Prof. Dr. Ulrich Felgner　　　　Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Logik

Zusatzblatt

Ankündigung: Dienstag, 18. Juli 2006, findet die Vorbesprechung zum Seminar Mathematische Logik (WS 06/07) um 14 c.t. im Raum M2 (Gebäude C) statt.

Definition: Sei $< M, \subseteq >$ eine Halbordnung. Eine Abbildung $\mathfrak{C} : M \to M$ heißt genau dann Abschluss-Operator bezüglich M, wenn für alle Elemente $x, y \in M$ folgende Axiome erfüllt sind:

(A1) $x \subseteq \mathfrak{C}(x)$

(A2) $x \subseteq y \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{C}(x) \subseteq \mathfrak{C}(y)$

(A3) $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\mathfrak{C}(x))$

(54) Zeigen Sie, dass $Cons(\Sigma) := \{\phi \in \mathfrak{L};\ \Sigma \models \phi\}$ ein Abschluss-Operator bezüglich einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ ist.

(1 Punkt)

(55) Für einen beliebigen aussagenlogischen Ausdruck $\phi \in \mathfrak{L}$ sei ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ wie folgt definiert: $\phi_0 :\simeq \phi, \quad \phi_{n+1} :\simeq (\phi_n \to \phi)$.
Prüfen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}$ der Ausdruck ϕ_n eine Tautologie ist. (1 Punkt)

(56) Prüfen Sie, ob in der $\mathfrak{L}$-Formel $\phi \simeq \forall v : (v = w + z \vee \forall w : w = z + v)$ die Terme $t_1 \simeq v$ für v, $t_2 \simeq w + z$ für w und $t_3 \simeq z + z$ für z frei einsetzbar sind.

(1 Punkt)

(57) Sei Q der Quantor *„es gibt unendlich viele“*. Erweitern Sie die formale Sprache $\mathfrak{L}$ um diesen Quantor und fügen sie folgende Regel zur Auswertung von Formeln hinzu:

$$\text{(A7)}\ \ val^h_{\mathfrak{M}}(Qv\phi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{m \in M;\ val^{h[v/m]}_{\mathfrak{M}}(\phi) = 1\} \text{ unendlich ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Prüfen Sie folgende Behauptungen:

(a) Der Kompaktheitssatz gilt für die formale Sprache $\mathfrak{L}(\neg, \to, \forall, Q, =)$.

(b) Zwei aufeinanderfolgende Q-Quantoren sind vertauschbar. (3 Punkte)

(58) Zeigen Sie, dass folgende $\mathfrak{L}$-Formeln für beliebige $\mathfrak{L}$-Formeln ϕ und ψ logisch-allgemeingültig sind:

(a) $(\forall v\phi \wedge \exists v\psi) \to \exists v(\phi \wedge \psi)$

(b) $\exists v(\phi \wedge \psi) \to (\exists v\phi \wedge \exists v\psi)$ (2 Punkte)

(59) Seien ϕ und ψ $\mathfrak{L}$-Formeln, die Variable v nicht frei in ψ $(v \notin \mathrm{Fr}(\psi))$. Geben Sie für folgende $\mathfrak{L}$-Formel eine Ableitung im Prädikatenkalkül an:

(a) $\exists v(\psi \to \phi) \to (\psi \to \exists v\phi)$ (2 Punkte)

Abgabe: Am Montag, dem 24. Juli 2006, in der Vorlesung.