

Analysis II
SS 2008
1. Übung

AUFGABE 1:

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$U_\varrho(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < \varrho\} = A + B_\varrho(0),$$

wobei $d(x, y) = |x - y|$.

AUFGABE 2:

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß

$$d_0(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{für } x, y \in X$$

eine Metrik auf X definiert, mit der (X, d_0) beschränkt ist. Zeigen Sie weiter, daß beide Metriken dieselben offenen Mengen definieren.

(Bemerkung: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen bezüglich d , wenn $\forall x \in U : \exists \varrho > 0 : \forall y \in X : d(x, y) < \varrho \Rightarrow y \in U$.)

AUFGABE 3:

Zeigen Sie, daß

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty := \max_{k=1}^n |x_k|$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Norm, also auch eine Metrik auf \mathbb{R}^n definiert. Zeigen Sie, daß diese Metriken dieselben offenen Mengen definieren.

AUFGABE 4:

Für $f \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ beschränkt}\}, X \neq \emptyset$, definieren wir

$$\|f\|_{\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})}$ eine Norm auf $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$ ist.

Abgabetermin ist Donnerstag, 24.04.08.

Analysis II
SS 2008
2. Übung

AUFGABE 5: (Französische Eisenbahnmetrik)

Es sei für $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y|, & \text{wenn } x, y \text{ linear abhängig,} \\ |x| + |y|, & \text{wenn } x, y \text{ linear unabhängig.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, d ist eine Metrik auf \mathbb{R}^2 .

AUFGABE 6:

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, jeder Randpunkt von A ist ein Berührungspunkt von A , und geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, daß die Umkehrung nicht stimmt.

AUFGABE 7:

X, Y seien normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ sei linear. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. T hat beschränktes Bild genau dann, wenn $T = 0$.
2. Man nennt T eine beschränkte lineare Abbildung, wenn das Bild des Einheitsballs $f(B_1(0)) \subseteq Y$ beschränkt ist, d.h. $f(B_1(0)) \subseteq B_M(0)$ für ein $M < \infty$. Dann gilt

$$\|Tx - Ty\|_Y \leq M \|x - y\|_X \quad \text{für alle } x, y \in X,$$

und T ist sogar Lipschitzstetig mit $Lip T \leq M$.

3. Die Menge $L(X, Y)$ aller beschränkten linearen Abbildungen von X nach Y ist ein Vektorraum und

$$\|T\|_{L(X, Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$$

definiert eine Norm auf $L(X, Y)$.

4. Die Einschränkung auf den Einheitsball

$$T \mapsto T|_{\overline{B_1(0)}}$$

definiert einen injektiven, normerhaltenden Homomorphismus von $L(X, Y)$ auf einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{C}_b(\overline{B_1(0)}, Y)$.

5. Ist Y ein Banachraum, so ist auch $L(X, Y)$ ein Banachraum.

Abgabetermin ist Montag, 05.05.08 im Sekretariat Algebra.

Analysis II
SS 2008
3. Übung

AUFGABE 8:

Es sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Zeigen Sie für $x_k, x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} x_k \rightarrow x \text{ bezüglich } \| \cdot \|, \text{ d.h. } \| x_k - x \| \rightarrow 0, \\ \iff x_{k,i} \rightarrow x_i \text{ für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Schließen Sie daraus, es existieren $0 < c_0 \leq C < \infty$ mit

$$c_0 \| x \| \leq |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq C \| x \| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Man sagt, alle Normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent.

AUFGABE 9:

Zeigen Sie die Menge $\mathcal{F}_b(X, Y)$ der beschränkten Funktionen einer nichtleeren Menge $X \neq \emptyset$ in einen normierten Raum Y ist ein Vektorraum und

$$\| f \|_{\mathcal{F}_b(X, Y)} := \sup_{x \in X} \| f(x) \|$$

definiert eine Norm.

AUFGABE 10:

Zeigen Sie

$$]0, 1[= \cup_{0 < x < 1}]x, 1[,$$

und es existiert eine abzählbare, aber keine endliche Teilüberdeckung.

AUFGABE 11:

Zeigen Sie, der Einheitsball $B := \{x \in l^2 \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt in l^2 , aber nicht folgenkompakt.

(Hinweis: Zeigen Sie für $e_k := (e_{kj})_{j \in \mathbb{N}} \in B$ mit $e_{kk} = 1$ und $e_{kj} = 0$ für $k \neq j$, daß $\| e_k - e_l \| = \sqrt{2}$ für $k \neq l$, und schließen Sie, daß $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt.)

AUFGABE 12:

Zeigen Sie ein metrischer Raum ist totalbeschränkt genau dann, wenn jede Folge eine Cauchyfolge als Teilfolge hat.

(Hinweis: Beachten Sie den Beweis von Proposition 12.9 der Vorlesung.)

AUFGABE 13:

Es sei $T : X \rightarrow X$ ein beschränkter linearer Endomorphismus auf einem Banachraum X mit $\|T\| < 1$. Zeigen Sie, daß $id_X - T : X \rightarrow X$ eine stetige Inverse besitzt und

$$\|(id_X - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}.$$

(Hinweis: Lösen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz die Gleichung $x = Tx + y$ für $y \in X$.)

Abgabetermin ist Freitag, 23.05.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

20.05.08

Analysis II
SS 2008
4. Übung

AUFGABE 14:

Es seien X, Y Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ stetig und linear. Zeigen Sie $\ker T \subseteq X$ ist abgeschlossen und geben Sie ein Beispiel an, bei dem $\operatorname{im} T = T(X) \subseteq Y$ nicht abgeschlossen ist.

AUFGABE 15:

Es sei $X \neq \emptyset$, Y ein metrischer Raum und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_b(X, Y)$ kompakt. Zeigen Sie, daß

$$\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$$

für alle $x \in X$ kompakt ist.

(Hinweis: Beachten Sie, daß die Evaluationsabbildung $e_x(f) := f(x)$ stetig ist.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 29.05.08.

Analysis II
SS 2008
5. Übung

AUFGABE 16:

Zeigen Sie, eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m) : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, X ein metrischer Raum, ist stetig genau dann, wenn alle Komponenten $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$, stetig sind. Zeigen Sie weiter für $X = U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist f differenzierbar, existieren partielle Ableitungen bzw. Richtungsableitungen von f genau dann, wenn alle Komponenten $f_j, j = 1, \dots, m$, differenzierbar sind bzw. wenn für alle Komponenten die partiellen Ableitungen bzw. Richtungsableitungen existieren, und in diesem Fall wird die Ableitung komponentenweise gebildet, z.B.

$$f' = (f'_1, \dots, f'_m)^T.$$

Die analoge Aussage für den Definitionsbereich gilt nicht. Zeigen Sie dazu, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0, \end{cases}$$

überall partielle Ableitungen besitzt, also insbesondere in jeder Variablen separat stetig ist, aber bei 0 als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nicht stetig ist.

AUFGABE 17:

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen, falls existent,

$$f(x, y) := x^2y - y^3, \quad f(x, y) := |x|e^y, \quad f(x, y) := \log(x^2 + y^2),$$

und zeigen Sie, welche der obigen Funktionen differenzierbar sind.

AUFGABE 18: (Eulerscher Satz für homogene Funktionen)

Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und für $x \in U, \lambda > 0$ gilt $\lambda x \in U$. f heißt homogen von Grade $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ für $x \in U, \lambda > 0$. Zeigen Sie, ist f differenzierbar auf U , so gilt

$$f'(x)x = \alpha f(x) \quad \text{für } x \in U.$$

AUFGABE 19:

Berechnen Sie die Ableitung von $x \mapsto x^x$ für $x > 0$, indem Sie die Kettenregel auf $f(x, y) := x^y$ für $x > 0$ und $\varphi(t) := (t, t)$ für $t > 0$ anwenden.

Analysis II
SS 2008
6. Übung

AUFGABE 20:

Es sei $k :]a, b[\times]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$, $a < b, c < d \in \mathbb{R}$, stetig differenzierbar. Wir setzen

$$f(x, y, z) := \int_x^y k(t, z) dt \quad \text{für } a < x, y < b, c < z < d.$$

Zeigen Sie, daß f stetig differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

AUFGABE 21:

Es sei $f(u, v) := \log(u^2 + v^2)$ für $u^2 + v^2 > 0$, $g_1(x, y) := xy$ und $g_2(x, y) := \sqrt{x/y}$ für $x, y > 0$. Dann existiert

$$\Phi(x, y) := f(g_1(x, y), g_2(x, y)) = \log\left(x^2 y^2 + \frac{x}{y^2}\right) \quad \text{für } x, y > 0.$$

Berechnen Sie die Ableitung von Φ direkt und mit der Kettenregel.

AUFGABE 22:

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\partial_x f(0, y) = -y, \quad \partial_y f(x, 0) = x,$$

und

$$\partial_{yx} f(0, 0) = -1 \neq 1 = \partial_{xy} f(0, 0).$$

AUFGABE 23*:

Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, es existieren die partiellen Ableitungen $\partial_j f$ und $\partial_{ji} f$, und $\partial_{ji} f$ ist stetig in einem $x_0 \in U$. Zeigen Sie, daß $\partial_{ij} f(x_0)$ existiert und

$$\partial_{ij} f(x_0) = \partial_{ji} f(x_0).$$

AUFGABE 24:

Es sei $\tilde{f} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $r : \mathbb{R}^n \rightarrow]0, \infty[$, $r(x) := |x|$ und $f := \tilde{f} \circ r$. Zeigen Sie für differenzierbares \tilde{f}

$$f'(x) = \tilde{f}'(|x|) \frac{x}{|x|} \quad \text{für } x \neq 0,$$

und für zweifach differenzierbares \tilde{f}

$$\begin{aligned}\Delta f &:= \sum_{i=1}^n \partial_{ii} f = \\ &= (\tilde{f}'' \circ r) + \frac{n-1}{r}(\tilde{f}' \circ r) = r^{1-n} \left[\left(\partial_r (r^{n-1} \tilde{f}'(r)) \right) \circ r \right] \quad \text{in } \mathbb{R}^n - \{0\}.\end{aligned}$$

*Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben.
Abgabetermin ist Donnerstag, 12.06.08.*

Analysis II
SS 2008
7. Übung

AUFGABE 25:

Die Wirkung $W(x, t)$, die x Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, sei durch

$$W(x, t) := x^2(a - x)t^2e^{-t} \quad \text{für } 0 \leq x \leq a, t \geq 0$$

gegeben. Bestimmen Sie die Dosis x und die Zeit t so, daß $W(x, t)$ maximal ist.

AUFGABE 26:

Es sei $p_y(x) := x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \dots + a_0(y)$ ein Polynom, dessen Koeffizienten $a_l, l = 0, \dots, n-1$ stetig differenzierbare Funktionen von $y \in \mathbb{R}$ sind. Für $y_0 \in \mathbb{R}$ sei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von p_{y_0} , d.h. $p_{y_0}(x_0) = 0, p'_{y_0}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie, daß es für y "nahe" an y_0 eine eindeutige Nullstelle $x(y)$ von p_y "nahe" an x_0 gibt, und daß x stetig differenzierbar in y ist.

(Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.)

AUFGABE 27:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, daß jedes $v \in \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$v^T A v = \min_{x \in \partial B_1(0)} x^T A x$$

ein Eigenvektor von A ist. Zeigen Sie weiter $A(\{v\}^\perp) \subseteq \{v\}^\perp$, wobei $\{v\}^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0\}$ das orthogonale Komplement von $\{v\}$ ist, und schließen Sie induktiv, daß eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A existiert.

(Hinweis: Verwenden Sie den Lagrangeschen Multiplikatorenansatz.)

AUFGABE 28:

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie, daß $d_C := d(\cdot, C) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^n - C$ mit $\nabla d_C \neq 0$ in $\mathbb{R}^n - C$, und schließen Sie daraus, daß die Ränder der Parallelmengen $C_r := [d_C \leq r]$ Untermannigfaltigkeiten der Dimension $n - 1$ für $r > 0$ sind.

(Hinweis: Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n - C, \pi(x) \in C$ mit $|x - \pi(x)| = d(x, C)$, daß $(y - \pi(x))(x - \pi(x)) \leq 0$ für $y \in C$.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 19.06.08.

Analysis II
SS 2008
8. Übung

AUFGABE 29:

Finden Sie das Maximum von $(x_1 \cdots x_n)^2$ unter der Nebenbedingung $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ und schließen Sie daraus die Ungleichung

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

für $a_1, \dots, a_n \geq 0$.

(Hinweis: Verwenden Sie den Lagrangeschen Multiplikatorenansatz.)

AUFGABE 30:

Zeigen Sie, daß für einen kompakten metrischen Raum X der Banachraum $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen separabel ist.

(Hinweis: Wählen Sie eine abzählbar dichte Teilmenge $\{x_j\}$ von X und wenden Sie den Satz von Stone-Weierstraß auf den Abschluß der von den Funktionen $\varphi_{j,k}(x) := \max(1 - kd(x, x_j), 0)$ erzeugten Unteralgebra in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ an.)

AUFGABE 31:

Zeigen Sie konvexe Mengen sind wegzusammenhängend, insbesondere zusammenhängend.

AUFGABE 32:

Es sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung aus nichtleeren Mengen eines zusammenhängenden metrischen Raumes X . Zeigen Sie für beliebige $U, V \in \mathcal{U}$ existieren $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $U_0 = U, U_n = V$ und

$$U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

(Hinweis: Betrachten Sie für gegebenes U die Teilfamilie $\mathcal{U}_0 := \{V \in \mathcal{U} \mid V \text{ erfüllt obige Aussage}\}$ und zeigen Sie $X = \cup \mathcal{U}_0 + \cup(\mathcal{U} - \mathcal{U}_0)$.)

Keine Abgabe.

Analysis II
SS 2008
9. Übung

AUFGABE 33:

Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein Weg, und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, es existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\overline{B_\delta(\gamma(t))} \subseteq U \quad \text{für alle } t \in [a, b],$$

und die Menge $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [a, b] : |x - \gamma(t)| \leq \delta\} \subseteq U$ ist kompakt.

AUFGABE 34:

Berechnen Sie die Länge der Ellipse

$$\gamma(t) := (a \cos(t), b \sin(t)) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi]$$

und $a, b > 0$.

AUFGABE 35:

Zeigen Sie, ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist nach Bogenlänge parametrisiert genau dann, wenn

$$|\gamma'(t)| = 1 \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

AUFGABE 36:

Zeigen Sie für einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a < b \in \mathbb{R}$, existieren zweifach stetig differenzierbare Wege $\gamma_k : [a, b] \rightarrow U$ mit

$$\begin{aligned} \gamma_k(a) &= \gamma(a), \gamma_k(b) = \gamma(b), \\ \gamma_k &\rightarrow \gamma \text{ gleichmäßig auf } [a, b], \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{t \in [a, b]} |\gamma'_k(t)| &< \infty. \end{aligned}$$

(Hinweis: Bilden Sie $\gamma_h(t) := h^{-1} \int_t^{t+h} \gamma \cdot$)

Abgabetermin ist Freitag, 04.07.08.

Analysis II
SS 2008
10. Übung

AUFGABE 37:

γ_0 und γ_1 seien homotope Wege in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie $\gamma_0 \oplus (-\gamma_1)$ ist nullhomotop in U .

AUFGABE 38:

Zeigen Sie sternförmige Gebiete sind einfach zusammenhängend.

AUFGABE 39:

Zeigen Sie für eine zweifach differenzierbare freie Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, mit

$$H(0, s) = H(1, s) \quad \text{für } 0 \leq s \leq 1,$$

und für stetig differenzierbares $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, das das Integrabilitätskriterium

$$\partial_i f_j = \partial_j f_i \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n$$

erfüllt, ohne Verwendung von Lemma 15.9 und dessen Beweis, daß

$$\int_{H(\cdot, 0)} f \, dx = \int_{H(\cdot, 1)} f \, dx.$$

Schließen Sie daraus mit Verwendung des zweiten Beweisteil von Lemma 15.9, daß obiges f für einfach zusammenhängendes U eine Stammfunktion auf U besitzt bzw. wegunabhängiges Integral in U hat.

(Hinweis: Bilden Sie $\gamma_s(t) := H(t, s)$ und $I(s) := \int_{\gamma_s} f \, dx$ für $0 \leq s \leq 1$ und rechnen $I'(s) = \int_0^1 \partial_s (f(H(t, s)) \partial_t H(t, s)) \, ds$ mit Übungsaufgabe 20.)

AUFGABE 40:

Zeigen Sie, daß $U := B_2(0) - \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht einfach zusammenhängend ist. Nun sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar und erfülle das Integrabilitätskriterium

$$\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1.$$

Zeigen Sie, f hat wegunabhängiges Integral in U genau dann, wenn

$$\int_{\partial B_1(0)} f \, dx = 0.$$

(Hinweis: Betrachten Sie $\int_{\partial B_1(0)} f \, dx$ für $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(u, v) := (-v/(u^2 + v^2), u/(u^2 + v^2))$ für $(u, v) \neq 0$ und sternförmige Gebiete $B_2(0) - \{te^{i\theta} \mid t \geq 0\}$.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 10.07.08.

Analysis II
SS 2008
11. Übung

AUFGABE 41:

Definieren Sie lokal in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ eine Winkelfunktion θ , d.h. $x = |x|(\cos \theta(x), \sin \theta(x))$. Zeigen Sie, obgleich θ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig definiert ist, gilt

$$d\theta = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} =: \omega.$$

Schließen Sie, daß die 1-Form ω in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ geschlossen ist. Ist ω auch exakt?

AUFGABE 42:

Für $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$\begin{aligned} f dx &:= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3, \\ *f dx &:= f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie für differenzierbares $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, g : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} dg &= (\text{grad } g) dx, \\ d(f dx) &= *(rot f) dx, \\ d(*f dx) &= (\text{div } f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{grad } g &= (\partial_1 g, \partial_2 g, \partial_3 g), \\ \text{rot } f &= (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1), \\ \text{div } f &= \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3. \end{aligned}$$

Schließen Sie daraus

$$\text{rot grad} = 0, \text{div rot} = 0.$$

AUFGABE 43:

Es sei $f : U \rightarrow V, U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, differenzierbar und $a : V \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$f^*(ady_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (a \circ f)(\det Df) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

AUFGABE 44:

Geben Sie eine 2-Form ω in \mathbb{R}^4 mit

$$d\omega = 0,$$

$$\omega \wedge \omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

an.

Keine Abgabe.