Prof. Dr. Ulrich Felgner Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Logik

Blatt 4

(15) *mündlich:* Prüfen Sie folgende Aussagen:

(a) $\{\Phi_1, \Phi_2\} \models \Psi$ ist äquivalent zu $\Phi_1 \vee \Phi_2 \models \Psi$.

(b) $\{\Phi_1, \Phi_2\} \models \Psi$ ist äquivalent zu $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \models \Psi$.

(16) Prüfen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn $\Sigma \models \Phi$ oder $\Sigma \models \Psi$, dann auch $\Sigma \models \Phi \vee \Psi$.

(b) Wenn $\Sigma \models \Phi \vee \Psi$, dann auch $\Sigma \models \Phi$ oder $\Sigma \models \Psi$. (2 Punkte)

(17) Zeigen Sie, dass $\Phi \vee \Psi \models \Theta$ genau dann gilt, wenn $\Phi \models \Theta$ und $\Psi \models \Theta$ gilt. (1 Punkt)

(18) Sei $\Psi \in \mathfrak{L}$ beliebige Aussage mit $At(\Psi) = \{A_0, \dots A_{n-1}\}$.
Sei $M = \{f;\ f : \{0, \dots n-1\} \to \{0, 1\}\} = 2^n$ Menge von Funktionen.
Zu einer Funktion $f \in M$ sei die Formel Ψ_f diejenige Formel, die aus Ψ entsteht, wenn man jedes Vorkommen von A_i in Ψ ($0 \leq i \leq n-1$) im Falle von $f(i) = 0$ durch $(A_0 \wedge \neg A_0)$ und ansonsten durch $(A_0 \vee \neg A_0)$ ersetzt.
Sei ferner $\Psi^\circ :\simeq \bigvee_{f \in M} \Psi_f$ die Disjunktion all dieser Ausdrücke Ψ_f.
Beweisen Sie, dass Ψ genau dann erfüllbar ist, wenn Ψ° eine Tautologie ist. (2 Punkte)

(19) Zeigen Sie folgende Äquivalenzen:

(a) $(\Phi \to (\Psi \leftrightarrow \Theta)) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\Phi \wedge \Psi \leftrightarrow \Phi \wedge \Theta)$

(b) $(\neg\Phi \to (\Psi \leftrightarrow \Theta)) \mathrel{=\!\mid\!\models} (\Phi \vee \Psi \leftrightarrow \Phi \vee \Theta)$ (2 Punkte)

(20) Es gelte $\models (\Phi_1 \wedge \Phi_2) \to \Psi$. Zeigen Sie, dass es Ψ_1 und Ψ_2 gibt, so dass $\models \Phi_1 \to \Psi_1$, $\models \Phi_2 \to \Psi_2$ und $\models (\Psi_1 \wedge \Psi_2) \leftrightarrow \Psi$ gilt. (2 Punkte)

(21) Es seien $\mathfrak{X}_1, \dots \mathfrak{X}_n \subseteq \mathfrak{L}$ konsequential abgeschlossene Formelmengen mit $\mathfrak{X}_i \neq \bigcup_{k=1}^n \mathfrak{X}_k$ für jedes $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{k=1}^n \mathfrak{X}_k$ nicht konsequential abgeschlossen ist. (1 Punkt)

Abgabe: Am Montag, dem 29. Mai 2006, in der Vorlesung.

Informationen zur Vorlesung:
http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~logik/