Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. Amos Koeller

24.06.2008
10.15 - 12.45 Uhr

Name:
Matrikelnummer:
Geburtsdatum:

Klausur Analysis II
SS 2008

1	2	3	4	
5	6	7	8	Σ

AUFGABE 1:
Definieren Sie Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und formulieren Sie den Satz über inverse Funktionen.

AUFGABE 2:
Definieren Sie folgende topologische Begriffe in metrischen Räumen.

1. Den Rand einer Teilmenge.
2. Den Grenzwert einer Folge.
3. Kompakte Menge. (*eine* Definition)
4. Vollständiger metrischer Raum.

AUFGABE 3:
Berechnen Sie die Ableitung und die Jacobideterminante der folgenden Funktionen.

1. $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, xy+yz+zx, x+y+z)$,
2. $f(r,\varphi,\psi) = (r\sinh\varphi\cosh\psi, r\sinh\varphi\sinh\psi, r\cosh\varphi)$.
   (Hinweis: $\sinh' = \cosh, \cosh' = \sinh, \cosh^2 - \sinh^2 = 1$.)

AUFGABE 4:
Berechnen Sie die Punkte mit verschwindender Ableitung folgender Funktionen und untersuchen Sie (mit Beweis), ob diese lokale Maxima oder Minima sind.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$.
2. $f(x,y) = x^3 + y^2$.

AUFGABE 5:
Zeigen Sie, daß das Polynom

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

für $\bar{a} = (a_2, a_1, a_0) = (-2, -5, 6)$ eine einfache Nullstelle bei 1 besitzt. Zeigen Sie weiter, daß p eine eindeutig bestimmte Nullstelle $\lambda(a_2, a_1, a_0)$ nahe bei 1 besitzt, falls (a_2, a_1, a_0) in einer geeigneten Umgebung von $\bar{a}$ liegt. Beweisen Sie, daß λ stetig differenzierbar ist, und geben Sie die Taylor-Entwicklung von $\lambda(\bar{a} + h)$ in Potenzen von h in erster Ordnung an.

AUFGABE 6:
Bestimmen Sie für gegebene $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ das Maximum von $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$

1. durch Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung,
2. durch Verwendung des Lagrangeschen Multiplikatorensatzes.

AUFGABE 7:
Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x^y = y^x\}$. Zeigen Sie, daß $M \setminus \{(e, e)\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

AUFGABE 8:
Es sei $u \in C^1(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R}^n)$ und $M < \infty$ mit

$$\det(u'(x)) = 1 \quad \text{für alle } |x| < 1,$$
$$|u(x)| \leq M \quad \text{für alle } |x| = 1.$$

Zeigen Sie

$$|u(x)| \leq M \quad \text{für alle } |x| \leq 1.$$