Prof. Dr. Ulrich Felgner Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Logik

Blatt 9

(44) ZUSATZAUFGABE: Prüfen Sie, ob $\forall v(\Phi \to \Phi) \to (\Phi \to \forall v\Phi)$ im Kalkül herleitbar ist. (1 Punkt)

(45) Geben Sie für folgende Formeln eine Herleitung im Kalkül an:

(a) $\forall v(\Phi \to \Psi) \to (\forall v\Phi \to \forall v\Psi)$ (2 Punkte)

(b) $\forall v(\Phi \to \Psi) \to (\exists v\Phi \to \exists v\Psi)$
(*Hinweis: Verwenden Sie Teil (a) dieser Aufgabe.*) (1 Punkt)

(c) $\forall v_1\forall v_2\Phi \to \forall v_2\forall v_1\Phi$ (2 Punkte)

(46) Sei $\mathfrak{M} =< M, \dots >$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur, $\mathfrak{L}(M) := \mathfrak{L} \sqcup \{\dot{m};\ m \in M\}$ die Spracherweiterung, die für jedes Objekt aus dem Universum eine zusätzliche Individuenkonstante enthält.
Ferner sei $T := \{\Phi;\ \Phi \text{ ist } \mathfrak{L}(M)\text{-Aussage und } < M, \dots, m >_{m\in M} \models \Phi\}$ die $\mathfrak{L}(M)$-Theorie von $\mathfrak{M}$. (Jedes $\dot{m}$ wird durch m interpretiert.)

Zeigen Sie, dass T eine vollständige Henkin-Theorie ist. (2 Punkte)

DEFINITION: Sei $\mathfrak{L}^\star$ eine Spracherweiterung von $\mathfrak{L}$. Seien $T \subseteq \mathfrak{L}$ und $S \subseteq \mathfrak{L}^\star$ zwei Aussagen-Mengen mit $T \subseteq S$. S heißt genau dann *konservative Erweiterung* von T, wenn für jede $\mathfrak{L}$-Aussage Φ gilt: $T \vdash_{\mathfrak{L}} \phi \quad \Leftrightarrow \quad S \vdash_{\mathfrak{L}^\star} \Phi$.

(47) Sei T eine widerspruchsfreie Menge von $\mathfrak{L}$-Aussagen, T_H die Henkinisierung von T. Zeigen Sie, dass T_H eine konservative Erweiterung von T ist. (3 Punkte)

Abgabe: Am Montag, dem 10. Juli 2006, in der Vorlesung.

Hinweis: Die Fachschaften Mathematik und Physik laden herzlich ein zum

Sommerfest der Fakultät

am Donnerstag, dem 13. Juli 2006 ab 17 Uhr

zwischen dem C- und dem D-Bau.

Informationen zur Vorlesung:
http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~logik/