Prof. Dr. Ulrich Felgner Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Logik

Blatt 10

DEFINITION: Sei $\mathfrak{M} =< M, f_j, R_k, c_i >_{j\in J, k\in K, i\in I}$ $\mathfrak{L}$-Struktur einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ mit Signatur $< \sigma, \tau, I >$.
Eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A} =< A, g_j, S_k, d_i >_{j\in J, k\in K, i\in I}$ heißt genau dann *Substruktur* von $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{M}$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

($S1$) $A \subseteq M$

($S2$) für alle $j \in J$, für alle $a_1, \ldots a_{\sigma(j)} \in A$ gilt: $f_j(\vec{a}) = g_j(\vec{a})$

($S3$) für alle $k \in K$ gilt: $S_k = R_k \cap A^{\tau(k)}$

($S4$) für alle $i \in I$ gilt: $c_i = d_i$

DEFINITION: Eine $\mathfrak{L}$-Aussage ϕ heißt genau dann *universelle Aussage*, wenn sie in pränexer Normalform steht und höchstens Allquantoren vorkommen.
D.h.: $\phi \doteq \forall v_{i_1} \ldots \forall v_{i_n} \psi$ wobei ψ quantorenfrei und $0 \leqslant n \in \mathbb{N}$.

DEFINITION: Für eine Menge Σ von $\mathfrak{L}$-Aussagen ist der *universelle Teil* $\Sigma_\forall$ von Σ wie folgt definiert:
$\Sigma_\forall := \{\phi;\ \phi\ \mathfrak{L}\text{-Aussage}, \Sigma \vdash \phi$ und es gibt universelle Aussage ψ mit $\vdash \phi \leftrightarrow \psi\}$

(48) Sei $\mathfrak{L}$ die Sprache der Körpertheorie mit den nichtlogischen Zeichen $\dot{+}, \dot{\cdot}$, $\dot{0}$ und $\dot{1}$. Sei die $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathbb{Q} =< \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 >$ der Körper der rationalen Zahlen. Prüfen Sie, ob folgende $\mathfrak{L}$-Strukturen Substrukturen von $\mathbb{Q}$ sind:

  (a) der Körper mit genau zwei Elementen $\mathbb{F}_2 =< \{0, 1\}, +, \cdot, 0, 1 >$.

  (b) der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} =< \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 >$. (1 Punkt)

(49) Sei $\Sigma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Aussagenmenge. Zeigen Sie, dass jede Substruktur $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$ eines Σ-Modells $\mathfrak{M}$ auch ein Modell von $\Sigma_\forall$ ist. (1 Punkt)

(50) NEU: Geben Sie eine geeignete Sprache $\mathfrak{L}$ erster Stufe und eine quantorenfreie $\mathfrak{L}$-Formel ϕ mit $\mathrm{Fr}(\phi) = \{v_0\}$ an, sodass folgendes gilt: Es gibt keine universelle $\mathfrak{L}$-Aussage ψ, sodass ψ und $\exists v_0 \phi$ logisch-äquivalent sind. Folgern Sie dann daraus, dass der universelle Teil $\Sigma_\forall$ einer Aussagenmenge $\Sigma \subseteq \mathfrak{L}$ im Allgemeinen nicht deduktiv-abgeschlossen ist. (3 Punkte)

(51) Geben Sie eine formale Sprache $\mathfrak{L}$ an, in der man die Axiome der Gruppentheorie formulieren kann und die Substrukturen von Gruppen Untergruppen sind. (1 Punkt)

(52) Sei T eine vollständige Theorie, die wenigstens eine Individuenkonstante enthält. Definieren Sie $[t] := \{s$ konstanter Term in $\mathfrak{L};\ T \vdash t = s\}$ und $M := \{[t];\ t$ konstanter Term in $\mathfrak{L}\}$. Interpretieren Sie die nicht-logischen Zeichen von T wie in Henkins Konstruktion. Sei $\mathfrak{M} =< M, \ldots >$ die resultierende $\mathfrak{L}$-Struktur. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}$ ein Modell von $T_\forall$ ist. ($\mathfrak{M} \models T_\forall$) (3 Punkte)

(53) Sei $\mathfrak{L}$ Sprache der Gruppentheorie mit den nichtlogischen Zeichen $\dot{:}$ und $\dot{1}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\Sigma := \{\phi;\ \phi$ ist Gruppenaxiom$\} \cup \{\forall v : v = \dot{1}\}$ eine Henkin-Theorie ist. (1 Punkt)

Abgabe: Am Montag, dem 17. Juli 2006, in der Vorlesung.