noheadfoot,top=40mm,bottom=40mm,left=35mm,right=35mm

Prof. Dr. Ulrich Felgner Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Logik

Blatt 5

DEFINITION: Eine Struktur $< M, \leq >$ heißt genau dann *Präordnung*, wenn (P1) $\forall x \in M : x \leq x$ und (P2) $\forall x, y, z \in M : x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$ gelten.

DEFINITION: Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq \mathfrak{L}(\neg, \rightarrow)$ heißt genau dann *unabhängig*, wenn es kein $\Phi \in \Sigma$ gibt, sodass $\Sigma - \{\Phi\} \models \Phi$ gilt.

DEFINITION: Zwei Formelmengen $\Sigma, \Gamma \subseteq \mathfrak{L}(\neg, \rightarrow)$ heißen genau dann *logisch-äquivalent*, wenn $\{\Psi \in \mathfrak{L};\ \Sigma \models \Psi\} = \{\Psi \in \mathfrak{L};\ \Gamma \models \Psi\}$ gilt.

(22) Zeigen Sie, dass eine Formelmenge $\Sigma \subseteq \mathfrak{L}(\neg, \rightarrow)$ genau dann unabhängig ist, wenn jede endliche Teilmenge von Σ unabhängig ist.
(*Hinweis: Betrachten Sie den Kompaktheits-Satz.*)
(1 Punkt)

(23) Zeigen Sie, dass es zu jeder endlichen Formelmenge $\Sigma \subseteq \mathfrak{L}(\neg, \rightarrow)$ eine logisch-äquivalente unabhängige Teilmenge $\Delta \subseteq \Sigma$ gibt.
(*Hinweis: Mit $\Phi \leq \Psi$ falls $\models \Psi \rightarrow \Phi$ erhält man eine Präordnung auf* $\mathfrak{L}(\neg, \rightarrow)$.)
(2 Punkte)

(24) Zeigen Sie, dass es eine abzählbar-unendliche Formelmenge $\Sigma \subseteq \mathfrak{L}(\neg, \rightarrow)$ gibt, die keine logisch-äquivalente unabhängige Teilmenge besitzt.
(2 Punkte)

(25) Zeigen Sie, dass es zu jeder Menge $\Sigma \subseteq \mathfrak{L}(\neg, \rightarrow)$ eine logisch-äquivalente unabhängige Menge gibt.
(2 Punkte)

(26) Zeigen Sie folgende Aussagen unter Verwendung des Aussagenkalküls:

(a) Kettenschluss:
Falls $\Sigma \vdash \Phi \rightarrow \Psi$ und $\Sigma \vdash \Psi \rightarrow \Theta$, dann auch $\Sigma \vdash \Phi \rightarrow \Theta$. (1 Punkt)

(b) nach PEIRCE: $\vdash ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow \Phi) \rightarrow \Phi$
(*Hinweis: Verwenden Sie den Kettenschluss.*) (2 Punkte)

Abgabe: Am Montag, dem 5. Juni 2006, in der Vorlesung.

Informationen zur Vorlesung:
http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~logik/