  ist (d.h.  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und  $0 \leq d(a, b) = d(b, a) \leq d(a, c) + d(c, b)$  für alle  $a, b, c \in M$ ).

Sind  $(M, \mu)$  und  $(N, \nu)$  pseudonormierte komplexe Mannigfaltigkeiten, so ist für jede holomorphe Abbildung  $f : M \rightarrow N$  auch  $f^*(\nu) := \nu \circ Tf$  eine Pseudonorm auf  $TM$ .  $f$  heißt **kontraktiv** (bzw. **isometrisch**), wenn  $\mu \geq f^*(\nu)$  (bzw.  $\mu = f^*(\nu)$ ) gilt. Für jede stückweise glatte Kurve  $\gamma$  in  $M$  ist auch  $f \circ \gamma$  eine stückweise glatte Kurve in  $N$ , und es gilt dann  $L_\mu(\gamma) \geq L_\nu(f \circ \gamma)$  (bzw.  $L_\mu(\gamma) = L_\nu(f \circ \gamma)$ ).

**11.3 Beispiel** Es seien  $E$  ein komplexer Banachraum und  $U \subset E$  ein Gebiet. Durch  $\varepsilon(v) := \|x\|$  für jedes  $v = (a, x) \in U \times E = TU$  wird dann auf  $TU$  die **euklidische (Pseudo)Norm** definiert.  $L_\varepsilon(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt$  ist dann die euklidische Bogenlänge von  $\gamma$ . Ist  $U \subset E$  sogar konvex, so gilt  $d_\varepsilon(a, b) = \|a - b\|$  für alle  $a, b \in U$ .

**11.4 Definition** Die Pseudonorm  $\mu : TM \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Finslermetrik** auf  $M$ , wenn zu jedem  $a \in U$  eine holomorphe Karte  $(U, \varphi)$  um  $a$  und eine Konstante  $c > 0$  existiert, so daß  $\mu|_{TU} \geq c \varphi^*(\varepsilon)$  für die euklidische Norm  $\varepsilon$  auf  $\varphi(U)$  gilt. Gilt für  $\mu$  zusätzlich die Dreiecksungleichung 11.2.iv, so heißt  $\mu$  auch eine **Norm** auf  $TM$ . In diesem Fall ist für jedes  $a \in M$  die Einschränkung von  $\mu$  auf den Tangentialraum

$T_a M$  eine vollständige Norm auf  $T_a M$ .  $M$  zusammen mit einer Norm auf  $TM$  heißt eine **normierte Mannigfaltigkeit**.

Wir betrachten nun den Einheitskreis  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  und holomorphe Abbildungen  $h : \mathbb{D} \rightarrow M$  im Ursprung  $0 \in \mathbb{D}$ , wobei  $M$  eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit sei. Wir identifizieren den Tangentialraum  $T_0 \mathbb{D}$  mit  $\mathbb{C}$  vermöge  $(0, t) \leftrightarrow t$  und bezeichnen für jeden Tangentialvektor  $v \in TM$  mit  $\kappa(v)$  das Infimum über alle  $s \geq 0$ , so daß  $v = T_0 h(s)$  für ein  $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, M)$  gilt. Damit ist  $\kappa = \kappa_M : TM \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert und erfüllt  $\kappa \geq 0$  wie auch  $\kappa(tv) = |t|\kappa(v)$  für alle  $t \in \mathbb{C}$  und  $v \in TM$ . Ist  $f : M \rightarrow N$  holomorph, so gilt für alle  $v \in TM$  und  $w := Tf(v) \in TN$  die Ungleichung  $\kappa_N(w) \leq \kappa_M(v)$ , denn für jedes  $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, M)$  und  $s \geq 0$  mit  $T_0 h(s) = v$  ist auch  $T_0(f \circ h)(s) = w$ , d.h.  $f^*(\kappa_N) \leq \kappa_M$ . Ist  $f$  biholomorph, so gilt insbesondere  $f^*(\kappa_N) = \kappa_M$ .

**11.5 Beispiel** Für  $M = \mathbb{D}$  und  $\omega := \kappa_{\mathbb{D}}$  gilt auf  $T\mathbb{D} = \mathbb{D} \times \mathbb{C}$

$$\omega(a, t) = \frac{|t|}{1 - a\bar{a}}.$$

*Beweis.* Ist  $v = (0, t) \in T_0 \mathbb{D}$  und  $T_0 h(s) = v$  für  $s, t \geq 0$  und  $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , so gilt also  $h(0) = 0$  und somit  $s \geq t$  auf Grund des Schwarzschen Lemmas, d.h.  $\omega(v) \geq t$ . Für  $h(z) \equiv z$  gilt  $T_0 h(t) = v$ , d.h.  $\omega(v) \leq t$ , also  $\omega(v) = t$ . Sei nun  $a \in \mathbb{D}$  beliebig und  $v = (a, t) \in T_a \mathbb{D}$ . Dann definiert  $g(z) = (z + a)/(\bar{a}z + 1)$  ein  $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  mit  $g(0) = a$  und  $g'(0) = 1 - a\bar{a}$ , d.h. für  $w = (0, t/(1 - a\bar{a})) \in T_0 \mathbb{D}$  gilt  $Tg(w) = v$ , d.h.  $\omega(v) = \omega(w) = |t|/(1 - a\bar{a})$ . Da die Drehungen um 0 isometrisch sind, folgt die Behauptung.  $\square$

$\omega$  ist also insbesondere eine stetige Norm auf  $T\mathbb{D}$ , man nennt  $\omega$  auch die **Poincaré-Metrik** auf  $\mathbb{D}$ .

**11.6 Beispiel** Es sei  $E$  ein komplexer Banachraum und  $B$  die offene Einheitskugel. Dann gilt für jedes  $x \in E$  und den Tangentialvektor  $v := (0, x) \in T_0 B$

$$\kappa_B(v) = \|x\|.$$

*Beweis.* Wegen 11.2.iii genügt es, den Spezialfall  $\|x\| = 1$  zu betrachten. Dann definiert  $f(t) = tx$  eine holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{D} \rightarrow B$ , und wegen (A.3) existiert ein  $\lambda \in E'$  mit  $\|\lambda\| \leq 1 = \lambda(x)$ . Folglich ist  $g := \lambda|_B$  eine holomorphe Abbildung  $g : B \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{D}}$ , und die Behauptung folgt aus dem

**11.7 Hilfssatz** Es seien  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M$  holomorphe Abbildungen mit  $g \circ f = \text{id}_M$ . Dann gilt

$$\kappa_M(v) = \kappa_N(w)$$

für alle  $v \in TM$  und  $w := Tf(v)$ .

*Beweis.* Klar wegen  $\kappa_M(v) \geq \kappa_N(Tf(v)) \geq \kappa_M(Tg(Tf(v))) = \kappa_M(v)$ .  $\square$

**11.8 Folgerung** Für jede komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $\kappa_M$  lokal-beschränkt auf  $TM$ .

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß  $M$  offen in einem komplexen Banachraum  $E$  ist. Ist dann  $a \in M$ , so existiert ein  $r > 0$  mit  $B_{2r}(a) \subset M$ . Für die offene Einheitskugel  $B := B_1(0) \subset E$  und jedes  $b \in U := B_r(a)$  definiert dann  $f(x) := b + rx$  eine holomorphe Abbildung  $f : B \rightarrow M$ , also  $\kappa_M(b, x) \leq \kappa_B(0, x/r) = \|x\|/r$  für alle  $(b, x) \in U \times E$ . Sei nun  $M$  eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit und  $(U, \varphi)$  eine  $E$ -wertige holomorphe Karte auf  $M$ . Dann ist  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  biholomorph und somit  $\kappa_U$  lokal-beschränkt auf  $TU$ . Wegen  $\kappa_M|_{TU} \leq \kappa_U$  ist somit auch  $\kappa_M$  lokal-beschränkt auf  $TU$ .  $\square$

Wir fassen unsere bisherigen Überlegungen zusammen:

**11.9 Satz** Für jede komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $\kappa_M$  die größte Pseudonorm auf  $TM$  derart, daß jede holomorphe Abbildung  $h : \mathbb{D} \rightarrow M$  kontraktiv ist, wenn  $\mathbb{D}$  mit der Poincaré-Metrik  $\omega$  versehen wird. Jede holomorphe (bzw. biholomorphe) Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist kontraktiv (bzw. isometrisch) bezüglich  $\kappa_M, \kappa_N$ .

Wir nennen  $\kappa_M$  die **Kobayashi-Pseudonorm** auf  $TM$ . Es kann durchaus vorkommen, daß  $\kappa_M \equiv 0$  gilt: Aus dem Beweis von 11.8 folgt sofort  $\kappa_E \equiv 0$  für jeden komplexen Banachraum  $E$  (denn  $\kappa_E(a, x) \leq \|x\|/r$  für alle  $r > 0$ ).

Ist  $\mu$  eine Pseudonorm auf  $TM$  und  $a \in M$ , so heißt  $\{v \in T_a M : \mu(v) < 1\}$  die **Indikatrix** von  $\mu$  in  $a$ . Offenbar gilt für  $\mu$  die Dreiecksungleichung 11.2.iv genau dann, wenn jede Indikatrix konvex ist (d.h.  $\mu$  ist eine Seminorm auf  $TM$ ). Das ist für  $\mu = \kappa_M$  im allgemeinen nicht der Fall. Dazu betrachte man die

**11.10 Übungsaufgabe** *Es sei*

$$D := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |zw| < r\}$$

für festes  $0 < r < 1$  und  $B \subset T_0 D \approx \mathbb{C}^2$  die Indikatrix von  $\kappa_D$  im Ursprung. Man zeige  $B = D$ . Insbesondere ist also  $B$  nicht konvex. (Hinweis: Man finde für jedes  $h \in \mathbb{ID}$  mit  $|z^2 h(z)| \leq r$  eine Abschätzung von  $|h(0)|$ .)

Für jede holomorphe Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{ID}$  gilt wegen 11.9 insbesondere  $f^*(\omega) \leq \kappa_M$  und damit auch

$$\gamma_M := \sup \{f^*(\omega) : f \in \mathcal{H}(M, \mathbb{ID})\} \leq \kappa_M .$$

$\gamma_M$  ist eine Seminorm auf  $TM$ , genannt **Carathéodory-Seminorm**. Dual zu 11.9 gilt offenbar

**11.11 Satz** *Die Carathéodory-Seminorm  $\gamma_M$  ist die kleinste Pseudonorm auf  $TM$  derart, daß jede holomorphe Abbildung  $h : M \rightarrow \mathbb{ID}$  kontraktiv ist, wenn  $\mathbb{ID}$  mit der Poincaré-Metrik  $\omega$  versehen wird. Jede holomorphe (bzw. biholomorphe) Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist kontraktiv (bzw. isometrisch) bezüglich  $\gamma_M, \gamma_N$ .*

Wie in 11.5 zeigt man, daß  $\gamma_{\mathbb{ID}} = \kappa_{\mathbb{ID}} = \omega$  gilt. Analog zu 11.6 gilt ferner

**11.12 Bemerkung** Ist  $B$  die offene Einheitskugel des komplexen Banachraumes  $E$ , so stimmen  $\kappa_B$  und  $\gamma_B$  auf dem Tangentialraum  $T_0 B$  überein.

**11.13 Definition** Die komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  heißt **homogen**, wenn für je zwei Punkte  $a, b \in M$  ein biholomorpher Automorphismus  $g \in \text{Aut}(M)$  mit  $b = g(a)$  existiert (vergl. Satz 10.13).

Offenbar ist das direkte Produkt homogener komplexer Mannigfaltigkeiten wieder homogen, insbesondere ist also der **Einheitspolyzylinder**

$$\mathbb{ID}^n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1 \text{ für } 1 \leq j \leq n\}$$

homogen. Aus 11.12 ergibt sich unmittelbar

**11.14 Folgerung** *Ist die offene Einheitskugel  $B$  des komplexen Banachraums  $E$  homogen, so gilt*

$$\gamma_B = \kappa_B .$$

Besser gilt sogar

**11.15 Übungsaufgabe** *Ist die offene Einheitskugel  $B$  des komplexen Banachraumes  $E$  homogen und  $\mu$  eine Pseudonorm auf  $TB$  mit  $f^*(\mu) \leq \mu$  für alle  $f \in \mathcal{H}(B, B)$ , so gilt  $\mu = c \kappa_B$  für eine geeignete Konstante  $c \geq 0$ .*

**11.16 Lemma** *Ist  $D$  ein beschränktes Gebiet in einem komplexen Banachraum, so ist  $\gamma_D$  eine Norm auf  $TD$  und  $\kappa_D$  eine Finslermetrik auf  $D$ .*

*Beweis.* Wähle ein  $r > 0$  mit  $D \subset B_r(a)$  für alle  $a \in D$ . Für die euklidische Norm  $\varepsilon$  gilt dann  $\kappa_D \geq \varepsilon/r$  auf  $TD$ . □

Die Kobayashi-Pseudonorm verhält sich besonders angenehm bezüglich direkten Produkten:

**11.17 Satz** *Es seien  $M, N$  komplexe Mannigfaltigkeiten und  $p : M \times N \rightarrow M$  sowie  $q : M \times N \rightarrow N$  die kanonischen Projektionen. Dann gilt*

$$\kappa_{M \times N} = \max (p^*(\kappa_M), q^*(\kappa_N)) .$$

*Beweis.* Die Abbildung

$$(Tp, Tq) : T(M \times N) \rightarrow TM \times TN$$

ist biholomorph und induziert für jedes  $(a, b) \in M \times N$  einen linearen Isomorphismus

$$T_{(a,b)}(M \times N) \rightarrow T_a M \oplus T_b N .$$

Wir wollen im folgenden diese Räume entsprechend identifizieren. Sei

$$\mu := \max (p^*(\kappa_M), q^*(\kappa_N)) .$$

Wegen  $p, q$  kontraktiv gilt  $\kappa_{M \times N} \geq \mu$ . Angenommen, es gilt nicht die Gleichheit: Dann existieren  $v \in T_a M$ ,  $w \in T_b N$  und ein  $0 \leq s < \kappa_{M \times N}(v, w)$  zusammen mit holomorphen Abbildungen  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$ ,  $g : \mathbb{D} \rightarrow N$  so, daß  $T_0 f(s) = v$ ,  $T_0 g(s) = w$  gilt. Dann ist aber  $h := (f, g) : \mathbb{D} \rightarrow M \times N$  holomorph mit  $T_0 h(s) = (v, w)$  im Gegensatz zur Wahl von  $s$ . Also gilt doch  $\kappa_{M \times N} = \mu$ .  $\square$

Wir wollen im folgenden drei Anwendungen betrachten:

**11.18 Lemma** *Es seien  $D \subset E$  ein beschränktes Gebiet und  $f : D \rightarrow D$  eine holomorphe Abbildung. Dann gilt (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) für die folgenden Aussagen*

- (i)  $f(D)$  hat positiven Randabstand in  $D$ , d.h.  $\delta := \inf \{\|x - y\| : x \in f(D), y \in E \setminus D\} > 0$ .
- (ii)  $f$  hat einen Fixpunkt  $a \in D$  und für eine geeignete äquivalente Norm auf  $E$  gilt  $\|df(a)\| < 1$ .
- (iii) Die Folge der Iterierten  $f^n$  konvergiert lokal-gleichmäßig auf  $D$  gegen eine konstante Abbildung  $h : D \rightarrow D$ .

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sei  $\mu = \kappa_D$  und  $d = d_\mu$  die zugehörige Metrik auf  $D$ . Es existiert ein  $r > 0$  mit  $D \subset B_r(a)$  für alle  $a \in D$ . Für die euklidische Norm  $\varepsilon$  auf  $TD = D \times E$  gilt dann  $\mu \geq \varepsilon/r$  (wegen 11.6) und damit auch  $d(x, y) \geq \|x - y\|/r$  für alle  $x, y \in D$ . Ist der Tangentialvektor  $v = (c, x) \in TD$  beliebig aber fest gewählt, so gilt für  $t := \delta/r$  und  $s := (1+t)^{-1}$

$$t\|f(z) - f(c)\| < tr = \delta$$

d.h.

$$(11.19) \quad g(z) := f(z) + t(f(z) - f(c))$$

definiert eine holomorphe Abbildung  $g : D \rightarrow D$ . Für diese gilt  $g(c) = f(c)$  und  $dg(c) = (1+t)df(c)$ , d.h. für  $w := T_c g(v) = (g(c), dg(c)x)$  gilt  $sw = T_c f(v)$ . Wegen  $\mu(w) \leq \mu(v)$  gilt also  $f^*(\mu)(v) \leq s\mu(v)$  und damit  $f^*(\mu) \leq s\mu$ , da  $v$  beliebig gewählt war. Aber damit gilt dann auch

$$d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y)$$

für alle  $x, y \in D$ . Wählen wir  $a_0 \in D$  fest, so definiert  $a_{n+1} = f(a_n)$  eine Cauchy-Folge  $(a_n)$  bezüglich  $d$  und damit auch bezüglich der Norm von  $E$ . Folglich existiert  $a := \lim a_n \in E$ . Wegen  $\delta > 0$  gilt sogar  $a \in D$ , und  $a = \lim a_{n+1} = \lim f(a_n) = f(a)$  ist ein Fixpunkt von  $f$ . Definieren wir die holomorphe Abbildung  $g : D \rightarrow D$  für  $c := a$  durch (11.19) und ersetzen die Norm von  $E \cong T_a D$  durch die äquivalente Norm  $\gamma_D|_{T_a D}$ , so gilt  $\|dg(a)\| \leq 1$  und damit  $\|df(a)\| = s\|dg(a)\| < 1$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Wir dürfen  $f(a) = a$  und  $\|df(a)\| < 1$  für die Norm von  $E$  annehmen. Dann existieren  $0 < r, s < 1$  mit  $U := B_r(a) \subset D$  und  $\|df(z)\| \leq s$  für alle  $z \in U$ . Für  $z \in U$  fest und  $\lambda := \int_0^1 df(a + t(z-a)) dt \in \mathcal{L}(E)$  gilt dann auch  $\|\lambda\| \leq s$  und folglich

$$\|f(z) - f(a)\| = \|\lambda(z-a)\| \leq s\|z-a\|.$$

Bezeichnen wir mit  $\Omega$  die größte offene Teilmenge von  $D$ , so daß  $f^n|\Omega$  für  $n \rightarrow \infty$  lokal-gleichmäßig gegen die konstante Abbildung  $z \mapsto a$  konvergiert, so gilt  $U \subset \Omega$  und insbesondere  $\Omega \neq \emptyset$ . Da die Metriken  $d(x, y)$  und  $\|x - y\|$  topologisch äquivalent auf  $D$  sind, existiert ein  $\rho > 0$  mit  $V := \{z \in D : d(a, z) < \rho\} \subset U$ . Angenommen,  $b$  ist ein Häufungspunkt von  $\Omega$  in  $D$ . Dann existiert ein  $w \in \Omega$  mit  $d(b, w) < \rho/2$  und ein  $m > 0$  mit  $d(a, f^m(w)) < \rho/2$  und somit  $d(a, f^m(b)) \leq d(a, f^m(w)) + d(f^m(b), f^m(w)) < \rho$ , d.h. es existiert eine Umgebung  $W \subset D$  von  $b$  mit  $f^m(W) \subset U$ . Dann aber konvergiert die Folge  $f^n|W$  lokal-gleichmäßig auf  $W$  gegen die konstante Abbildung  $\equiv a$ , was  $b \in \Omega$  und schließlich  $\Omega = D$  impliziert.  $\square$

Als weitere Anwendung zeigen wir

**11.20 Satz** *Es seien  $H$  ein komplexer Hilbertraum mit offener Einheitskugel  $B$  und  $D \subset H$  ein Gebiet mit*

$$B \subset D \subset rB$$

für ein  $r \geq 1$ . Ist dann  $D$  biholomorph äquivalent zu einem direkten Produkt  $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$  komplexer Mannigfaltigkeiten  $D_j$  positiver Dimension, so gilt  $n \leq r^2$ . Insbesondere ist  $D$  irreduzibel (d.h. nicht äquivalent zu einem direkten Produkt  $D_1 \times D_2$  komplexer Mannigfaltigkeiten  $D_1, D_2$  positiver Dimension), wenn  $r < \sqrt{2}$  gilt.

*Beweis.* Sei  $U = T_0 D$  und  $\nu := \kappa_D|U$ . Dann gilt für  $U_i := T_0 D_i$

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

und  $\nu(z) = \max_i \nu(z_i)$  für  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U$ . Die Norm  $\| \cdot \|$  von  $H$  wird durch ein inneres Produkt  $( \cdot | \cdot )$  gegeben (d.h.  $(x|y)$  ist linear in  $x$ , antilinear in  $y$  und  $\|z\|^2 = (z|z)$ ). Wegen  $B \subset D \subset rB$  gilt  $r^{-1}\| \cdot \| \leq \nu \leq \| \cdot \|$ . Definiere induktiv Elemente  $z_i \in U_i$  mit  $\nu(z_i) = 1$  und  $\operatorname{Re}(z^i|z_i) \geq 0$  für alle  $i > 1$  und  $z^i := z_1 + \dots + z_{i-1}$ . Dann gilt  $\|z^{i+1}\|^2 \geq \|z^i\|^2 + 2\operatorname{Re}(z^i|z_i) + \|z_i\|^2 \geq \|z^i\|^2 + \|z_i\|^2$  für alle  $i \leq n$  und damit insbesondere für  $z = z^{n+1}$

$$n = \sum_{i=1}^n \nu(z_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 \leq \|z\|^2 \leq r^2 \nu(z)^2 = r^2 . \quad \square$$

**11.21 Folgerung** Jedes beschränkte Gebiet  $D$  in einem komplexen Hilbertraum  $H$  ist endliches direktes Produkt  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$  irreduzibler komplexer Mannigfaltigkeiten  $D_i$ .

*Beweis.* Sei  $B$  die offene Einheitskugel von  $H$  und  $a \in D$  ein beliebig gewählter Punkt. Wir dürfen  $B \subset D \subset rB$  für ein geeignetes  $r > 1$  annehmen. Wählen wir  $n \leq r^2$  maximal so, daß  $D$  biholomorph zu einem direkten Produkt  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$  entsprechend 11.20 ist, sind alle Faktoren  $D_i$  irreduzibel.  $\square$

**11.22 Folgerung** Ist  $D$  ein beschränktes Gebiet in einem komplexen Hilbertraum, so ist  $D$  nicht biholomorph äquivalent zu  $D \times D$ .

Daß diese Eigenschaften für beliebige Banachräume nicht gelten, zeigt

**11.23 Beispiel** Es sei  $E$  der Banachraum aller beschränkten komplexen Zahlenfolgen  $c = (c_i)$  versehen mit der Norm  $\|c\| = \sup_i |c_i|$ . Die offene Einheitskugel  $D$  von  $E$  ist dann biholomorph äquivalent zu  $D \times D$ . (Warum?)

**11.24 Satz** Es seien  $E$  ein komplexer Banachraum,  $D \subset E$  ein beschränktes Gebiet,  $a \in D$  ein Punkt und  $G \subset \operatorname{Aut}(D)$  eine Untergruppe. Ist dann die Bahn  $G(a) := \{g(a) : g \in G\}$  von  $a$  eine Umgebung von  $a$ , so operiert  $G$  transitiv auf  $D$  (d.h.  $G(a) = D$ ).

*Beweis.* Sei  $\mu = \kappa_D$  und  $d = d_\mu$  die zugehörige Metrik auf  $D$ . Es gibt ein  $r > 0$  mit  $\{z \in D : d(a, z) < r\} \subset G(a)$ . Sei weiter  $b \in D$  ein Punkt in der abgeschlossenen Hülle von  $G(a) \subset D$ . Dann existiert ein  $g \in G$  mit  $d(g(a), b) < r$ , und somit folgt  $d(a, g^{-1}(b)) < r$ , d.h.  $g^{-1}(b) \in G(a)$  und damit  $b \in G(a)$ , d.h.  $b$  ist ein innerer Punkt von  $G(a)$ . Es folgt  $D = G(a)$  wegen  $D$  zusammenhängend.  $\square$

**11.25 Übungsaufgabe** Seien  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $B \subset \mathcal{H}(M)$  der Teilraum aller beschränkten holomorphen Funktionen auf  $M$ . Man zeige:

(i)  $B$  ist ein komplexer Banachraum bezüglich

$$\|f\| := \sup |f(M)| .$$

(ii) Für jedes  $a \in M$  definiert  $\hat{a}(f) := f(a)$  eine stetige Linearform  $\hat{a} \in B'$ .

(iii) Durch  $a \mapsto \hat{a}$  wird eine stetige Abbildung  $\hat{\cdot} : M \rightarrow B'$  und durch  $d(a, b) := \|\hat{a} - \hat{b}\|$  eine stetige Pseudometrik  $d := d_M$  auf  $M$  definiert.

(iv) Ist  $N$  eine weitere komplexe Mannigfaltigkeit und  $d_N$  analog definiert, so gilt

$$d_N(g(a), g(b)) \leq d_M(a, b)$$

für alle holomorphen Abbildungen  $g : M \rightarrow N$  und für alle  $a, b \in M$ .

## 12. Hermitesche Metriken

Es sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $\mu$  eine Norm auf  $TM$ . Dann heißt  $\mu$  eine **hermitesche Metrik** auf  $M$ , wenn die Einschränkung von  $\mu$  auf jeden Tangentialraum  $E := T_a M$  eine Hilbertnorm ist (d.h. es existiert zu jedem  $a \in M$  eine positiv definite hermitesche Form

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto (v|w) \end{aligned}$$

mit  $\mu(v)^2 = (v|v)$  für alle  $v \in E := T_a M$ ). Häufig werden noch Differenzierbarkeitsbedingungen an das Quadrat  $\mu^2 : TM \rightarrow \mathbb{R}$  gestellt, aber wir wollen hier der Einfachheit halber darauf verzichten. Beispielsweise ist die Poincaré-Metrik  $\omega$  auf  $\mathbb{D}$  eine hermitesche Metrik – im Falle der (komplexen) Dimension 1 ist ja jede Norm auf  $TM$  eine hermitesche Metrik auf  $M$ . Nun existiert auf dem Dizylinder  $D := \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$  wegen 11.15 keine hermitesche Metrik, bezüglich der alle holomorphen Abbildungen  $f : D \rightarrow D$  kontraktiv sind. Es ist jedoch bekannt, daß auf jedem beschränkten Gebiet  $D \subset \mathbb{C}^n$  eine hermitesche Metrik existiert, die unter allen biholomorphen Automorphismen  $g \in \operatorname{Aut}(D)$  invariant ist (z.B. die **Bergman-Metrik**).

**12.1 Übungsaufgabe** Es sei  $D = \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$  der Dizylinder und  $T := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w| = 1\}$  die sogenannte Bestimmungsfläche von  $D$ . Man zeige:

- (i) Ist  $f$  eine auf  $\overline{D}$  stetige Funktion mit  $f|_D$  holomorph und  $f|_T = 0$ , so gilt  $f = 0$  (Hinweis: Cauchy-Integralformel).
- (ii) Gilt  $\lambda(T) = T$  für die lineare Abbildung  $\lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  des  $\mathbb{C}^2$ , so gilt  $b = c = 0$  oder  $a = d = 0$ .
- (iii) Man berechne  $G = \text{Aut}(D)$  (Hinweis: Berechne zunächst die Untergruppe

$$K := \{g \in G : g(0) = 0\}$$

und setze  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  als bekannt voraus – vergl. unten).

**12.2 Übungsaufgabe** Man gebe eine hermitesche Metrik auf dem Dizylinder in  $\mathbb{C}^2$  an, die unter allen biholomorphen Automorphismen invariant ist.

**12.3 Übungsaufgabe** Man zeige, daß auf der Riemannschen Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$  keine hermitesche Metrik existiert, die unter  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  invariant ist.

Es existiert jedoch genau eine stetige hermitesche Metrik  $\mu$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$ , so daß

$$\mu(z, t) = \frac{|t|}{1 + z\bar{z}}$$

für alle  $(z, t) \in T\widehat{\mathbb{C}} \subset T\widehat{\mathbb{C}}$ . Dieses  $\mu$  ist invariant gegenüber der Untergruppe

$$(12.4) \quad \left\{ z \mapsto \frac{az - b}{bz + a} : a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} \subset \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}).$$

Dieser Sachverhalt ist analog zur  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ -invarianten Poincaré-Metrik  $\omega$  (vgl. 11.5), insbesondere wenn man bedenkt, daß  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  durch

$$\left\{ z \mapsto \frac{az + b}{bz + a} : a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\}$$

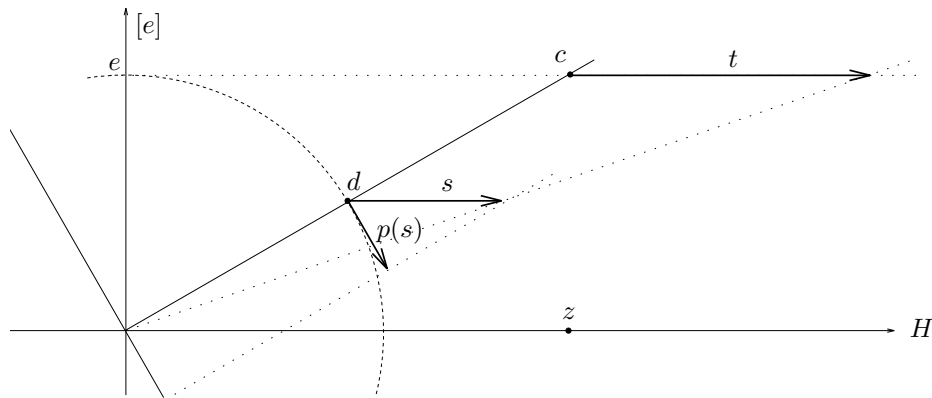
gegeben wird.

Wir wollen die beiden Metriken von  $\mathbb{D}$  und  $\widehat{\mathbb{C}}$  auf höhere Dimensionen verallgemeinern: Dazu seien  $E$  ein komplexer Hilbertraum mit innerem Produkt  $(\cdot | \cdot)$  und  $M := \mathbb{P}(E)$  der zugehörige projektive Raum. Für jedes  $g \in \text{GL}(E)$  ist dann  $\mathbb{P}(g)$  ein Automorphismus von  $M$ , wobei  $\mathbb{P}(g)[z] = [gz]$  für alle  $z \in E^* := E \setminus \{0\}$  und  $[z] := \mathbb{C}z \in M$ . Sei  $\text{U}(E) := \{g \in \text{GL}(E) : \|gz\| = \|z\| \text{ für alle } z \in E\}$  die **unitäre Gruppe** von  $E$  und  $G := \mathbb{P}\text{U}(E)$  die zugehörige **projektiv-unitäre Gruppe**. Für den Spezialfall  $E = \mathbb{C}^2$  versehen wir mit dem Standard-Skalarprodukt  $(z|w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2$  ist  $M = \widehat{\mathbb{C}}$  und  $G$  die in 12.4 angegebene Gruppe. Eine  $G$ -invariante hermitesche Metrik  $\mu$  auf  $M$  ( $E$  beliebig) erhalten wir wie folgt: Sei  $a \in M$  ein beliebig gewählter Punkt. Dann existiert ein Einheitsvektor  $e \in E$  mit  $a = [e]$ , und das orthogonale Komplement  $H := e^\perp$  ist eine abgeschlossene Hyperebene in  $E$ , also selbst ein komplexer Hilbertraum. Durch  $\varphi([z \oplus e]) := z$  wird eine biholomorphe Abbildung  $\varphi : U \rightarrow H$  definiert, wobei  $U := \pi(E \setminus H)$  eine Koordinatenumgebung von  $a$  in  $M$  ist. Das Differential  $T_a\varphi : T_a(M) \rightarrow T_0(H) = H$  ist ein linearer Isomorphismus und folglich eine Isometrie, wenn  $T_a(M)$  mit einer geeigneten Norm versehen wird. Diese hängt nicht von der Auswahl von  $e$  ab. Da  $a$  beliebig gewählt war, erhalten wir so eine Hilbertnorm  $\mu$  auf  $TM$ . Wie sieht diese nun in der holomorphen Karte  $(U, \varphi)$  aus? Dazu identifizieren wir  $U$  mit  $H$  vermöge  $\varphi$ . Sei  $v = (z, t) \in TH = H \times H$  ein Tangentialvektor im Punkte  $z \in H \subset M$ . Wir setzen  $c := z + e$ ,  $d := c/\|c\|$  und  $s := t/\|c\|$ . Ist dann  $p$  die orthogonale Projektion von  $E$  auf  $d^\perp$ , so gilt  $\mu(v) = \|p(s)\|$  entsprechend obiger Definition. Gilt etwa  $t \perp z$ , so gilt auch  $t \perp d$  und wegen  $p(s) = s$  folglich

$$\mu(z, t) = \frac{\|t\|}{\sqrt{1 + (z|z)}}.$$

Sind andererseits  $t, z$  linear abhängig über  $\mathbb{C}$ , so liefert eine elementar-geometrische Betrachtung, vergl. Figur 8, wegen  $\cos \alpha = 1/\|c\| = \|p(s)\|/\|s\|$  die Beziehung

$$\mu(z, t) = \frac{\|t\|}{1 + (z|z)}.$$



Figur 8.

Insbesondere ist  $\mu$  lokal-beschränkt auf  $TM$  ( $\mu^2$  ist sogar reell-analytisch auf  $TM$ ). Daß die hermitesche Metrik  $\mu$  invariant unter der projektiv-unitären Gruppe  $G$  ist, folgt unmittelbar aus der Definition.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die projektiv-unitäre Gruppe  $G = \mathbb{P}U(E)$  transitiv auf  $M = \mathbb{P}(E)$  operiert, was wie folgt eingesehen werden kann: Sind  $L_1, L_2 \in M$  beliebig und  $H_1, H_2$  die zugehörigen orthogonalen Komplemente, so existieren lineare surjektive Isometrien  $\sigma : L_1 \rightarrow L_2, \tau : H_1 \rightarrow H_2$ , und  $\lambda := \sigma \times \tau \in U(E)$  bildet  $L_1$  auf  $L_2$  ab.

Wir betrachten nun einen beliebigen komplexen Hilbertraum  $H$  und auf der orthogonalen Summe  $E = \mathbb{C} \oplus H$  die durch

$$\Phi(z, w) = s\bar{t} - (x|y)$$

für alle  $z = (s, x), w = (t, y)$  aus  $E$  definierte indefinite hermitesche Form

$$\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{C} .$$

Orthogonale Summe heißt dabei, daß das innere Produkt auf  $E$  durch das von  $H$  durch

$$(z|w) = s\bar{t} + (x|y)$$

gegeben ist. Jedes  $h \in H$  werde mit der Geraden  $[1, h] \in \mathbb{P}(E)$  identifiziert. Im Sinne dieser Identifikation ist also  $H \subset \mathbb{P}(E)$  eine offene Teilmenge, und man sieht leicht, daß

$$D := \{[z] \in \mathbb{P}(E) : \Phi(z, z) > 0\}$$

die offene Einheitskugel von  $H$  ist. Die unitäre Gruppe bezüglich  $\Phi$

$$U(\Phi) := \{g \in GL(E) : \Phi(gz, gz) = \Phi(z, z) \text{ für alle } z \in E\}$$

operiert auf  $\mathbb{P}(E)$  und läßt dabei das Gebiet  $D \subset \mathbb{P}(E)$  invariant,  $G := \mathbb{P}U(\Phi)$  kann also als eine Untergruppe von  $\text{Aut}(D)$  aufgefaßt werden. Für jede komplexe Gerade  $L = [z] \in D$  ist  $L^0 := \{w \in E : \Phi(z, w) = 0\}$  eine abgeschlossene Hyperebene in  $E$  mit  $E = L \oplus L^0$ . Schreiben wir  $z = (1, h)$  mit  $r := \|h\| < 1$ , so gilt also für jedes  $w = (t, x) \in L^0$  wegen  $t = (x|h)$  die Abschätzung  $|t| \leq r\|x\|$  und folglich auch

$$-\Phi(w, w) = \|x\|^2 - |t|^2 \geq (1 - r^2)\|x\|^2 ,$$

d.h.  $L$  ist bezgl.  $\Phi$  und  $L^0$  ist bezgl.  $-\Phi$  ein komplexer Hilbertraum. Ist  $\tilde{L} = [\tilde{z}]$  ein weiterer Punkt in  $D$ , so existieren also surjektive Isometrien  $\sigma : (L, \Phi) \rightarrow (\tilde{L}, \Phi)$  und  $\tau : (L^0, -\Phi) \rightarrow (\tilde{L}^0, -\Phi)$ . Dann ist aber  $\lambda := \sigma \times \tau$  in  $U(\Phi)$  und  $\mathbb{P}(\lambda) \in \text{Aut}(D)$  bildet  $[z]$  in  $[\tilde{z}]$  ab. Also operiert  $\text{Aut}(D)$  transitiv auf  $D$ . Es gilt sogar:

**12.5 Satz**  $\text{Aut}(D) = \mathbb{P}U(\Phi) = \{g|D : g \in \text{Aut}(\mathbb{P}(E)) \text{ mit } g(D) = D\}$ .

*Beweis.* Sei  $K = \{g \in \text{Aut}(D) : g(0) = 0\}$  die **Isotropiegruppe** von  $\text{Aut}(D)$  in 0 und  $G := \mathbb{P}U(\Phi)$ . Wegen  $G$  transitiv auf  $D$  genügt es  $K \subset G$  zu zeigen. Nun ist aber jedes  $g \in K$  linear wegen 6.10, d.h.  $g \in U(H)$  und somit  $g = \mathbb{P}(\lambda)$  für  $\lambda := \text{id}_{\mathbb{C}} \times g \in U(\Phi)$ . Wegen  $U(\Phi) \subset GL(E)$  hat schließlich jedes  $g \in G$  eine Fortsetzung zu einem Automorphismus von  $\mathbb{P}(E)$ .  $\square$

Wir wollen noch einen zweiten Beweis für die Homogenität der offenen Einheitskugel  $D$  des Hilbertraumes  $H$  führen, indem wir für jedes  $b \in H$  ein  $g \in \text{Aut}(D)$  mit  $g(0) = b$  direkt angeben. Dazu jedoch zuvor einige wohlbekanntete Tatsachen: Sind  $H, K$  komplexe Hilberträume, so existiert zu jedem  $\lambda \in \mathcal{L}(H, K)$  genau ein  $\lambda^* \in \mathcal{L}(K, H)$  mit  $(\lambda x|y) = (x|\lambda^*y)$  für alle  $x \in H$  und  $y \in K$ . Der Operator  $g \in \mathcal{L}(H)$  ist genau dann unitär, wenn  $gg^* = g^*g = 1$  gilt. Sei nun  $E = \mathbb{C} \oplus H$  als orthogonale Summe, und sei  $j \in \mathcal{L}(E)$  definiert durch  $j(t, x) = (t, -x)$ . Dann gilt für unsere oben definierte hermitesche Form

$$\Phi(z, w) = (jz|w)$$

und  $g \in \text{GL}(E)$  gehört zur unitären Gruppe  $\text{U}(\Phi)$  genau dann, wenn

$$(12.6) \quad gjg^* = j$$

gilt. Schreiben wir  $(t, w) \in \mathbb{C} \oplus H$  auch als Spalte  $\begin{pmatrix} t \\ w \end{pmatrix}$ , so kann jedes  $g \in \text{GL}(E)$  als Operatormatrix

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, wobei  $a \in \mathcal{L}(H)$ ,  $b \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, H) \cong H$ ,  $c \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C}) = H'$  und  $d \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ . 12.6 ist dann offenbar äquivalent zu

$$(12.7) \quad \begin{aligned} aa^* - bb^* &= 1 \in \mathcal{L}(H) \\ ac^* - bd^* &= 0 \in H \\ dd^* - cc^* &= 1 \in \mathbb{C} \end{aligned} .$$

Sei nun wieder  $D \subset H$  die offene Einheitskugel. Für alle  $x, y \in H \cong \mathcal{L}(\mathbb{C}, H)$  gilt  $y^* \in H'$  und  $y^*x = (x|y)$ . Andererseits ist  $xy^* \in \mathcal{L}(H)$ , und zwar gilt  $(xy^*)z = x(y^*z) = (z|y)x$ . Für jedes  $b \in D$  gilt also mit  $\sigma := 1 - bb^* \in \text{GL}(E)$

$$\sigma(z) = z \quad \text{falls} \quad z \perp b \quad \text{und}$$

$$\sigma(b) = (1 - \|b\|^2)b .$$

Es existieren also eindeutig bestimmte Operatoren  $a \in \text{GL}(E)$  und  $d \in \text{GL}(\mathbb{C})$  mit  $a = a^*$ ,  $d = d^*$  positiv definit und  $a^{-2} = (1 - bb^*)$ ,  $d^{-2} = (1 - b^*b)$ . Mit der Identifikation  $\text{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$  gilt natürlich  $d = 1/\sqrt{1 - \|b\|^2} \in \mathbb{R}$ .

Betrachten wir nun  $q := \begin{pmatrix} a & ab \\ db^* & d \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E)$ . Wegen  $q^{-1} = \begin{pmatrix} a & -bd \\ -b^*a & d \end{pmatrix}$  ist  $q \in \text{GL}(E)$ , und man verifiziert leicht  $q \in \text{U}(\Phi)$  mit 12.7. Für  $g := \mathbb{P}(q) \in \text{Aut}(D)$  gilt somit

$$g(z) = (az + ab)(db^*z + d)^{-1} = \tau(z + b)(b^*z + 1)^{-1}$$

für alle  $z \in D$ , wobei  $\tau := a/d \in \text{GL}(H)$  die Identitäten  $\tau(b) = b$  und  $\tau(z) = \sqrt{1 - (b|b)} z$  für alle  $z \perp b$  erfüllt. Für die Ableitung  $\lambda := dg(0) \in \mathcal{L}(H)$  erhält man weiter  $\lambda = \tau \circ (1 - bb^*)$ , d.h.

$$\begin{aligned} \lambda(b) &= (1 - (b|b))b \quad \text{und} \\ \lambda(z) &= \sqrt{1 - (b|b)}z \quad \text{falls} \quad z \perp b . \end{aligned}$$

Für jeden Tangentialvektor  $v = (b, x) \in T_b D$  gilt folglich

$$\mu(v) = \|\lambda^{-1}x\| .$$

Da  $b \in D$  beliebig gewählt werden konnte, haben wir damit einen zweiten Beweis für die Homogenität der Einheitskugel  $D \subset H$  geliefert. Aus der expliziten Darstellung von  $\mu$  folgt weiter, daß  $\mu^2$  auf  $TD$  reell-analytisch ist.

### 13. Holomorphe Vektorfelder

Im folgenden sei  $M$  stets eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $\pi : TM \rightarrow M$  das zugehörige Tangentialbündel. Dann heißt eine Abbildung  $X : M \rightarrow TM$  ein **Vektorfeld** auf  $M$ , wenn  $\pi \circ X = \text{id}_M$  gilt, d.h. also, wenn  $X_a := X(a) \in T_aM$  für alle  $a \in M$  gilt. Für jedes offene  $U \subset M$  und jede Banachraum-wertige holomorphe Funktion  $h : U \rightarrow F$  definiert  $X$  eine Funktion  $Xh : U \rightarrow F$  wie folgt: Zu jedem  $a \in U$  wähle eine glatte Kurve  $\gamma$  in  $U$  mit  $\dot{\gamma}(0) = X_a \in T_aM$ . Dann hängt  $Xh(a) := (h \circ \gamma)'(0) \in F$  nicht von der Wahl des Repräsentanten  $\gamma$  von  $X_a$  ab.  $Xh$  ist gewissermaßen die Richtungsableitung von  $h$  in Richtung des Vektorfeldes  $X$  auf  $U$ . Ist speziell  $U \subset E$  offene Teilmenge des komplexen Banachraumes  $E$ , und wird wie üblich  $TU$  mit  $U \times E$  identifiziert, so existiert also genau eine Abbildung  $f : U \rightarrow E$  mit  $X_a = (a, f(a)) \in TU = U \times E$  für alle  $a$ , und es gilt

$$Xh(a) = dh(a)(f(a)).$$

Wir schreiben deshalb  $X$  symbolisch auch als ‘Differentialoperator’

$$X = f(z) \partial/\partial z$$

oder kürzer  $f \partial/\partial z$ . Die Abbildung  $f : U \rightarrow E$  ist offenbar gerade  $f = Xh$  für  $h := \text{id}_M$ . Da  $X$  genau dann holomorph (d.h. als Abbildung  $U \rightarrow TU$ ) ist, wenn  $f$  holomorph ist, gilt also

**13.1 Lemma** *Das Vektorfeld  $X$  auf der komplexen Mannigfaltigkeit  $M$  ist genau dann holomorph, wenn  $Xh$  holomorph ist für jedes offene  $U \subset M$  und jede Banachraum-wertige holomorphe Abbildung  $h : U \rightarrow F$ .*

Wir bezeichnen nun mit  $\mathfrak{V}(M)$  die Menge aller holomorphen Vektorfelder auf  $M$ .  $\mathfrak{V}(M)$  ist in natürlicher Weise ein komplexer Vektorraum – ja sogar ein  $\mathcal{H}(M)$ -Modul: Für  $f \in \mathcal{H}(M)$  und  $X \in \mathfrak{V}(M)$  definiere  $(fX)_a := f(a)X_a \in T_aM$  für alle  $a \in M$ . Ist  $\varphi : M \rightarrow N$  eine lokal-biholomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten, so existiert zu jedem  $Y \in \mathfrak{V}(N)$  genau ein  $X \in \mathfrak{V}(M)$  mit

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\varphi} & TN \\ \uparrow X & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

kommutativ (warum?). Dieses ist auch dadurch eindeutig bestimmt, daß auf  $U = \varphi^{-1}(V)$

$$X(h \circ \varphi) = (Yh) \circ \varphi$$

für jedes offene  $V \subset N$  und jede holomorphe Funktion  $h : V \rightarrow F$  gilt. Schreiben wir  $X := \varphi^*Y$ , so erhalten wir eine lineare Abbildung  $\varphi^* : \mathfrak{V}(N) \rightarrow \mathfrak{V}(M)$ . Diese ist injektiv, wenn  $N$  zusammenhängend ist. Ein Spezialfall ist, daß  $M \subset N$  eine offene Teilmenge und  $\varphi$  die kanonische Injektion ist. In diesem Fall ist  $\varphi^*$  die Einschränkungabbildung.

Der Raum  $\mathfrak{V}(M)$  hat noch eine weitere algebraische Struktur

**13.2 Satz** *Zu je zwei holomorphen Vektorfeldern  $X, Y$  auf der komplexen Mannigfaltigkeit  $M$  existiert genau ein  $Z \in \mathfrak{V}(M)$  mit*

$$(13.3) \quad Zh = Y(Xh) - X(Yh)$$

für jedes offene  $U \subset M$  und jede Banachraum-wertige holomorphe Funktion  $h : U \rightarrow F$ .  $Z$  heißt das *Klammerprodukt* von  $X, Y$  und wird mit  $[X, Y]$  bezeichnet.

*Beweis.* Wegen 13.3 genügt es, die Aussage lokal zu beweisen. Wir dürfen also annehmen, daß  $M$  offene Teilmenge des komplexen Banachraumes  $E$  ist. Dann gilt

$$X = f \partial/\partial z, \quad Y = g \partial/\partial z$$

für gewisse  $f, g \in \mathcal{H}(M, E)$ , und wir setzen

$$Z := (Yf - Xg) \partial/\partial z = \left( df(z)(g(z)) - dg(z)(f(z)) \right) \partial/\partial z.$$

Nun gilt für jedes offene  $U \subset M$  und jedes holomorphe  $h : U \rightarrow F$

$$Y(Xh)(z) = d \left[ dh(z)(f(z)) \right] (g(z)) = \underbrace{d^2h(z)(f(z), g(z))}_{\text{symmetrisch in } f, g} + dh(z) \underbrace{(df(z)(g(z)))}_{= Yf},$$

d.h. es gilt 13.3. □

**13.4 Eigenschaften des Klammerprodukts** Für  $V := \mathfrak{V}(M)$  und alle  $X, Y, Z \in V$  gilt:

- (i)  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  ist bilinear.
- (ii)  $[X, Y] + [Y, X] = 0$  und insbesondere  $[X, X] = 0$ . (Antisymmetrie)
- (iii)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ . (Jacobi-Identität)

*Beweis.* Zum Nachweis von (iii) schreibe  $[[X, Y], Z]h$  vermöge 13.3 als Summe von 4 Termen und permutiere zyklisch. In der entstehenden Summe von 12 Termen hebt sich dann alles fort.  $\square$

Man nennt jeden Vektorraum  $V$  zusammen mit einer Abbildung  $[\cdot, \cdot]$ , die (i)–(iii) erfüllt, eine **Lie-Algebra** und  $[\cdot, \cdot]$  das zugehörige **Lie-Produkt**. Es gilt im allgemeinen nicht das Assoziativgesetz, stattdessen aber die **Jacobi-Identität** (iii). Für jede komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  ist also  $\mathfrak{V}(M)$  eine komplexe Lie-Algebra.

**13.5 Übungsaufgabe** Man zeige für jede lokal-biholomorphe Abbildung  $\varphi : M \rightarrow N$ , daß  $\varphi^* : \mathfrak{V}(N) \rightarrow \mathfrak{V}(M)$  ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist (d.h. linear und  $\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*X, \varphi^*Y]$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{V}(N)$ ).

**13.6 Übungsaufgabe** Man zeige für die Riemannsche Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$

$$\dim \mathfrak{V}(\widehat{\mathbb{C}}) = 3$$

(Hinweis: Man zeige, daß die Einschränkung von  $\mathfrak{V}(\widehat{\mathbb{C}})$  auf  $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$  aus genau allen Vektorfeldern der Form  $(a + bz + cz^2)\partial/\partial z$  besteht, wobei  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ).

Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, so heißt eine glatte Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  **tangentiell** an das holomorphe Vektorfeld  $X \in \mathfrak{V}(M)$  – oder auch eine **Integralkurve** von  $X$  –, wenn

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt. Ebenso heißt für jedes Gebiet  $U \subset \mathbb{C}$  eine holomorphe Kurve  $\gamma : U \rightarrow M$  eine **komplexe Integralkurve** von  $X$ , wenn die gleiche Bedingung für alle  $t \in U$  gilt. Das holomorphe Vektorfeld  $X$  auf  $M$  heißt **vollständig** (bzw. **komplex vollständig**), wenn zu jedem  $a \in M$  eine Integralkurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  (bzw. komplexe Integralkurve  $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow M$ ) mit  $\gamma(0) = a$  existiert. Wir bezeichnen mit  $\mathbf{aut}(M)$  die Menge aller vollständigen holomorphen Vektorfelder auf  $M$ . Für jede Integralkurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  von  $X \in \mathbf{aut}(M)$  definiert  $\sigma(t) := \gamma(st)$  eine Integralkurve von  $sX$ , d.h. auch  $sX$  ist vollständig für jedes  $s \in \mathbb{R}$ .

**13.7 Beispiel** (i) Ist  $E$  ein komplexer Banachraum,  $c \in E$  ein fester Vektor und  $X = c\partial/\partial z$  das zugehörige konstante Vektorfeld, so definiert für jedes  $a \in E$

$$\gamma(t) := a + tc$$

eine komplexe Integralkurve  $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow E$  mit  $\gamma(0) = a$ , d.h.  $X$  ist komplex vollständig.

(ii) Ist  $\lambda \in \mathcal{L}(E)$  und  $X = \lambda(z)\partial/\partial z$  das zugehörige lineare Vektorfeld, so existiert  $\exp(t\lambda) \in GL(E)$  für alle  $t \in \mathbb{C}$  (vergl. 5.12), und für jedes  $a \in E$  definiert  $\gamma(t) := \exp(t\lambda)(a)$  eine komplexe Integralkurve von  $X$  mit  $\gamma(0) = a$ .

(iii) Sind  $\lambda, \sigma \in \mathcal{L}(E)$  lineare Operatoren auf  $E$ , so gilt für den Kommutator  $[\lambda, \sigma] := \lambda\sigma - \sigma\lambda \in \mathcal{L}(E)$  die Formel

$$\left[ \lambda \partial/\partial z, \sigma \partial/\partial z \right] = [\lambda, \sigma] \partial/\partial z$$

(dieses ist einer der Gründe, warum wir die Definition des Klammerprodukts von Vektorfeldern durch die Bedingung 13.3 und nicht wie bei vielen Autoren mit umgekehrtem Vorzeichen gewählt haben).

Die Menge  $\mathbf{aut}(M) \subset \mathfrak{V}(M)$  aller vollständigen holomorphen Vektorfelder auf  $M$  besitzt die Struktur eines reellen Kegels, ist aber im allgemeinen weder abgeschlossen gegenüber Summen – noch gegenüber Klammerproduktbildung. Dazu betrachten wir das folgende einfache

**13.8 Beispiel** Es sei  $M = \mathbb{C}^2$  versehen mit den Koordinaten  $(z, w)$ . Wir schreiben jedes  $X \in \mathfrak{V}(M)$  in der Form

$$X = f(z, w)\partial/\partial z + g(z, w)\partial/\partial w,$$

wobei  $f, g \in \mathcal{H}(M)$ . Sei nun  $X := w\partial/\partial z$  und  $Y := z^2\partial/\partial w$ . Beide Vektorfelder sind komplex vollständig – für jedes  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  sind nämlich

$$\gamma(t) = (a + tb, b) \quad \text{und} \quad \sigma(t) = (a, b + ta^2)$$

zugehörige komplexe Integralkurven. Betrachten wir nun die Vektorfelder

$$\begin{aligned} Z &:= [X, Y] = z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 2zw \frac{\partial}{\partial w} \\ W &:= X + Y = w \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \frac{\partial}{\partial w} . \end{aligned}$$

Diese sind nicht vollständig, denn

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= ((1-t)^{-1}, 0) \quad \text{und} \\ \sigma(t) &= (6(1-t)^{-2}, 12(1-t)^{-3}) \end{aligned}$$

sind für  $t < 1$  reelle Integralkurven, die für  $t = 1$  keine Fortsetzung haben.

### 14. Holomorphe Flüsse

Im folgenden sei  $M$  stets eine komplexe Mannigfaltigkeit.

**14.1 Definition**  $g : \Omega \rightarrow M$  heißt ein **holomorpher Fluß** auf  $M$ , wenn gilt:

- (i)  $\Omega \subset \mathbb{C} \times M$  ist offen, und  $g$  ist holomorph.
- (ii) Für alle  $a \in M$  ist  $(0, a) \in \Omega$  und  $g(0, a) = a$ .
- (iii) Ist  $(t, a) \in \Omega$  und  $0 \leq s \leq 1$ , so gilt auch  $(st, a) \in \Omega$ .
- (iv) Es existiert eine Umgebung  $\Sigma \subset \Omega$  von  $\{0\} \times M$  so, daß

$$(r+t, a) \in \Omega \quad \text{und} \quad g(r+t, a) = g(r, g(t, a))$$

für alle  $(t, a) \in \Sigma$  und  $r \in \mathbb{C}$  mit  $(r, g(t, a)) \in \Sigma$  gilt.

Sind  $g : \Omega \rightarrow M$  und  $\tilde{g} : \tilde{\Omega} \rightarrow M$  zwei holomorphe Flüsse auf  $M$ , so schreiben wir  $g \leq \tilde{g}$ , falls  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$  und  $\tilde{g}|_{\Omega} = g$  gilt. Der Fluß  $g$  heißt **maximal**, falls für jeden holomorphen Fluß  $\tilde{g}$  auf  $M$  mit  $g \leq \tilde{g}$  bereits  $g = \tilde{g}$  gilt.

**14.2 Lemma** Zu jedem holomorphen Fluß  $g$  auf  $M$  existiert genau ein maximaler holomorpher Fluß  $\hat{g}$  auf  $M$  mit  $g \leq \hat{g}$ .

*Beweis.* Für je zwei holomorphe Flüsse  $g^j : \Omega^j \rightarrow M$ ,  $j = 1, 2$ , mit  $g \leq g^j$  gilt (auf Grund des Identitätssatzes)  $g^1|_{\Omega^1 \cap \Omega^2} = g^2|_{\Omega^1 \cap \Omega^2}$ . Definieren wir

$$\hat{\Omega} = \bigcup_{\tilde{g} \geq g} \tilde{\Omega}$$

für alle holomorphen Flüsse  $\tilde{g} : \tilde{\Omega} \rightarrow M$  mit  $\tilde{g} \geq g$ , so existiert also genau eine holomorphe Abbildung  $\hat{g} : \hat{\Omega} \rightarrow M$  mit  $\hat{g}|_{\Omega} = g$ . Offensichtlich ist  $\hat{g}$  ein maximaler holomorpher Fluß. □

Bei Definition 14.1 wird die Gültigkeit der Identität in (iv) nur für Punkte nahe  $\{0\} \times M$  in  $\Omega$  verlangt. Für maximale Flüsse gilt jedoch allgemeiner

**14.3 Lemma** Es seien  $g : \Omega \rightarrow M$  ein maximaler holomorpher Fluß auf  $M$ ,  $a \in M$  ein beliebiger Punkt und  $r, t \in \mathbb{C}$ . Gilt dann  $(t, a) \in \Omega$  und  $(r, g(st, a)) \in \Omega$  für alle  $0 \leq s \leq 1$ , so gilt auch  $(r+t, a) \in \Omega$  und  $g(r+t, a) = g(r, g(t, a))$ .

*Beweis.* Wir dürfen  $r \neq 0$  annehmen. Betrachten wir zunächst den Fall, daß  $u := r+t \neq 0$  gilt. Für einen geeigneten ‘Keil’

$$S := \{\rho e^{i\varphi} : 0 < \rho < \rho_0, |\varphi| < \varphi_0\} \subset \mathbb{C}^*$$

( $\rho_0 > 1, \varphi_0 > 0$  fest) und eine geeignete, offene, zusammenhängende Umgebung  $V$  von  $a \in M$  gilt dann  $(\lambda r, g(\lambda t, z)) \in \Omega$  für alle  $\lambda \in S$  und alle  $z \in V$ . Dann ist  $U := Su$  eine Umgebung von  $u \in \mathbb{C}^*$ , und durch  $h(\lambda u, z) := g(\lambda r, g(\lambda t, z))$  für alle  $\lambda \in S$  und  $z \in V$  wird eine holomorphe Abbildung  $h : W \rightarrow M$  definiert, wobei  $W := U \times V$  gesetzt sei.  $W \cap \Omega$  ist zusammenhängend. Auf einer nicht-leeren offenen Teilmenge von  $W \cap \Omega$  stimmen  $h$  und  $g$  wegen 14.1.iv überein, nach dem Identitätssatz stimmen  $g, h$  sogar auf  $W \cap \Omega$  überein. Also läßt sich  $g$  auf  $\Omega \cup W$  holomorph fortsetzen. Wegen der Maximalität von  $g$  heißt das aber  $W \subset \Omega$  und insbesondere  $(u, a) \in \Omega$  zusammen mit  $g(u, a) = h(u, a) = g(r, g(t, a))$ . Es bleibt also, den Fall  $u = 0$  zu betrachten. Dann ist  $\sigma r + t \neq 0$  für  $\sigma < 1$ , und nach obigem Fall gilt

$(\sigma r + t, a) \in \Omega$  zusammen mit  $g(\sigma r + t, a) = g(\sigma r, g(t, a))$ . Für  $\sigma \nearrow 1$  folgt daraus aus Stetigkeitsgründen die Behauptung

$$g(u, a) = g(r, g(t, a)) \quad . \quad \square$$

Im folgenden sei  $g : \Omega \rightarrow M$  ein maximaler holomorpher Fluß auf  $M$ . Für jedes offene  $U \subset M$  ist dann

$$\Omega_U := \{(t, a) \in \Omega : g(st, a) \in U \text{ für alle } 0 \leq s \leq 1\}$$

offen in  $\mathbb{C} \times U$  und  $g_U := g|_{\Omega_U}$  ein holomorpher Fluß auf  $U$ . Wir wollen diesen die **Einschränkung** von  $g$  auf  $U$  nennen. Dem Fluß  $g$  ordnen wir nun in der folgenden Weise ein holomorphes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{B}(M)$  zu: Für jedes  $a \in M$  existiert nach Voraussetzung ein  $\varepsilon > 0$  mit  $(t, a) \in \Omega$  für  $|t| < \varepsilon$ , d.h.  $\gamma(t) := g(t, a) \in M$  ist für  $|t| < \varepsilon$  definiert und holomorph. Wir setzen dann

$$X_a := \dot{\gamma}(0) \in T_a M \quad .$$

Für jedes offene  $U \subset M$  und jede Banachraum-wertige holomorphe Funktion  $h : U \rightarrow F$  gilt dann für die Funktion  $Xh : U \rightarrow F$

$$(14.4) \quad Xh(z) = \left. \frac{\partial h(g(t, z))}{\partial t} \right|_{t=0}$$

für alle  $z \in U$ . Insbesondere ist also  $Xh$  holomorph auf  $U$ , und damit ist auch  $X$  ein holomorphes Vektorfeld auf  $M$ . Ist  $z = g(s, w)$  für ein  $w \in U$ , so können wir 14.4 auch schreiben als

$$\begin{aligned} Xh(z) &= \left. \frac{\partial h(g(t + s, w))}{\partial t} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial h(g(t, w))}{\partial t} \right|_{t=s} \quad , \end{aligned}$$

was nach Umbenennung

$$(14.5) \quad Xh(g(t, z)) = \frac{\partial h(g(t, z))}{\partial t}$$

impliziert. Diese Gleichung können wir auch so interpretieren, daß für jedes  $a \in M$  durch  $\gamma(t) := g(t, a)$  eine Integralkurve von  $X$  durch  $a$  definiert wird. Durch Induktion nach  $k$  und Differentiation nach  $t$  erhalten wir aus 14.5 schließlich

$$(14.6) \quad X^k h(g(t, z)) = \frac{\partial^k h(g(t, z))}{\partial t^k}$$

für alle  $k$ . Dabei sei die Funktion  $X^k h : U \rightarrow F$  induktiv definiert durch  $X^0 h = h$  und  $X^{k+1} h := X(X^k h)$ . Die Funktion  $h \circ g_U : \Omega_U \rightarrow F$  ist holomorph und besitzt deshalb eine ‘Potenzreihenentwicklung’ in  $t$

$$(14.7) \quad h(g(t, z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) t^k \quad ,$$

die auf einer Umgebung von  $\{0\} \times U \subset \Omega_U$  lokal-gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten-Funktionen  $c_k : U \rightarrow F$  sind holomorph. Offensichtlich gilt  $c_0 = h$  und  $c_1 = Xh$ , wegen 14.6 gilt allgemein  $k! c_k = X^k h$  für alle  $k$ , d.h. 14.7 kann auch in der Form

$$(14.8) \quad h(g(t, z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!} h(z)$$

geschrieben werden. Die rechte Seite von 14.8 hat das Aussehen der Exponentialreihe in dem Operator  $tX$  (man beachte jedoch, daß  $\sum (tX)^k/k!$  als Operator im allgemeinen für  $t \neq 0$  nicht konvergiert – die Konvergenz in 14.8 besagt nur, daß zu jedem festen  $z \in U$  ein  $\varepsilon = \varepsilon(z) > 0$  gewählt werden kann, so daß 14.8 für  $|t| < \varepsilon$  konvergiert).

Die Formel 14.8 hat die folgende bemerkenswerte Konsequenz: Wählen wir zu  $z \in M$  eine offene Umgebung  $U$  von  $z$  und eine holomorphe Funktion  $h : U \rightarrow F$ , die injektiv ist (z.B. eine holomorphe Karte

( $U, h$ ) um  $z$ ), so wird also  $g|_{\Omega_U}$  eindeutig durch das Vektorfeld  $X|_U$  bestimmt. Das heißt aber insbesondere, daß wegen des Identitätssatzes bereits ganz  $g$  durch das Vektorfeld  $X$  eindeutig bestimmt ist. Wir nennen deshalb  $X$  auch den **infinitesimalen Generator** des maximalen Flusses  $g$ . Für alle  $(t, a) \in \Omega$  schreiben wir auch  $\exp(tX)a$  statt  $g(t, a)$ .

Was bedeuten die obigen Überlegungen in dem speziellen Fall, daß  $M$  offene Teilmenge des komplexen Banachraumes  $E$  ist? Bezeichnen wir mit  $h : M \hookrightarrow E$  die kanonische Einbettung, so hat der infinitesimale Generator  $X$  des maximalen holomorphen Flusses  $g : \Omega \rightarrow M$  die Darstellung  $X = f(z) \partial/\partial z$ , wobei  $f = Xh$ . Die Identität 14.5 besagt nun gerade, daß  $g$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(14.9) \quad \frac{\partial g(t, z)}{\partial t} = f(g(t, z))$$

zum Anfangswert

$$(14.10) \quad g(0, z) = z$$

erfüllt. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist nun auch die Umkehrung wohl-bekannt: Ist  $M$  offene Teilmenge des komplexen Banachraumes  $E$  und ist  $f : M \rightarrow E$  eine holomorphe Funktion, so existiert eine Umgebung  $\Omega$  von  $\{0\} \times M$  in  $\mathbb{C} \times M$  und eine holomorphe Abbildung  $g : \Omega \rightarrow M$ , die 14.9 zum Anfangswert 14.10 löst.  $g$  ist dabei nahe  $\{0\} \times M$  durch  $f$  eindeutig bestimmt und erfüllt auch 14.1.iv – denn für jedes  $a \in M$  lösen  $u(t) := g(t, g(s, a))$  wie auch  $v(t) := g(t + s, a)$  die Differentialgleichung 14.9 zum gleichen Anfangswert  $g(s, a)$ . Durch Zusammensetzen dieser lokalen Lösungen kann man zeigen, daß auf einer beliebigen komplexen Mannigfaltigkeit jedes holomorphe Vektorfeld  $X$  der infinitesimale Generator eines maximalen holomorphen Flusses ist; wir wollen die Einzelheiten hier nicht ausführen.

Insgesamt gilt also

**14.11 Satz** Die holomorphen Vektorfelder auf der komplexen Mannigfaltigkeit  $M$  und die maximalen holomorphen Flüsse auf  $M$  stehen in einer ein-ein-deutigen Beziehung zueinander (bezügl. der Beziehung ‘ist infinitesimaler Generator von’).

**14.12 Übungsaufgabe** Es seien  $M, \tilde{M}$  komplexe Mannigfaltigkeiten und  $g : \Omega \rightarrow M, \tilde{g} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{M}$  maximale holomorphe Flüsse mit infinitesimalen Generatoren  $X \in \mathfrak{V}(M), \tilde{X} \in \mathfrak{V}(\tilde{M})$ .  $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$  sei eine biholomorphe Abbildung. Man zeige die Äquivalenz von

- (i)  $\tilde{X} = \varphi^* X$  (d.h.  $\tilde{X} = T\varphi^{-1} \circ X \circ \varphi$ )
- (ii)  $\tilde{\Omega} = \{(t, a) \in \mathbb{C} \times \tilde{M} : (t, \varphi a) \in \Omega\}$  und  $\varphi \tilde{g}(t, a) = g(t, \varphi a)$ .

## 15. Vektorfelder und Automorphismen

Im folgenden seien  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $X$  ein holomorphes Vektorfeld auf  $M$ . Dann existiert genau ein maximaler holomorpher Fluß  $g : \Omega \rightarrow M$  auf  $M$  mit  $X$  als infinitesimalem Generator. Für jedes  $t \in \mathbb{C}$  definiere

$$g_t : \Omega_t \rightarrow M$$

durch  $g_t(a) = g(t, a)$  und

$$\Omega_t := \{a \in M : (t, a) \in \Omega\} .$$

Dann ist  $\Omega_t$  eine (eventuell leere) offene Teilmenge von  $M$ , und  $g_t$  ist holomorph. Für die Teilmenge

$$T := \{t \in \mathbb{C} : \Omega_t = M\}$$

von  $\mathbb{C}$  gilt zunächst

**15.1 Lemma**  $T$  ist ein konvexer Kegel in  $\mathbb{C}$  (d.h.  $T + T \subset T$  und  $sT \subset T$  für alle  $s > 0$ ) mit  $0 \in T$ . Es gilt  $g_0 = \text{id}_M$  und  $g_s g_t = g_{s+t}$  für alle  $s, t \in T$ . Ferner ist  $R := T \cap (-T)$  ein  $\mathbb{R}$ -linearer Teilraum von  $\mathbb{C}$ , und  $t \mapsto g_t$  definiert einen Gruppenhomomorphismus  $R \rightarrow \text{Aut}(M)$ .

*Beweis.*  $sT \subset T$  für  $0 \leq s \leq 1$  ist trivial, und  $T + T \subset T$  folgt aus 14.3. Folglich gilt  $sT \subset T$  für alle  $s \geq 0$ . Ist  $t \in R$ , so gilt also  $t, -t \in T$  und somit  $g_t g_{-t} = g_{-t} g_t = g_0 = \text{id}_M$ .  $\square$

**15.2 Folgerung** Das holomorphe Vektorfeld  $X$  ist vollständig (bzw. komplex vollständig) genau dann, wenn  $\mathbb{R} \subset T$  (bzw.  $\mathbb{C} = T$ ) gilt. Insbesondere ist  $X$  komplex vollständig, wenn  $X$  und  $iX$  vollständig sind.

**15.3 Folgerung** Ist die komplexe Mannigfaltigkeit  $M$  kompakt, so ist jedes holomorphe Vektorfeld  $X$  auf  $M$  komplex vollständig.

*Beweis.* Sei  $g : \Omega \rightarrow M$  der maximale holomorphe Fluß zu  $X$ . Wegen  $M$  kompakt existiert dann eine Umgebung  $U$  von  $0 \in \mathbb{C}$  mit  $U \times M \subset \Omega$ , d.h.  $U \subset T$ . Mit  $T + T \subset T$  folgt die Behauptung.  $\square$

Für jedes  $t \in T$  bezeichnen wir die holomorphe Abbildung  $g_t : M \rightarrow M$  auch mit  $\exp(tX)$ . Insbesondere erhalten wir damit eine Abbildung

$$\exp : \mathbf{aut}(M) \rightarrow \mathbf{Aut}(M) .$$

**15.4 Beispiel** Es sei im folgenden  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$  die obere Halbebene und  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

- (i)  $X = \partial/\partial z$  ist vollständig auf  $\mathbb{H}$ , denn es gilt  $\exp(tX)z = z + t$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall ist  $T = \overline{\mathbb{H}}$ .
- (ii)  $X = z\partial/\partial z$  ist vollständig auf  $\mathbb{H}$ . Es gilt  $\exp(tX)z = e^t z$  und  $T = \mathbb{R}$ .
- (iii)  $X = z^2\partial/\partial z$  ist vollständig auf  $\mathbb{H}$ . Es gilt  $\exp(tX)z = z/(1 - tz)$  und  $T = \overline{\mathbb{H}}$ .
- (iv)  $X = iz\partial/\partial z$  ist vollständig auf  $\mathbb{D}$ . Es gilt  $\exp(tX)z = e^{it}z$  und  $T = \overline{\mathbb{H}}$ .
- (v)  $X = (1 - z^2)\partial/\partial z$  ist vollständig auf  $\mathbb{D}$ . Es gilt  $\exp(tX)z = (z + \tanh(t))/((\tanh(t)z + 1))$  und  $T = \mathbb{R}$ .

**15.5 Lemma** Für je zwei vollständige holomorphe Vektorfelder  $X, Y$  auf  $M$  mit  $[X, Y] = 0$  ist auch  $X + Y$  vollständig auf  $M$ , und es gilt

$$\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y) .$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt  $XYh = YXh$  für jedes offene  $U \subset M$  und jede holomorphe Funktion  $h : U \rightarrow F$ . Zur Abkürzung setzen wir  $f_t := \exp(tX)$ ,  $g_t := \exp(tY) \in \mathbf{Aut}(M)$ . Ist  $a \in M$  ein fester Punkt und  $(U, h)$  eine lokale Koordinate um  $a$ , so existiert ein  $\varepsilon > 0$  derart, daß alle auftretenden Reihen für  $|s|, |t| < \varepsilon$  absolut konvergieren und ihre Werte in  $U$  haben. Dann gilt für derartige  $s, t$

$$\begin{aligned} h(f_t g_s(a)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} h(g_s(a)) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} \frac{(sY)^m}{m!} h(a) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(sY)^m}{m!} h(f_t(a)) = h(g_s f_t(a)) . \end{aligned}$$

Folglich gilt  $f_t g_s(a) = g_s f_t(a)$  für alle  $|s|, |t| < \varepsilon$  und damit für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ . Durch  $t \mapsto h_t := f_t g_t$  wird somit ein Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{Aut}(M)$  definiert. Die Abbildung  $h : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  definiert durch  $h(t, a) = h_t(a)$  ist reell-analytisch und läßt sich zu einem holomorphen Fluß  $h : \Omega \rightarrow M$  mit  $\mathbb{R} \times M \subset \Omega$  fortsetzen. Dann ist  $X + Y$  der infinitesimale Generator von  $h$  und insbesondere ist  $X + Y$  vollständig.  $\square$

Wir wollen noch etwas genauer die holomorphen Vektorfelder auf dem projektiven Raum  $M = \mathbb{P}(E)$  studieren, wobei  $E$  ein beliebiger komplexer Banachraum sei. Wir wählen eine abgeschlossene Hyperebene  $H \subset E$  und einen Vektor  $e \in E \setminus H$ . Nach Identifikation von  $z \in H$  mit  $[z \oplus e] \in M$  werde wie zuvor  $H$  als offene und dichte Teilmenge von  $M$  aufgefaßt. Bezüglich der Zerlegung  $E = H \oplus [e]$  hat dann jedes  $A \in \mathcal{L}(E)$  und  $\exp(tA) \in \mathbf{GL}(E)$  eine Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \exp(tA) = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix} ,$$

wobei  $a_t \in \mathcal{L}(E)$ ,  $b_t \in H$ ,  $c_t \in H'$  und  $d_t \in \mathbb{C}$  holomorph von  $t \in \mathbb{C}$  abhängen.  $g_t := \mathbb{P} \exp(tA) \in \mathbf{Aut}(M)$  hat dann wegen 10.14 in der inhomogenen Koordinate  $z \in H$  die Darstellung

$$g_t(z) = \frac{a_t z + b_t}{c_t z + d_t} .$$

Differentiation nach  $t$  in  $t = 0$  liefert als infinitesimalen Generator das holomorphe Vektorfeld

$$(b + (a - d)z - c(z)z) \partial/\partial z$$

auf  $M = \mathbb{P}(E)$ , dargestellt in der inhomogenen Koordinate  $z$ . Nennen wir jedes derartige Vektorfeld eine **infinitesimale Kollineation** von  $\mathbb{P}(E)$ , so hat also die komplexe Liealgebra  $\mathfrak{g}$  aller infinitesimalen Kollineation eine Darstellung als **graduierte Liealgebra**

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 ,$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-1} &= \{b \partial/\partial z : b \in H\} \\ \mathfrak{g}_0 &= \{a(z) \partial/\partial z : a \in \mathcal{L}(H)\} \\ \mathfrak{g}_1 &= \{c(z)z \partial/\partial z : c \in H'\} . \end{aligned}$$

Offenbar besteht  $\mathfrak{g}_\nu$  gerade aus allen Vektorfeldern  $f(z) \partial/\partial z \in \mathfrak{g}$ , für die  $f : H \rightarrow H$  ein homogenes Polynom vom Grade  $\nu + 1$  ist. Setzen wir noch  $\mathfrak{g}_{\pm 2} = 0$ , so gilt  $[\mathfrak{g}_\nu, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\nu+\mu}$  für alle  $\nu, \mu$ . Ohne Beweis zitieren wir (vergl. [12])

**15.6 Satz** *Jedes holomorphe Vektorfeld auf dem projektiven Raum  $\mathbb{P}(E)$  ist eine infinitesimale Kollineation und damit insbesondere komplex vollständig.*

## 16. Automorphismen beschränkter Gebiete

Im folgenden seien  $E$  ein komplexer Banachraum und  $D \subset E$  ein beschränktes Gebiet.  $G := \text{Aut}(D)$  sei die Gruppe aller holomorphen Automorphismen von  $D$  und  $\mathfrak{g} := \mathbf{aut}(D)$  die Menge aller vollständigen holomorphen Vektorfelder auf  $D$ . Mit  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  werde die zugehörige Exponentialabbildung bezeichnet. Jedes holomorphe Vektorfeld  $X \in \mathfrak{B}(D)$  hat eine eindeutige Darstellung  $X = f(z) \partial/\partial z$ , wobei die holomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow E$  gerade durch Anwendung von  $X$  auf die kanonische Injektion  $D \hookrightarrow E$  entsteht.

**16.1 Infinitesimaler Cartanscher Eindeutigkeitsatz** *Existiert zu  $X = f(z) \partial/\partial z \in \mathfrak{g}$  ein Punkt  $a \in D$  mit  $f(a) = 0$  und  $df(a) = 0$ , so gilt  $X = 0$ .*

*Beweis.* Sei  $g_t := \exp(tX)$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt also (die Ableitung nach  $t$  werde durch einen Strich, die Ableitung in ‘Richtung  $D$ ’ durch  $d$  gekennzeichnet)

$$g'_t(a) = f(g_t(a)) \quad g_0(a) = a .$$

Die Funktion  $h(t) \equiv a$  erfüllt wegen  $f(a) = 0$  die gleiche Differentialgleichung zum gleichen Anfangswert wie  $g_t(a)$ , d.h.  $g_t(a) = h(t) = a$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Wegen  $(dg_t(z))' = d(g'_t(z))$  gilt

$$\begin{aligned} (dg_t(z))' &= df(g_t(z))dg_t(z) \in \mathcal{L}(E) \\ dg_0(z) &= \text{id}_E \end{aligned}$$

und speziell für  $z = a$

$$(dg_t(a))' = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R} ,$$

d.h.  $dg_t(a) \in \mathcal{L}(E)$  ist unabhängig von  $t$  und folglich  $dg_t(a) = \text{id}_E$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Der Cartansche Eindeutigkeitsatz 6.6 impliziert  $g_t = \text{id}_D$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Durch Differentiation erhalten wir daraus  $f = 0$  und folglich  $X = 0$ . □

**16.2 Lemma**  $\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g} = \{0\} \subset \mathfrak{B}(D)$ .

*Beweis.* Ist  $X \in \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g}$ , so ist  $X$  komplex vollständig. Für alle  $t \in \mathbb{C}$  existiert also  $g_t = \exp(tX) \in G = \text{Aut}(D)$ . Für jedes  $a \in D$  definiert  $t \mapsto g_t(a)$  eine holomorphe Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow D \subset E$ . Wegen  $D$  beschränkt und Liouville ist diese Funktion konstant, d.h.  $g_t = \text{id}_D$  für alle  $t \in \mathbb{C}$ , d.h.  $X = 0$ . □

Für jedes  $X = f(z) \partial/\partial z \in \mathfrak{B}(D)$  und jedes  $S \subset D$  sei

$$\|X\|_S := \sup_{z \in S} \|f(z)\| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} .$$

Offensichtlich gilt dann

$$\begin{aligned} \|X\|_S &\geq 0 \\ \|tX\|_S &= |t| \cdot \|X\|_S \\ \|X + Y\|_S &\leq \|X\|_S + \|Y\|_S , \end{aligned}$$

dabei kann der Wert  $+\infty$  durchaus vorkommen. Wir schreiben  $S \Subset D$ , wenn endlich viele Punkte  $a_1, \dots, a_n \in D$  und für jedes  $1 \leq k \leq n$  ein Radienpaar  $\rho_k > r_k > 0$  existiert mit

$$S \subset \bigcup_k B_{r_k}(a_k) \subset \bigcup_k B_{\rho_k}(a_k) \subset D .$$

In endlicher Dimension bedeutet  $S \Subset D$  gerade, daß  $S$  relativ-kompakt in  $D$  ist. Ohne Beweis zitieren wir die beiden grundlegenden Sätze

**16.3 Satz (Upmeyer)** Für jedes beschränkte Gebiet  $D$  in dem komplexen Banachraum  $E$  ist  $\mathfrak{g} = \mathbf{aut}(D) \subset \mathfrak{A}(D)$  eine reelle Lie-Algebra. Besitzt  $S \Subset D$  einen inneren Punkt, so ist  $\mathfrak{g}$  eine Banach-Lie-Algebra bezüglich  $\|\cdot\|_S$ , und je zwei derartige Normen sind äquivalent auf  $\mathfrak{g}$ , d.h.

- (i)  $X, Y \in \mathfrak{g} \implies X + Y, [X, Y] \in \mathfrak{g}$   
(ii)  $\exists c > 0$  mit

$$\begin{aligned} \|X + Y\|_S &\leq c(\|X\|_S + \|Y\|_S) \\ \|[X, Y]\|_S &\leq c\|X\|_S\|Y\|_S \end{aligned}$$

- (iii)  $\mathfrak{g}$  ist vollständig bezüglich  $\|\cdot\|_S$ .

**16.4 Satz (Vigué)** Für jedes  $a \in D$  ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow E \times \mathcal{L}(E) \\ f(z) \partial/\partial z &\mapsto (f(a), df(a)) \end{aligned}$$

ein  $\mathbb{R}$ -linearer Homöomorphismus auf einen abgeschlossenen  $\mathbb{R}$ -linearen Unterraum.

Dieser Satz kann als eine topologische Version des infinitesimalen Cartanschen Eindeutigkeitsatzes gedeutet werden.

Wir wollen unsere bisherigen Überlegungen anwenden auf den Fall, daß  $D \subset E$  ein beschränktes kreisförmiges Gebiet (d.h.  $tD \subset D$  für alle  $t$  mit  $|t| = 1$ ) mit  $0 \in D$  ist. Mit

$$\mathbf{GL}(D) = \{g \in \mathbf{GL}(E) : g(D) = D\} \subset \mathbf{Aut}(D)$$

bezeichnen wir die lineare Gruppe von  $D$ . Ferner sei

$$\mathfrak{gl}(D) := \{\lambda \in \mathcal{L}(E) : \exp(\mathbb{R}\lambda) \subset \mathbf{GL}(D)\} .$$

Dann ist  $\lambda \partial/\partial z \in \mathbf{aut}(D)$  für alle  $\lambda \in \mathfrak{gl}(D)$ .

**16.5 Satz** Sei  $D \subset E$  ein beschränktes kreisförmiges Gebiet mit  $0 \in D$  und  $\mathfrak{g} := \mathbf{aut}(D)$ . Dann existiert ein abgeschlossener  $\mathbb{C}$ -linearer Teilraum  $U \subset E$  und eine injektive konjugiert lineare stetige Abbildung

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathcal{L}_s^2(E) \\ a &\mapsto a^* \end{aligned}$$

mit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} ,$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{f(z) \partial/\partial z \in \mathfrak{g} : f(0) = 0\} = \{\lambda \partial/\partial z : \lambda \in \mathfrak{gl}(D)\} \\ \mathfrak{p} &= \{f(z) \partial/\partial z \in \mathfrak{g} : df(0) = 0\} = \{(a - a^*(z, z)) \partial/\partial z : a \in U\} \end{aligned}$$

abgeschlossene  $\mathbb{R}$ -lineare Teilräume von  $\mathfrak{g}$  sind mit

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k} .$$

Insbesondere ist  $f$  für jedes  $f(z) \partial/\partial z \in \mathfrak{g}$  ein Polynom vom Grade  $\leq 2$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung enthält  $\mathfrak{g}$  das Vektorfeld  $Z := iz \partial/\partial z$ . Mit  $\Theta := \text{ad } Z$  bezeichnen wir den durch

$$X \mapsto [Z, X]$$

definierten linearen Endomorphismus von  $\mathfrak{A}(D)$ . Jedes  $X = f(z) \partial/\partial z \in \mathfrak{g}$  hat in einer geeigneten Umgebung von  $0 \in D$  eine eindeutige homogene Entwicklung

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k ,$$

wobei für  $X_k = f_k(z) \partial/\partial z$  die Koeffizientenfunktion  $f_k : E \rightarrow E$  ein homogenes Polynom vom Grade  $k$  ist. Nun gilt  $\Theta(X_k) = i(1-k)X_k$  für alle  $k$  und folglich

$$\Theta X = \sum_{k=0}^{\infty} i(1-k)X_k \in \mathfrak{g} .$$

Für jedes reelle Polynom  $p(\Theta) \in \mathbb{R}[\Theta]$  in  $\Theta$  gilt also auch

$$p(\Theta)X = \sum_{k=0}^{\infty} p(i(1-k))X_k \in \mathfrak{g} .$$

Speziell für  $q(\Theta) = \Theta^3 + \Theta$  gilt

$$q(i(1-k)) = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, 2 ,$$

d.h. für

$$Y := g(z) \partial/\partial z := q(\Theta)X = \sum_{k=3}^{\infty} q(i(1-k))X_k \in \mathfrak{g}$$

gilt  $g(0) = 0$  und  $dg(0) = 0$ , d.h.  $Y = 0$  auf Grund des infinitesimalen Cartanschen Eindeutigkeitsatzes. Wegen  $q(i(1-k)) \neq 0$  für  $k \geq 3$  muß dann aber  $X_k = 0$  für  $k \geq 3$  gelten, d.h.

$$X = X_0 + X_1 + X_2 .$$

Für  $p(\Theta) = \Theta^4$  gilt

$$p(\Theta)X = X_0 + X_2 \in \mathfrak{g}$$

und somit auch  $X_1 \in \mathfrak{g}$ . Dies impliziert die Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{X_1 : X \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{gl}(D) \partial/\partial z \\ \mathfrak{p} &= \{X_0 + X_2 : X \in \mathfrak{g}\} = \{f(z) \partial/\partial z \in \mathfrak{g} : df(0) = 0\} . \end{aligned}$$

Die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &\rightarrow E \\ f(z) \partial/\partial z &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

ist wegen  $df(0) = 0$  und 16.4 ein  $\mathbb{R}$ -linearer Homöomorphismus auf einen abgeschlossenen  $\mathbb{R}$ -linearen Teilraum  $U \subset E$ . Also existiert eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathcal{L}_s^2(E) \\ a &\mapsto a^* \end{aligned}$$

mit  $\mathfrak{p} = \{(a - a^*(z, z)) \partial/\partial z : a \in U\}$ . Für  $X = (a - a^*(z, z)) \partial/\partial z$  gilt

$$\Theta X = (-ia + ia^*(z, z)) \partial/\partial z ,$$

woraus  $iU = U$  und  $(ia)^* = -ia^*$  folgt. Also ist  $U$  ein  $\mathbb{C}$ -linearer Teilraum und  $a \mapsto a^*$  eine konjugiert lineare Abbildung.  $\square$

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

**16.6 Folgerung** Ist  $U = E$ , so ist das kreisförmige Gebiet  $D$  homogen (d.h.  $G(0) = D$ ).

*Beweis.* Betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : E &\rightarrow D \\ a &\longmapsto \exp(a - a^*(z, z) \partial/\partial z)(0). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist reell-differenzierbar und hat als Ableitung  $d\psi(0) : E \rightarrow E$  die Identität. Der Satz über implizite Funktionen ergibt, daß  $\psi(E)$  und damit insbesondere  $G(0)$  eine Umgebung von  $0 \in D$  darstellt. Wegen 11.24 gilt damit aber bereits  $G(0) = D$ .  $\square$

**16.7 Beispiel** Sei  $E$  ein komplexer Hilbertraum mit innerem Produkt  $(\cdot | \cdot)$ , und sei  $D \subset E$  die offene Einheitskugel. Dann gilt für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \{ \lambda \partial/\partial z : \lambda \in \mathcal{L}(E), \lambda + \lambda^* = 0 \} \\ \mathfrak{p} &= \{ (a - (z|a)z) \partial/\partial z : a \in E \}, \end{aligned}$$

d.h.  $U = E$  und  $a^*(z, w) = \frac{1}{2}((z|a)w + (w|a)z)$ .

*Beweis.* Sei  $\lambda \in \mathcal{L}(E)$ . Dann ist  $\lambda \partial/\partial z \in \mathfrak{k}$  genau dann, wenn  $\exp(t\lambda) \in GL(E)$  unitär ist für alle  $t \in \mathbb{R}$ , d.h.

$$\exp(t\lambda) \exp(t\lambda)^* = 1_E$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ , was gerade  $\lambda + \lambda^* = 0$  bedeutet. Sei nun  $a \in E$  fest und  $X = f(z) \partial/\partial z$  für  $f(z) := a - (z|a)z$ . Der Rand  $\partial D = \{z \in E : \|z\| = 1\}$  von  $D$  ist eine glatte reelle Untermannigfaltigkeit von  $E$  und für alle  $z \in \partial D$  gilt

$$\begin{aligned} (f(z)|z) &= (a - (z|a)z|z) \\ &= (a|z) - (z|a) \in i\mathbb{R}, \end{aligned}$$

d.h.  $X$  ist tangentiell an  $\partial D$ . Also ist  $X$  vollständig auf  $D$  und

$$\{(a - (z|a)z) \partial/\partial z : a \in E\} \subset \mathfrak{p}.$$

Da  $f(z) \partial/\partial z \mapsto f(0)$  auf  $\mathfrak{p}$  injektiv ist, muß Gleichheit gelten.  $\square$

## Anhang

Im folgenden werden einige grundlegende Begriffe über reelle bzw. komplexe Banachräume rekapituliert. Dazu sei als Grundkörper  $\mathbb{K}$  einer der beiden Körper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  fest gewählt. Banachraum meint dann im folgenden stets  $\mathbb{K}$ -Banachraum und linear meint  $\mathbb{K}$ -linear.

Es seien  $E, F, G$  Banachräume, deren Normen jeweils mit  $\|\cdot\|$  bezeichnet werden. Dann ist eine lineare Abbildung  $\lambda : E \rightarrow F$  genau dann stetig, wenn

$$(A.1) \quad \|\lambda\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda(x)\| < \infty$$

gilt, und der Raum  $\mathcal{L}(E, F)$  aller stetigen linearen Abbildungen  $E \rightarrow F$  ist selbst ein Banachraum. Offensichtlich gilt

$$(A.2) \quad \|\lambda(x)\| \leq \|\lambda\| \cdot \|x\| \quad \text{und} \quad \|\mu \circ \lambda\| \leq \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$$

für alle  $x \in E$ ,  $\lambda \in \mathcal{L}(E, F)$  und  $\mu \in \mathcal{L}(F, G)$ .

Der Banachraum  $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  aller stetigen Linearformen auf  $E$  heißt der **Dualraum** von  $E$ . Mit diesem gilt der leicht mit dem Lemma von Zorn ableitbare, aber besonders wichtige

**A.3 Satz von Hahn-Banach** Zu jedem  $x \in E$  existiert ein  $\lambda \in E'$  mit  $\|\lambda\| \leq 1$  und  $\lambda(x) = \|x\|$ .

Dieser wird häufig in folgender Form angewandt: Zwei Vektoren  $x, y \in E$  stimmen bereits dann überein, wenn  $\lambda(x) = \lambda(y)$  für alle  $\lambda \in E'$  gilt.

Dem Banachraum  $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$  kommt keine spezielle Bedeutung zu. Vermöge  $\lambda \mapsto \lambda(1)$  wird ein isometrischer Isomorphismus  $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E) \approx E$  gestiftet. Wir wollen beide Räume in diesem Sinne identifizieren.

Für jedes  $k \geq 1$  ist auch des  $k$ -fach direkte Produkt  $E^k := E \times \dots \times E$  ein Banachraum vermöge der Norm

$$(A.4) \quad \|x\| := \max_{1 \leq j \leq k} \|x_j\|$$

für alle  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$ . Eine Abbildung  $q : E^k \rightarrow F$  heißt **multilinear** – oder auch **k-linear** – wenn für jedes  $a \in E^k$  und jedes  $1 \leq j \leq k$  durch  $y \mapsto q(a_1, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_k)$  eine lineare Abbildung  $E \rightarrow F$  definiert wird. Wieder ist  $q$  genau dann stetig, wenn

$$(A.5) \quad \|q\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|q(x)\| < \infty$$

gilt, und der Raum  $\mathcal{L}^k(E, F)$  aller stetigen  $k$ -linearen Abbildungen  $E^k \rightarrow F$  ist ein Banachraum in der durch (A.5) definierten Norm. Für alle  $x \in E^k$  gilt zudem

$$(A.6) \quad \|q(x)\| \leq \|q\| \cdot \|x\|^k .$$

Offensichtlich gilt  $\mathcal{L}^1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ , und wir setzen  $\mathcal{L}^0(E, F) := F$ . Im Falle  $\dim(E) < \infty$  ist jede multilineare Abbildung  $q : E^k \rightarrow F$  stetig.

Für jedes  $k \geq 0$  und jedes  $p \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^k(E, F))$  definiert

$$q(x_0, x_1, \dots, x_k) := p(x_0)(x_1, \dots, x_k)$$

ein Element  $p \in \mathcal{L}^{k+1}(E, F)$ , und die Zuordnung  $p \mapsto q$  stiftet einen isometrischen Isomorphismus

$$(A.7) \quad \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^k(E, F)) \approx \mathcal{L}^{k+1}(E, F) .$$

In diesem Sinne wollen wir diese beiden Banachräume identifizieren.

Für jede stetige  $E$ -wertige Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow E$  ist das Integral

$$\int_0^1 f(t) dt \in E$$

wie folgt definiert: Da  $f$  sogar gleichmäßig stetig auf  $[0, 1]$  ist, existiert eine Folge von Treppenfunktionen  $f_k : [0, 1] \rightarrow E$ , die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Damit setzt man dann

$$\int_0^1 f(t) dt := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k(t) dt \in E$$

(die Folge der Integrale ist eine Cauchy-Folge in  $E$ , und der Limes hängt nicht ab von der Auswahl der approximierenden Folge). Eine Funktion  $h : [0, 1] \rightarrow E$  heißt dabei eine **Treppenfunktion**, wenn endlich viele Zwischenpunkte  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  existieren, so daß auf jedem offenen Teilintervall  $]t_{j-1}, t_j[$  die Funktion konstant ist (etwa  $\equiv a_j \in E$ ).

$$\int_0^1 h(t) dt := \sum_{j=1}^n a_j(t_j - t_{j-1}) \in E$$

hängt dann offenbar nicht von der Auswahl der Zwischenpunkte ab.

Ist schließlich  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f : U \rightarrow F$  eine stetige Abbildung und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  eine glatte Kurve (d.h. stetig differenzierbar), so ist das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \in E$$

in naheliegender Weise definiert. Für dieses gilt

$$(A.8) \quad \left\| \int_{\gamma} f(z) dz \right\| \leq L(\gamma) M ,$$

wobei  $L(\gamma) := \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$  die Bogenlänge von  $\gamma$  und  $M := \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f(\gamma(t))\|$ . Ferner gilt

$$(A.9) \quad \lambda \left( \int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} \lambda \circ f(z) dz \in F$$

für alle  $\lambda \in \mathcal{L}(E, F)$  (für Treppenfunktionen ist das trivial, und wegen der Stetigkeit von  $\lambda$  zieht sich diese Identität durch einen gleichmäßigen Limes hindurch).

## Literatur

1. Behnke, H. und Thullen, P.: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1970) 2. Aufl.
2. Chae, S.B.: *Holomorphy and Calculus in Normed Spaces*. Marcel Dekker Inc., New York and Basel (1985)
3. Dieudonné, J.: *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York (1968)
4. Forster, O.: *Komplexe Analysis*. Vorlesungsausarbeitung Regensburg (1973)
5. Franzoni, T. and Vesentini, E.: *Holomorphic Maps and Invariant Distances*. North Holland, Amsterdam (1980)
6. Grauert, H. und Fritzsche, K.: *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1974)
7. Hayden, T.L. and Suffridge, T.J., eds.: *Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy*. University of Kentucky 1973 Springer Lecture Notes Nr. 364 (1974)
8. Isidro, J.M. and Stachó, L.L.: *Holomorphic Automorphism Groups in Banach Spaces: An Elementary Introduction*. North Holland, Amsterdam (1984)
9. Nachbin, L.: *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*. Springer-Verlag, Berlin (1969)
10. Narasimhan, R.: *Several Complex Variables*. Chicago Lectures in Mathematics (1971)
11. Kaup, L. and Kaup, B.: *Holomorphic Functions of Several Variables*. Walter de Gruyter, Berlin New York (1983)
12. Kaup, W.: *Über die Automorphismen Graßmannscher Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension*. Maht. Z. 144, (75-96) (1975)
13. Ramis, J.-P.: *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1970)

- Abbildungssatz, Riemannscher . . . . . 15  
 Ableitung . . . . . 3  
 affin . . . . . 17, 27  
 affine Abbildung . . . . . 3  
 analytisch . . . . . 8, 13, 17  
 analytische Teilmenge . . . . . 17  
 Atlas . . . . . 25, 27, 29  
 Auswertungsabbildung . . . . . 21  
 Automorphismengruppe . . . . . 3  
 Automorphismus . . . . . 3, 23-25  
 Bahn . . . . . 26, 33  
 Bahnenraum . . . . . 26  
 Bereich über . . . . . 19, 26  
 Bergman-Metrik . . . . . 33  
 beschränkte Gebiete . . . . . 43  
 Bestimmungsfläche . . . . . 11, 34  
 biholomorph . . . . . 3, 15, 23, 25, 27, 30-31  
 – äquivalent . . . . . 3, 15  
 Carathéodory-Seminorm . . . . . 31  
 Cartanscher Eindeutigkeitssatz . . . . . 15, 43  
 Cauchy-Riemann . . . . . 3  
 Cauchysche Integralformel . . . . . 5, 9, 13  
 Cauchysche Ungleichungen . . . . . 14  
 Codimension . . . . . 17  
 Übergangsfunktion . . . . . 25, 27  
 Direktes Produkt . . . . . 26  
 diskret . . . . . 17  
 diskrete Untergruppe . . . . . 26  
 Dizylinder . . . . . 11, 15, 34  
 Dualraum . . . . . 27-28, 30, 46  
 Dunford . . . . . 5  
 äquivalente Normen . . . . . 3  
 eigentlich kreisförmig . . . . . 23  
 einfachzusammenhängend . . . . . 15  
 Einheitskreis . . . . . 30  
 –kugel . . . . . 16, 32  
 –polyzylinder . . . . . 31  
 Einheitssphäre . . . . . 27  
 Endomorphismenalgebra . . . . . 4, 13  
 Enveloppe . . . . . 22  
 euklidische Kugel . . . . . 11  
 Exponentialabbildung . . . . . 43  
 $\mathcal{F}$ -Erweiterung . . . . . 20  
 $\mathcal{F}$ -Hülle . . . . . 20, 22  
 Finslermetrik . . . . . 29  
 Fluß, holomorpher . . . . . 39  
 Fluß, maximaler . . . . . 39  
 formale Potenzreihe . . . . . 7-8, 10  
 Fortsetzung, holomorphe . . . . . 16  
 Fréchet-Ableitung . . . . . 3  
 Fußpunkt . . . . . 28  
 Funktionskeim . . . . . 21  
 Garbe . . . . . 21  
 Gateaux . . . . . 5  
 Gebiet . . . . . 18  
 – über . . . . . 19  
 gebrochen lineare Transformation . . . . . 28  
 G-holomorph . . . . . 5, 12  
 Grad . . . . . 8  
 gradierte Liealgebra . . . . . 43  
 Gruppenhomomorphismus, holomorpher . . . . . 14  
 Hahn-Banach . . . . . 5, 14, 22, 27, 30, 46  
 Halm . . . . . 21  
 Hartogs . . . . . 12  
 –gebiet . . . . . 19  
 –scher Kontinuitätssatz . . . . . 16  
 Hausdorffraum . . . . . 19  
 hermitesche Metrik . . . . . 33  
 Hülle, konvexe . . . . . 16  
 Hilbertraum . . . . . 14, 32  
 holomorph . . . . . 3, 13, 20, 22, 25  
 –e Fortsetzung . . . . . 16, 18, 20  
 –e Karte . . . . . 29  
 –er Atlas . . . . . 25  
 –er Fluß . . . . . 39  
 –es Vektorfeld . . . . . 41  
 – fortsetzbar . . . . . 20  
 Holomorphiegebiet . . . . . 19-20  
 Holomorphiehülle . . . . . 19-20, 22, 24  
 – separabel . . . . . 22  
 – verträglich . . . . . 25  
 homogen . . . . . 28, 31  
 Hyperebene . . . . . 27-28, 34-35, 42  
 Identitätssatz . . . . . 14, 16-18, 21, 23  
 Immersion . . . . . 26  
 Indikatrix . . . . . 30  
 infinitesimale Kollineation . . . . . 43  
 infinitesimaler Generator . . . . . 41  
 inhomogene Koordinate . . . . . 28  
 Integralkurve . . . . . 38  
 irreduzibel . . . . . 32  
 isolierte Nullstellen . . . . . 17  
 isometrisch . . . . . 31  
 Isotropiegruppe . . . . . 35  
 Jacobi-Identität . . . . . 38  
 Jordanscher Kurvensatz . . . . . 20

- Karte . . . . . 25
- Kegel . . . . . 38
- Keim, induzierter . . . . . 21
- Kettenregel . . . . . 3
- Kürzungsregel . . . . . 26
- Klammerprodukt . . . . . 37
- $k$ -lineare Abbildung . . . . . 4
- Kobayashi-Pseudonorm . . . . . 30
- komplex analytisch . . . . . 8
- differenzierbar . . . . . 3, 13
- e Ableitung . . . . . 3
- e Integralkurve . . . . . 38
- e Mannigfaltigkeit . . . . . 25
- e Struktur . . . . . 25
- projektive Gerade . . . . . 27
- kontraktiv . . . . . 31
- konvergente Potenzreihe . . . . . 8
- Konvergenzgebiet . . . . . 8, 10
- Konvergenzradius . . . . . 9
- kreisförmig . . . . . 8, 15, 23, 44
- Kugel, euklidische . . . . . 15
- Laurentreihe . . . . . 13
- Lie-Algebra . . . . . 38
- Lie-Produkt . . . . . 37-38
- Linearform, stetige . . . . . 5
- Linksmultiplikation . . . . . 4
- logarithmisch konvex . . . . . 24
- lokal-beschränkt . . . . . 18, 29
- lokal-biholomorph . . . . . 22-23, 25-26, 38
- lokal-gleichmäßig konvergent . . . . . 7, 13, 32
- lokal-linearisierbar . . . . . 25
- lokal-topologisch . . . . . 19, 21
- Mannigfaltigkeit, homogene . . . . . 28
- , komplexe . . . . . 25
- , normierte . . . . . 30
- , pseudonormierte . . . . . 29
- Maximum-Norm . . . . . 9
- Maximumprinzip . . . . . 14, 16, 19
- , striktes . . . . . 15
- Menge, analytische . . . . . 17
- Metrik, hermitesche . . . . . 33
- Monom . . . . . 9
- Multi-Index . . . . . 9
- multilinear . . . . . 47
- normierte Mannigfaltigkeit . . . . . 30
- Nullstellenmenge . . . . . 18
- orthogonales Komplement . . . . . 34
- partielle (komplexe) Ableitung . . . . . 9
- partiell holomorph . . . . . 9
- Poincaré-Metrik . . . . . 30, 34
- Polarisationsformel . . . . . 6, 9
- Polynom . . . . . 8
- Polynom, homogenes . . . . . 43
- ,  $k$ -homogenes . . . . . 6, 12
- Potenzreihe . . . . . 5-6
- , 1-fache . . . . . 10
- , formale . . . . . 7
- , konvergente . . . . . 8
- Potenzreihenentwicklung . . . . . 5, 12, 14, 21
- ,  $n$ -fache . . . . . 10
- projektiver Raum . . . . . 27, 42
- projektiv-unitäre Gruppe . . . . . 34-35
- Pseudonorm . . . . . 29
- Quotientenraum . . . . . 26
- Quotiententopologie . . . . . 26
- reell-analytisch . . . . . 35-36
- Reinhardtgebiet . . . . . 10, 24
- , vollkommenes . . . . . 10
- Richtungsableitung . . . . . 5
- Riemannsche Fläche . . . . . 25
- r Hebbarkeitssatz . . . . . 18-19
- Zahlenkugel . . . . . 25, 27, 34, 38
- rund . . . . . 14
- schlicht . . . . . 20
- Schnitt . . . . . 20
- Schwarzsches Lemma . . . . . 16, 30
- Seminorm . . . . . 29
- Submersion . . . . . 26, 28
- symmetrisch . . . . . 6, 13
- Tangentialbündel . . . . . 28-29, 37
- Tangentialraum . . . . . 28-29, 31, 33
- Tangentialvektor . . . . . 28-30, 32, 36
- tangentuell . . . . . 28, 38
- Torus . . . . . 10-11, 20, 26
- totale Ableitung . . . . . 3
- unendlich ferne Hyperebene . . . . . 28
- unitäre Gruppe . . . . . 34-35
- Vektorfeld . . . . . 37
- Viertelsebene, absolute . . . . . 10
- vollkommenes Hartogsgebiet . . . . . 19
- vollkommenes Reinhardtgebiet . . . . . 10
- vollkommen kreisförmig . . . . . 8, 23
- vollständiges Vektorfeld . . . . . 38
- zusammenziehbar . . . . . 15