Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. Amos Koeller

14.10.2008
10.15 - 13.00 Uhr

Name:
Matrikelnummer:
Geburtsdatum:

Nachklausur Analysis II
SS 2008

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	Σ

AUFGABE 1:
Formulieren Sie den *Satz von Heine-Borel* und begründen Sie, warum dieser Satz auf den euklidischen Raum beschränkt bleibt.

AUFGABE 2:
Formulieren Sie den *Satz über inverse Funktionen* und begründen Sie die Formel für die Ableitung der inversen Funktion.

AUFGABE 3:
Definieren Sie folgende topologische Begriffe in metrischen Räumen.

1. Das Innere einer Teilmenge.
2. Distanz (Abstand) $d(x, M)$ eines Punktes x von einer Teilmenge M .
3. Totalbeschränktheit.
4. Wegzusammenhängende Menge.

AUFGABE 4:
Wann heißt ein stetiger Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *rektifizierbar mit Länge L*? Erklären Sie den Begriff eines *nach der Bogenlänge parametrisierten Wegs* und beweisen Sie dessen Lipschitzstetigkeit.

AUFGABE 5:
Es sei $g = (g_1, g_2)$ mit $g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2, g_2(x, y, z) := x + y + z$. Zeigen Sie für $h = f \circ g, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar, daß

$$|\nabla h|^2 = 4(\partial_1 f)^2 g_1 + 4(\partial_1 f)(\partial_2 f) g_2 + 3(\partial_2 f)^2.$$

AUFGABE 6:
Zeigen Sie

1. für $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_k}$, daß $\frac{\partial R}{\partial R_i} = \frac{R^2}{R_i^2}$,

2. und für $PV = cT$, daß $\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$.

AUFGABE 7:
Berechnen Sie die Punkte mit verschwindender Ableitung folgender Funktionen und untersuchen Sie (mit Beweis), ob diese lokale Maxima oder Minima sind:

1. $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$.

2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

AUFGABE 8:
Berechnen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ unter den Nebenbedingungen $xyz = a$ (wobei $a > 0$) und $x, y, z \geq 0$.

AUFGABE 9:
Welche der folgenden Vektorfelder im $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ erfüllen die Integrabilitätsbedingung, welche haben eine Stammfunktion (mit Beweis)? Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_\gamma f \; \mathrm{d}x$, wenn γ den Einheitskreis einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft:

1. $f = (xy, \frac{1}{2}x^2)$,

2. $f = (y^2, x^2)$.

AUFGABE 10:

1. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^2 - \{ \ (x,0) \mid x \leq 0 \ \}$ einfach zusammenhängend ist.

2. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ nicht einfach zusammenhängend ist.
   (Hinweis: Integrieren Sie $f = (-y,x)/(x^2+y^2)$ über den Einheitskreis.)

AUFGABE 11:
Es sei $u \in C^1(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\det(u'(x)) \neq 0 \quad \text{für alle } |x| < 1,$$

$$u(x) = x \quad \text{für alle } |x| = 1.$$

Zeigen Sie

$$u(B_1(0)) = B_1(0).$$