

Analysis IV
SS 2009
1. Übung

AUFGABE 1:

Das Zählmaß ν auf einer beliebigen Menge X ist definiert durch

$$\nu(S) := \begin{cases} \#(S) := \text{Anzahl der Elemente von } S, & \text{falls } S \text{ endlich ist,} \\ \infty, & \text{falls } S \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß ν ein Maß ist und alle $S \subseteq X$ meßbar bezüglich ν sind.

AUFGABE 2:

Zeigen Sie, eine Nullmenge A bezüglich eines Maßes μ , d.h. $\mu(A) = 0$, ist immer μ -meßbar.

AUFGABE 3:

Für $S \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir das Lebesgue-Maß durch

$$\mathcal{L}^1(S) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \mid S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[, a_k < b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, daß \mathcal{L}^1 ein Maß ist und daß alle Intervalle $]a, b[$ und mit der Proposition 1.1 der Vorlesung alle offenen und abgeschlossenen Mengen \mathcal{L}^1 -meßbar sind.

AUFGABE 4:

Für $A_k \subseteq X$ sei

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k := \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} A_k \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k := \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=l}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie für A_k meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X

$$\begin{aligned} \mu(\liminf_{k \rightarrow \infty} A_k) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k), \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) &\leq \mu(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k), \quad \text{falls } \mu(X) < \infty. \end{aligned}$$

Abgabe bei Frau Neu in C 5 A 23 bis Donnerstag, 30.04.09, um 12.00 Uhr.

Analysis IV
SS 2009
2. Übung

AUFGABE 5:

Es sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Zeigen Sie

$$f := \sum_{l=1}^k \alpha_l \chi_{A_l}$$

mit $X = \sum_{l=1}^k A_l$ eine Zerlegung und α_k paarweise verschieden ist \mathcal{A} -meßbar genau dann, wenn alle $A_l \in \mathcal{A}$.

AUFGABE 6:

Es seien $f, g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ meßbar bezüglich einer σ -Algebra \mathcal{A} auf X . Zeigen Sie

$$[f < g] := \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, [f = g] := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}.$$

AUFGABE 7:

Zeigen Sie, daß die Konklusion des Satzes von Egoroff für das Zählmaß ν auf \mathbb{N} und $f_k(l) := 1$ für $l \geq k$, $f_k(l) := 0$ für $l < k$ nicht gilt. Wie steht das im Einklang mit dem Satz von Egoroff?

AUFGABE 8:

Es sei $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k := \chi_{[j2^{-l}, (j+1)2^{-l}]} \quad \text{für } k = 2^l + j, 0 \leq j < 2^l, l \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie $f_k \rightarrow 0$ im Maß bezüglich \mathcal{L}^1 , aber $\{f_k(t)\}_k$ konvergiert für kein $t \in [0, 1]$, insbesondere konvergiert f_k nicht \mathcal{L}^1 -fast überall. Geben Sie eine Teilfolge an, für die $f_{k_i} \rightarrow 0$ fast überall bezüglich \mathcal{L}^1 .

Abgabetermin ist Freitag, 08.05.09.

Analysis IV
SS 2009
3. Übung

AUFGABE 9:

$f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X und $f = g$ fast überall bezüglich μ . Zeigen Sie

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

AUFGABE 10:

Es seien $A_k \subseteq X$ meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty.$$

Zeigen Sie, daß μ -fast alle $x \in X$ in höchstens endlich vielen A_k liegen.

(Hinweis: Zeigen Sie $\int \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} \, d\mu < \infty$ und schließen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} < \infty$ fast überall bezüglich μ .)

AUFGABE 11: (Tschebychef-Ungleichung)

Zeigen Sie für eine bezüglich eines Maßes μ auf X meßbare Funktion $f : X \rightarrow [-\infty, \infty], \mathbb{C}$

$$\mu(|f| \geq t) \leq t^{-1} \int |f| \, d\mu \quad \forall t > 0.$$

Schließen Sie, $[f \neq 0]$ ist σ -endlich bezüglich μ , falls $\int |f| \, d\mu < \infty$.

AUFGABE 12:

$f_k : X \rightarrow \mathbb{C}$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k| \, d\mu < \infty.$$

Zeigen Sie, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert fast überall bezüglich μ absolut und

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\mu.$$

Abgabetermin ist Freitag, 15.05.09.

Analysis IV
SS 2009
4. Übung

AUFGABE 13:

μ sei ein Maß auf X und $A_k \subseteq X$ seien lokale μ -Nullmengen. Zeigen Sie, daß $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ wieder eine lokale μ -Nullmenge ist.

AUFGABE 14:

μ sei ein σ -endliches Maß auf X , und $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ sei μ -meßbar. Zeigen Sie

$$|f| \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)} \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

AUFGABE 15:

Es sei μ ein Maß auf X und $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$ mit $1 \leq r \leq p, q \leq \infty$ und

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Zeigen Sie $fg \in L^r(\mu)$ und

$$\|fg\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}.$$

AUFGABE 16:

Es sei μ ein Maß auf X und $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu), 1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie $f \in L^r(\mu)$ für $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ und

$$\|f\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}^\lambda \|f\|_{L^q(\mu)}^{1-\lambda},$$

wobei

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}.$$

Zeigen Sie weiter für μ -meßbares $f : X \rightarrow [0, \infty], 1 \leq p \leq \infty$,

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \liminf_{q \rightarrow p} \|f\|_{L^q(\mu)}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung und das Lemma von Fatou.)

Abgabetermin ist Freitag, 22.05.09.

Analysis IV
SS 2009
5. Übung

AUFGABE 17:

Es sei μ ein Maß auf X , und $f_k \rightarrow f$ in $L^p(\mu)$ für ein $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie $f_k \rightarrow f$ im Maß bezüglich μ und geben Sie ein Beispiel an, für das f_k nicht μ -fast überall gegen f konvergiert.

(Hinweis: Verwenden Sie die Tschebychef-Ungleichung aus Aufgabe 11 und betrachten Sie das Beispiel aus Aufgabe 8.)

AUFGABE 18:

Es sei $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ und μ ein Maß auf X . Zeigen Sie,

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists A \in \mathcal{A}_\mu : \mu(A) < \infty, \int_{X-A} |f|^p d\mu < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{A}_\mu : \mu(A) < \delta \implies \int_A |f|^p d\mu < \varepsilon.$$

(Hinweis: Wenden Sie den Konvergenzsatz von Lebesgue auf $\chi_{\{|f| \leq 1/n\}}|f|$ und $\chi_{\{|f| \geq n\}}|f|$ an.)

AUFGABE 19: (Variante des Konvergenzsatzes von Lebesgue)

$f_k, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X , $1 \leq p < \infty$,

$$f_k \rightarrow f \quad \text{im Maß bezüglich } \mu$$

und

$$|f_k| \leq g_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

für $g_k, g \in L^p(\mu)$ mit

$$g_k \rightarrow g \text{ in } L^p(\mu).$$

Zeigen Sie $f_k, f \in L^p(\mu)$ und

$$f_k \rightarrow f \text{ in } L^p(\mu).$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Konvergenzsatz von Vitali oder betrachten Sie $|g_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_k - g_{k+1}|$ für $\|g_k - g_{k+1}\|_{L^p(\mu)} \leq 2^{-k}$.)

AUFGABE 20:

Zeigen Sie durch wiederholte Produktintegration

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \frac{\sqrt{n}}{2n+1}.$$

Schließen Sie daraus mit dem Wallis-Produkt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Abgabetermin ist Freitag, 29.05.09.

Analysis IV
SS 2009
Ergänzungsübungen

AUFGABE 21:

Es sei μ ein endliches Maß auf X , und $f_k, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ seien μ -meßbar. Zeigen Sie

$$f_k \rightarrow f \quad \text{im Maß bezüglich } \mu$$

genau dann, wenn jede Teilfolge k_l eine Teilfolge k_{l_j} besitzt mit

$$f_{k_{l_j}} \rightarrow f \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

AUFGABE 22:

Es sei μ ein Maß auf X . Für μ -meßbare $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir

$$d(f, g) := \min \left(\inf \{ \varepsilon > 0 \mid \mu(|f - g| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon \}, 1 \right).$$

Zeigen Sie, d ist auf der Menge der μ -meßbaren Funktionen mit Identifikation von μ -fast überall gleichen Funktionen eine vollständige Metrik und d erzeugt die Konvergenz im Maß μ , d.h.

$$f_k \rightarrow f \quad \text{im Maß bezüglich } \mu \iff d(f_k, f) \rightarrow 0.$$

AUFGABE 23:

Es seien $a_{k,m} \geq 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \min(1, a_{k,m}) 2^{-k} = 0 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} a_{k,m} = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Konvergenzsatz von Lebesgue.)

AUFGABE 24:

Es sei H ein Hilbertraum, also ein innerer Produktraum, der vollständig bezüglich der Skalarproduktnorm $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ ist. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Für einen abgeschlossenen Unterraum $V \subseteq H$ und $x \in H$ existiert $v \in V$ mit $x - v \perp V$, insbesondere gilt

$$\| x - v \| = d(x, V).$$

(Hinweis: Betrachten Sie eine Minimalfolge $v_k \in V$ mit $\| x - v_k \| \rightarrow d(x, V)$ und verwenden Sie die Parallelogrammidentität $\| a + b \|^2 + \| a - b \|^2 = 2 \| a \|^2 + 2 \| b \|^2$.)

2. Für jedes $x \in H$ ist die Abbildung $\Lambda y := \langle y, x \rangle$ ein stetiges lineares Funktional, und jedes stetige, lineare Funktional hat eine solche Darstellung.
(Hinweis: Betrachten Sie mit 1. für $\Lambda \neq 0$ ein $x \perp \ker \Lambda, x \neq 0$.)

3. (Bessel-Ungleichung)

Für ein Orthonormalsystem $S = \{u_j \mid j \in J\} \subseteq H$, d.h. $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$, gilt

$$\sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

4. Folgende Aussagen sind äquivalent für ein Orthonormalsystem S :

- Für alle $x \in H$ gilt $x = \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j$.
- Für alle $x \in H$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle^2$.
- $S^\perp := \{x \in H \mid \langle x, u_j \rangle = 0 \text{ für alle } j\} = \{0\}$.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so heißt S eine Orthonormalbasis von H .

5. Zu jedem Orthonormalsystem S existiert eine Orthonormalbasis $S_0 \supseteq S$.
(Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Zorn).

6. Für jeden abgeschlossenen Unterraum $V \subseteq H$ gilt

$$H = V \oplus V^\perp.$$

7. Es gilt $H \cong L^2(\nu)$, wobei ν das Zählmaß auf einer geeigneten Menge ist.

Keine Abgabe.

Analysis IV
SS 2009
6. Übung

AUFGABE 25:

Es sei ν das Zählmaß auf einer Menge X . Zeigen Sie für ein beliebiges Maß μ auf X

$$\mu \ll_{\mathcal{A}_\mu} \nu$$

und

$$\mu \perp_{\mathcal{A}_\mu} \nu \implies \mu = 0.$$

AUFGABE 26:

Es sei μ ein Maß auf X und \mathcal{A} eine σ -Algebra von μ -meßbaren Mengen. Für \mathcal{A} -meßbares $f : X \rightarrow [0, \infty]$ setzen wir

$$(f\mu)(S) := \inf \left\{ \int_A f \, d\mu \mid S \subseteq A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Zeigen Sie, daß $f\mu$ ein Maß auf X ist, alle $A \in \mathcal{A}$ sind $f\mu$ -meßbar und

$$f\mu \ll_{\mathcal{A}} \mu.$$

AUFGABE 27:

μ, ν, λ seien Maße auf X und \mathcal{A} eine σ -Algebra aus μ -, ν - und λ -meßbaren Mengen. Zeigen Sie

$$\nu \ll_{\mathcal{A}} \mu, \nu \perp_{\mathcal{A}} \mu \implies \nu = 0$$

und

$$\lambda \ll_{\mathcal{A}} \nu, \nu \ll_{\mathcal{A}} \mu \implies \lambda \ll_{\mathcal{A}} \mu.$$

AUFGABE 28:

Es sei μ ein endliches Maß auf X , und $1 \leq p \leq 2, p^{-1} + q^{-1} = 1$ oder $(p, q) = (1, \infty)$. Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Riesz

$$L^p(\mu)^* = L^q(\mu)$$

in dem Sinne, daß für jedes stetige, lineare Funktional $\Lambda : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ ein eindeutiges $g \in L^q(\mu)$ existiert mit

$$\Lambda f = \int f g \, d\mu \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

Weiter gilt $\|\Lambda\| = \|g\|_{L^q(\mu)}$.

(Hinweis: Verwenden Sie die Dualität in Hilberträumen.)

Abgabetermin ist Freitag, 12.06.09.

Analysis IV
SS 2009
7. Übung

AUFGABE 29:

Es seien $l^p, 1 \leq p \leq \infty$ die Banachräume der komplexen Folgen $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{für } 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_{\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty,$$

und $c_0 \subseteq l^{\infty}$ den Unterraum aller Folgen mit $x_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. c_0, l^p für $1 \leq p < \infty$ sind separabel, und l^{∞} ist nicht separabel.
2. Für $y \in l^q, p^{-1} + q^{-1} = 1$ und $\Lambda x := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ für $x \in l^p$, ist Λ ein stetiges, lineares Funktional auf l^p und $\|\Lambda\| = \|y\|_q$.
(Hinweis: Betrachten Sie das Zählmaß auf \mathbb{N} und verwenden Sie Proposition 2.3 der Vorlesung.)
3. Für $1 \leq p < \infty$ hat jedes stetige, lineare Funktional auf l^p eine Darstellung wie in 2. für ein $y \in l^q$. In diesem Sinne gilt $(l^p)^* = l^q$.
(Hinweis: Setzen Sie $y_i := \Lambda(\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$.)
4. Jedes stetige, lineare Funktional auf $c_0 \subseteq l^{\infty}$ hat eine Darstellung wie in 2. für ein $y \in l^1$. In diesem Sinne gilt $c_0^* = l^1$.

AUFGABE 30:

Es seien die Rademacherfunktionen definiert durch $r(t) := 1$ für $t \in [2i, 2i+1[$ und $r(t) := -1$ für $t \in [2i+1, 2i+2[$ für $i \in \mathbb{Z}, r_k(t) := r(2^k t)$. Zeigen Sie

$$r_k \rightarrow 0 \quad \text{schwach in } L^2(\mathcal{L}^1[[0, 1]),$$

aber nicht stark in $L^2(\mathcal{L}^1[[0, 1])$.

(Hinweis: Verwenden Sie, daß die stetigen Funktionen dicht in $L^2(\mathcal{L}^1[[0, 1])$ liegen.)

AUFGABE 31:

Zeigen Sie für $f_k \rightarrow f$ schwach bzw. schwach* in $L^p(\mu), 1 \leq p \leq \infty$, daß

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^p(\mu)}.$$

Zeigen Sie weiter für $f_k \rightarrow f$ schwach in $L^2(\mu)$ und $\|f_k\|_{L^2(\mu)} \rightarrow \|f\|_{L^2(\mu)}$, daß $f_k \rightarrow f$ stark in $L^2(\mu)$, d.h. $\|f_k - f\|_{L^2(\mu)} \rightarrow 0$.

(Hinweis: Verwenden Sie Proposition 2.3 und die Parallelogrammidentität in Hilberträumen $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.)

AUFGABE 32:

\mathcal{L}^1 sei das Lebesgue-Maß und ν das Zählmaß auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, daß die Diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$ meßbar bezüglich des Produktmaßes $\mathcal{L}^1 \otimes \nu$ ist und

$$(\mathcal{L}^1 \otimes \nu)(\Delta) = \infty,$$

$$(\mathcal{L}^1 \otimes \nu)(\{x\} \times [0, 1]) = 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$(\mathcal{L}^1 \otimes \nu)([0, 1] \times \{y\}) = 1 \quad \forall y \in [0, 1].$$

Zeigen Sie weiter

$$\int \int \chi_{\Delta}(x, y) \, d\mathcal{L}^1(x) \, d\nu(y) = 0 \neq 1 = \int \int \chi_{\Delta}(x, y) \, d\nu(y) \, d\mathcal{L}^1(x).$$

(Hinweis: Zeigen Sie, daß die Projektionen $(x, y) \mapsto x, y$ meßbar bezüglich $\mathcal{L}^1 \otimes \nu$ sind.)

Abgabetermin ist Freitag, 19.06.09.

Analysis IV
SS 2009
8. Übung

AUFGABE 33:

Es sei $f_k \rightarrow f$ schwach* in $L^p(\mu)$ und $g_k \rightarrow g$ stark in $L^q(\mu)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.
Zeigen Sie

$$\int f_k g_k \, d\mu \rightarrow \int f g \, d\mu.$$

AUFGABE 34:

Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^n \left(\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

für $a_i < b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie weiter für borelmeßbares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$

$$\int f \, d\mathcal{L}^n = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n.$$

AUFGABE 35:

Geben Sie für $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ einen C^∞ -Atlas an.

AUFGABE 36:

Zeigen Sie $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine C^∞ - n -Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial B_1(0)$.

Abgabetermin ist Freitag, 26.06.09.

Analysis IV
SS 2009
9. Übung

AUFGABE 37:

Definieren Sie lokal in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ eine Winkelfunktion θ , d.h. $x = |x|(\cos \theta(x), \sin \theta(x))$. Zeigen Sie, obgleich θ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig definiert ist, gilt

$$d\theta = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} =: \omega.$$

Schließen Sie, daß die 1-Form ω in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ geschlossen ist, d.h. $d\omega = 0$. Ist ω auch exakt, d.h. existiert eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega = df$?

AUFGABE 38:

Für $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$f dx := f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3,$$
$$*f dx := f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Zeigen Sie für differenzierbares $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, g : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$dg = (\text{grad } g)dx,$$
$$d(f dx) = *(rot f)dx,$$
$$d(*f dx) = (\text{div } f)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

wobei

$$\text{grad } g = (\partial_1 g, \partial_2 g, \partial_3 g),$$
$$\text{rot } f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1),$$
$$\text{div } f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3.$$

Schließen Sie daraus

$$\text{rot grad} = 0, \text{div rot} = 0.$$

AUFGABE 39:

Es sei $f : U \rightarrow V, U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, differenzierbar und $a : V \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$f^*(ady_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (a \circ f)(\det Df)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

AUFGABE 40:

Geben Sie eine 2-Form ω in \mathbb{R}^4 mit

$$d\omega = 0,$$

$$\omega \wedge \omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

an.

Abgabetermin ist Freitag, 03.07.09.

Analysis IV
SS 2009
10. Übung

AUFGABE 41:

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n, \neq \emptyset$ eine kompakte, zusammenhängende C^2 - $(n-1)$ -Untermannigfaltigkeit mit leerem Mannigfaltigkeits-Rand $\partial M = \emptyset$. Weiter sei M orientierbar und $\nu : M \rightarrow \partial B_1(0)$ eine C^1 -Einheitsnormale an M . Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Es sei $\Phi : M \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi(x, t) := x + t\nu(x).$$

Zeigen Sie $\Phi : M \times]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\cong} U_\varepsilon(M) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < \varepsilon\}$ ist bijektiv für $\varepsilon > 0$ klein genug. Wir setzen

$$M_+ := \Phi(M \times]0, \varepsilon[),$$

$$M_- := \Phi(M \times]-\varepsilon, 0[),$$

$$M_t := \Phi(M, t) \quad \text{für } |t| < \varepsilon.$$

2. Zeigen Sie für jede Zusammenhangskomponente C von $\mathbb{R}^n - M$, daß $\emptyset \neq \partial C \subseteq M$, insbesondere

$$\emptyset \neq C \cap U_\varepsilon(M) = C \cap (M_+ \cup M_-),$$

also

$$M_+ \text{ oder } M_- \subseteq C.$$

Schließen Sie daraus

$$\text{Anzahl der Komponenten von } (\mathbb{R}^n - M) \leq 2.$$

3. Zeigen Sie für daß $\operatorname{div} f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und schließen Sie für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit C^2 -Rand und $0 \notin \Omega$

$$\int_{\partial\Omega} f \nu_{\partial\Omega} \, d\operatorname{vol}_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} \operatorname{div} f \, d\mathcal{L}^n = 0.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Gauß.)

4. Es sei $\omega : \mathbb{R}^n - M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\omega(p) := \int_M f(\cdot - p) \nu \, d\text{vol}_M \quad \text{for } p \notin M,$$

wobei

$$\text{vol}_M := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \lrcorner \nu.$$

Zeigen Sie ω ist lokal konstant.

5. Zeigen Sie für $\omega_{\pm} := \omega(M_{\pm})$, daß

$$\omega_+ - \omega_- = -\text{vol}(\partial B_1(0)) \neq 0,$$

und schließen Sie

Anzahl der Komponenten von $(\mathbb{R}^n - M) = 2$.

AUFGABE 42:

Zeigen Sie, jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ läßt sich als abzählbare, disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen der Form $[a_1, b_1[\times \dots \times [a_n, b_n[$ schreiben.

AUFGABE 43:

Es seien μ und ν zwei Radon-Maße auf \mathbb{R}^n mit

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi \, d\nu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie $\mu = \nu$.

AUFGABE 44:

μ sei ein Borel-Maß auf \mathbb{R}^n und

$$(\underline{D}\mu)(x) := \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_{\varrho}(x))}{\mathcal{L}^n(B_{\varrho}(x))} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, daß $\underline{D}\mu$ borelmeßbar ist.

(Hinweis: Zeigen Sie, daß $x \mapsto \mu(B_{\varrho}(x))/\mathcal{L}^n(B_{\varrho}(x))$ unterhalbstetig ist und $\inf_{0 < \varrho < \delta} \mu(B_{\varrho}(x))/\mathcal{L}^n(B_{\varrho}(x)) = \inf_{0 < \varrho < \delta, \varrho \in \mathbb{Q}} \mu(B_{\varrho}(x))/\mathcal{L}^n(B_{\varrho}(x))$.)

Abgabetermin ist Freitag, 10.07.09.

Analysis IV
SS 2009
11. Übung

AUFGABE 45: (Satz von Lebesgue)

Zeigen Sie, daß jede monoton nichtfallende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall differenzierbar mit $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ist und

$$f(y-) = f(x-) + \int_x^y f'(t) dt + \nu_s([x, y])$$

für $x < y$, wobei $f(x-) := \lim_{t \uparrow x} f(t)$ der linksseitige Limes ist und ν_s ein zu \mathcal{L}^1 singuläres Radon-Maß ist. Zeigen Sie weiter, daß f das Integral über seine Ableitung ist, d.h. $\nu_s = 0$, falls f stetig ist und außerhalb einer abzählbaren Menge differenzierbar ist. (Hinweis: Wenden Sie den Differentiationssatz für Maße auf \mathcal{L}^1 und ν mit $\nu([x, y]) = f(y-) - f(x+)$ an.)

AUFGABE 46: (Singuläre Funktion von Lebesgue)

Wir dritteln das Einheitsintervall und setzen $C_1 := [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ und $I_{1,1} =]1/3, 2/3[$. Nun dritteln wir die beiden abgeschlossenen Intervalle, deren Vereinigung C_1 ergibt, und erhalten induktiv $C_k = \cup_{l=1}^{2^k} J_{k,l} \subseteq C_{k-1}$, $[0, 1] = C_k + \sum_{l=1}^{2^{k-1}} I_{k,l}$. Zeigen Sie, daß die Cantor-Menge $C := \cap_{k=1}^{\infty} C_k$ kompakt ist und $\mathcal{L}^1(C) = 0$.

Nun sei $\varphi(0) := 0$, $\varphi \equiv (2l-1)2^{-k}$ auf $I_{k,l}$ und $\varphi(t) := \sup\{\varphi(s) \mid s \in [0, 1] - C, s < t\}$. Zeigen Sie φ ist stetig, nicht-fallend, $\varphi([0, 1]) = [0, 1]$, aber $\varphi' = 0$ fast überall bezüglich \mathcal{L}^1 , also

$$\int_0^1 \varphi'(t) dt = 0 \neq 1 = \varphi(1) - \varphi(0).$$

AUFGABE 47:

Es sei μ ein Maß auf X und \mathcal{A} eine σ -Algebra von μ -meßbaren Mengen. Für \mathcal{A} -meßbares $f : X \rightarrow [0, \infty]$ sei das Maß $f\mu$ wie in Aufgabe 26 definiert. Zeigen Sie

$$\int g d(f\mu) = \int gf d\mu$$

für alle \mathcal{A} -meßbaren $g : X \rightarrow [0, \infty]$ bzw. $g \in L^1_{\mathcal{A}}(f\mu)$, und im zweiten Fall gilt $gf \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$.

AUFGABE 48:

Zeigen Sie für borelmeßbares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$

$$\int f d\mathcal{L}^n = \int_0^{\infty} \int_{\partial B_1(0)} r^{n-1} f(r\omega) \text{darea}_{\partial B_1(0)}(\omega) dr$$

und schließen Sie

$$\text{area}_{\partial B_1(0)}(\partial B_1(0)) = n\mathcal{L}^n(B_1(0)).$$

(Hinweis: Betrachten Sie eine lokale Parametrisierung $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \partial B_1(0)$ und wenden Sie die Substitutionsformel auf $\Psi : U \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Psi(y, r) := r\Phi(y)$ an.)

Keine Abgabe.

Analysis IV
SS 2009
12. Übung

AUFGABE 49:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2+y^2} d\mathcal{L}^2(x, y) = \pi$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten $(x, y) = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ und der Substitutionsformel aus der Vorlesung. Zeigen Sie damit und mit dem Satz von Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

vgl. Aufgabe 20.

AUFGABE 50:

Eine Metrik $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung von V in die Menge der positiv definiten Matrizen. Wir setzen $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $g = \det(g_{ij})$,

$$(\text{grad}_g f)^i = g^{ij} \partial_j f \quad \text{für } f \in C^1(V, \mathbb{R}), i = 1, \dots, n,$$

$$\text{div}_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} f^i) \quad \text{für } f \in C^1(V, \mathbb{R}^n),$$

$$\Delta_g f = \text{div}_g \text{grad}_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f) \quad \text{für } f \in C^2(V, \mathbb{R}),$$

wobei wir $g_{ij} \in C^1(V)$ für die letzten beiden Definitionen annehmen und über Indices, die als untere und obere Indices auftreten, von $1, \dots, n$ summieren.

Für einen C^1 -Diffeomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$ der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ auf V definieren wir die Pullback-Metrik $\tilde{g} = \varphi^* g$ bezüglich φ auf U durch

$$\tilde{g}_{kl} = \partial_k \varphi^i \partial_l \varphi^j (g_{ij} \circ \varphi).$$

Zeigen Sie

$$\text{grad}_{\tilde{g}}(f \circ \varphi)^k \partial_k \varphi^i = \text{grad}_g(f) \circ \varphi \quad \text{für } f \in C^1(V, \mathbb{R}), i = 1, \dots, n,$$

$$\text{div}_{\tilde{g}}((D\varphi)^{-1}(f \circ \varphi)) = \text{div}_g(f) \circ \varphi \quad \text{für } f \in C^1(V, \mathbb{R}^n),$$

$$\Delta_{\tilde{g}}(f \circ \varphi) = \Delta_g(f) \circ \varphi \quad \text{für } f \in C^2(V, \mathbb{R}),$$

wobei wir für die letzten beiden Identitäten $g_{ij} \in C^1(V)$ und φ als C^2 -Diffeomorphismus annehmen.

(Hinweis: Wenden Sie beim Beweis für die Divergenz die Substitutionsformel auf $\int \operatorname{div}_g(f)\psi \, d\mu_g$ für $\psi \in C_0^1(V)$ und $\mu_g = \sqrt{g}\mathcal{L}^n \llcorner V$ an.)

AUFGABE 51:(Gramsche Determinante)

Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt \langle, \rangle . Für $v_1, \dots, v_k \in V$ ist die Gramsche Determinante definiert durch

$$Gr(v_1, \dots, v_k) := \det(\langle v_i, v_j \rangle).$$

Zeigen Sie

$$Gr(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k + v_1) = Gr(v_1, \dots, v_k)$$

und schließen Sie

$$Gr(v_1, \dots, v_k) = \prod_{i=1}^k |\pi_{\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}\}^\perp} v_i|,$$

wobei $\pi_U : V \rightarrow U$ die orthogonale Projektion auf den Unterraum $U \subseteq V$ bezeichnet, also insbesondere $Gr(v_1, \dots, v_k) \neq 0 \iff v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig.

Keine Abgabe