Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

18.10.07

Analysis I
WS 2007/08
1.Übung

AUFGABE 1:
Geben Sie die Verneinung der folgenden Aussagen an.

$$\begin{array}{rl} A \wedge B, & A \vee B, \\ \forall a : P(a), & \forall a : \neg P(a), \\ \exists a : P(a), & \forall a : \exists b : P(a,b), \\ \forall a : \forall b : P(a,b), & \exists a : \forall b : P(a,b). \end{array}$$

AUFGABE 2:
Welche der folgenen Konklusionen ist richtig

$$\Big(\forall a : \exists b : P(a,b)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists b : \forall a : P(a,b)\Big),$$
$$\Big(\exists b : \forall a : P(a,b)\Big) \Longrightarrow \Big(\forall a : \exists b : P(a,b)\Big)?$$

AUFGABE 3:
Zeigen Sie
$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \Longleftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

AUFGABE 4:
Geben Sie die Anzahl der Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ folgender Mengen an:

$$A := \{\} = \emptyset, \quad A := \{1\}, \quad A := \{1,2\}, \quad A := \{1,2,3\}, \quad A := \{1,2,3,4\},$$

und allgemein $A := \{1,2,\ldots,n\}$.

Abgabetermin ist Donnerstag, 25.10.07.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

25.10.07

Analysis I
WS 2007/08
2.Übung

AUFGABE 5:(Hilberts Hotel)
Hilbert's Hotel hat zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Zimmer. Wenn das Hotel voll belegt ist und ein weiterer Gast kommt, so muß dieser nicht abgewiesen werden, sondern man bittet den Gast aus Zimmer n in das Zimmer $n+1$ umzuziehen und vergibt das freigewordene Zimmer 1 an den neuen Gast. Nun kommt ein Bus, der zu jeder natürlichen Zahl einen Sitzplatz hat, auf dem ein Reisender sitzt. Können Sie alle neuen Gäste unterbringen und, wenn ja, wie ?

AUFGABE 6:
Welche der folgenden Relationen ist reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv ?

$$x \le y, \qquad x^2 + x = y^2 + y,$$
$$x^2 + y^2 = 1, \qquad k \mid l \text{ für } k, l \in \mathbb{N}.$$

AUFGABE 7:
Es sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Familie von Teilmengen einer Menge A . Zeigen Sie $\bigcup \mathcal{A}$ ist die kleinste obere Schranke von $\mathcal{A}$, also das Supremum von $\mathcal{A}$, wenn wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ durch Inklusion ordnen.

AUFGABE 8:
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2,$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4.$$

Abgabetermin ist Freitag, 02.11.07, im Repetitorium.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

30.10.07

Analysis I
WS 2007/08
3.Übung

AUFGABE 9:
Zeigen Sie die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen der Menge $\{1,\ldots,n\}$, d.h. $Per(n)$ die Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$, enthält genau $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n$ Elemente.

AUFGABE 10:
Zeigen Sie für eine beliebige Menge A , daß eine injektive, aber keine surjektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ existiert. Geben Sie ein überabzählbare Menge an.
(Hinweis: Betrachten Sie $B := \{a \in A \mid a \notin f(a)\ \} \subseteq A$.)

AUFGABE 11:
Zeigen Sie eine Menge $A \neq \emptyset$ ist genau dann abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ existiert.
(Hinweis: Verwenden Sie Proposition 1.8 der Vorlesung.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 08.11.07.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller 08.11.07

Analysis I
WS 2007/08
4.Übung

AUFGABE 12:
Zeigen Sie die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen einer Menge A , d.h. $Per(A)$ die Permutationen von A , bilden mit der Verkettung von Funktionen eine Gruppe, die nicht abelsch ist, wenn A mindestens drei Elemente enthält.

AUFGABE 13:
Zeigen Sie mit folgenden Schritten, daß $2^{(2^5)}+1$ keine Primzahl ist.

1. Es gilt $2^7 5 = 640$, also
$$2^7 5 \equiv -1 \mod 641,$$
und
$$2^{28} 5^4 \equiv 1 \mod 641.$$
2. Es gilt $5^4 + 2^4 = 625 + 16 = 641$, also
$$5^4 \equiv -2^4 \mod 641.$$
3.
$$2^{32} \equiv -1 \mod 641,$$
also ist 641 ein Teiler von $2^{(2^5)}+1$.

AUFGABE 14:
Zeigen Sie für einen Körper $(K,+,\cdot)$ und $a,b \in K, n,m \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion
$$a^{n+m} = a^n a^m, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$
Zeigen Sie weiter für $a^n = b$, d.h. " $a = b^{1/n}$ ",
$$b^m = (a^m)^n = \text{"} \left((b^{1/n})^m\right)^n \text{"}.$$

AUFGABE 15:
Für $A, B \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ setzen wir
$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$
$$AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\},$$
$$xA := \{xa \mid a \in A\}.$$

Zeigen Sie für nach oben beschränkte $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B,$$
$$\sup(xA) = x \sup A \text{ für } x \geq 0,$$
$$\sup(AB) = \sup A \sup B, \text{ falls } A, B \subseteq [0, \infty[.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 15.11.07.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

15.11.07

Analysis I
WS 2007/08
5.Übung

AUFGABE 16:
Zeigen Sie

$$i^3 = -i, i^4 = 1, i^{-1} = -i,$$

und berechnen Sie folgende Ausdrücke in der Form $a + ib$

$$(1+i)^3, \qquad (2+3i)/(3-4i),$$
$$i^5 + i^{16}, \qquad \tfrac{1}{2}(1+i)/(1+i^{-8}).$$

AUFGABE 17:(Fermatsche Primzahlen)
Zeigen Sie, ist $2^n + 1, n \in \mathbb{N}$, eine Primzahl, so ist $n = 2^m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$.
(Hinweis: Schreiben Sie $2^{kl} + 1 = (2^k)^l - (-1)^l$ für l ungerade und verwenden Sie die geometrische Reihe.)

AUFGABE 18:
Zeigen Sie folgende Indentitäten:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,$$
$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Binomischen Satz.)

AUFGABE 19:
Zeigen Sie für $x > 0, n, m \in \mathbb{N}, k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k/n = l/m$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^k = \sqrt[m]{x^l}$$

und definieren Sie damit x^q für $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie damit

$$x^{p+q} = x^p x^q, \quad (x^p)^q = x^{pg}, \quad (xy)^p = x^p y^p,$$

und weiter

$$x < y \Leftrightarrow x^q < y^q \quad \text{für } q > 0 \quad \text{bzw.} \quad x < y \Leftrightarrow x^q > y^q \quad \text{für } q < 0,$$
$$p < q \Leftrightarrow x^p < x^q \quad \text{für } x > 1 \quad \text{bzw.} \quad p < q \Leftrightarrow x^p > x^q \quad \text{für } x < 1,$$

für $x, y > 0, p, q \in \mathbb{Q}$.

Abgabetermin ist Donnerstag, 22.11.07.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

22.11.07

Analysis I
WS 2007/08
6.Übung

AUFGABE 20:
Zeigen Sie für $x, y \geq \delta > 0$

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leq \frac{\delta^{-1+1/n}}{n} |x - y|.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe.)
AUFGABE 21:
Zeigen Sie für $a_{ij}, a_i, b_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m,$

$$\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{f:\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}} \prod_{i=1}^{n} a_{if(i)},$$

$$\prod_{i=1}^{n} b_i - \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\prod_{k=1}^{i-1} a_k \right) (b_i - a_i) \left(\prod_{k=i+1}^{n} b_k \right) \right).$$

AUFGABE 22:
Zeigen Sie folgende Grenzwertbeziehungen

$$\frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} \to \frac{1}{3}, \quad \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4} \to \frac{1}{4}$$

für $n \to \infty$.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.)
AUFGABE 23:(Arithmetisch-geometrisches Mittel)
Es sei $0 < a_0 \leq b_0$ und rekursiv

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren monoton nichtfallend bzw. nichtwachsend gegen den gleichen Grenzwert, das sogenannten arithmetisch-geometrische Mittel von a_0 und b_0 .

Abgabetermin ist Donnerstag, 29.11.07.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller 29.11.07

Analysis I
WS 2007/08
7.Übung

AUFGABE 24:
Die Gauß-Klammer

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \}$$

bezeichnet die größte ganze Zahl kleiner gleich $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Häufungspunkte der Folge $(nx - \lfloor nx \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ an.
(Hinweis: Unterscheiden Sie rationales und irrationales $x \in \mathbb{R}$.)

AUFGABE 25:
$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine streng monoton wachsende Folge mit $b_n \to \infty$. Zeigen Sie

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \to a \in \mathbb{C} \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to a$$

und damit

$$\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} \to \frac{1}{p+1} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Cauchyschen Grenzwertsatz, Proposition 4.3, der Vorlesung.)

AUFGABE 26:
Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4}.$$

AUFGABE 27:
Es sei $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

ist auch konvergent.
(Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

AUFGABE 28:
Zeigen Sie das Abelsche und Dirichletsche Konvergenzkriterium: Für $a_k \in \mathbb{C}, b_k \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und beschränkt,
2. $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert monoton gegen 0 .

(Hinweis: Verwenden Sie die Abelsche partielle Summation aus Proposition 3.4 der Vorlesung.)

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben.
Abgabetermin ist Donnerstag, 06.12.07.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

06.12.07

Analysis I
WS 2007/08
8.Übung

AUFGABE 29:
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^4 2^{-n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{1/2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(e-(1+\frac{1}{n})^n\Big),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(e-(1+\frac{1}{n})^n\Big)/n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^n/n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!/n^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}.$$

AUFGABE 30:
Zu $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}, a_n \geq 2$ und $x \geq 0$ sei x_0 die größte ganze Zahl mit $x_0 \leq x$ und rekursiv sei x_n die größte ganze Zahl mit

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{a_1\cdots a_k} \leq x.$$

Zeigen Sie $0 \leq x_n \leq a_n - 1$ für $n \geq 1$,

$$\nexists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n : x_k = a_k - 1, \tag{1}$$

und

$$x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{a_1\cdots a_n}.$$

Zeigen Sie umgekehrt, für $x_0 \in \mathbb{N}_0, 0 \leq x_n \leq a_n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$ mit (1) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n/(a_1\cdots a_n)$, und für $x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n/(a_1\cdots a_n)$, ergibt obige Definition $x_0, x_1, \ldots$
(Hinweis: Gehen Sie vor wie in der Vorlesung und beachten Sie $a_1 \ldots a_n \geq 2^n$.)

AUFGABE 31:
Eine Funktion $f : Z \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt lipschitzstetig, falls für ein $0 \leq L < \infty$

$$|f(z) - f(w)| \leq L|z - w| \quad \text{für alle } z, w \in Z.$$

Zeigen Sie, daß lipschitzstetige Funktionen stetig auf Z sind.

AUFGABE 32:

Es sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(q) := e^q$ für $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß der Grenzwert

$$\bar{f}(x) := \lim_{q \to x, q \in \mathbb{Q}} f(q)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und daß damit eine stetige Funktion $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wird, die f fortsetzt. Zeigen Sie weiter, daß $\bar{f}$ die einzige stetige Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$ ist.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 19 und 20.)

Keine Abgabe

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

13.12.07

Analysis I
WS 2007/08
9.Übung

AUFGABE 33:
Untersuchen Sie folgende Grenzprozesse auf Konvergenz bzw. Divergenz und geben Sie im Falle von Konvergenz den Grenzwert an.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h},\quad \lim_{x\searrow 0}x^x,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}, a>0.$$

AUFGABE 34:
Untersuchen Sie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x):=\begin{cases} 1 & \text{für } x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}, \end{cases}\qquad g(x):=\begin{cases} 1/l & \text{für } x=k/l, k\in\mathbb{Z}-\{0\}, l\in\mathbb{N}, \\ & |k|,l \text{ teilerfremd}, \\ 1 & \text{für } x=0, \\ 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}, \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

AUFGABE 35:
Es sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}, a<b\in\mathbb{R}$ monoton nichtfallend. Zeigen Sie, daß f bis auf abzählbar viele $x\in]a,b[$ stetig in x ist, d.h. es existiert eine abzählbare Menge $A\subseteq]a,b]$, so daß f in allen $x\in]a,b[-A$ stetig ist.
(Hinweis: Zeigen Sie, f ist stetig in $x\in]a,b[$ genau dann, wenn $\sigma(x):=\lim_{y\searrow x}f(y)-\lim_{y\nearrow x}f(y)\geq 0$ in x verschwindet. Zeigen Sie weiter, daß $[\sigma\geq 1/n]\cap[a+1/n,b-1/n]$ endlich ist.)

AUFGABE 36:(Irrationalität von e)
Zeigen Sie

$$0<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq\frac{2}{(n+1)!},$$

schließen Sie daraus, daß

$$n!\cdot e\notin\mathbb{N}\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

und weiter, daß e irrational ist.

Abgabetermin ist Donnerstag, 20.12.07.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

20.12.07

Analysis I
WS 2007/08
10.Übung

AUFGABE 37:
Zeigen Sie, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n Stück $n-$te Einheitswurzeln $\omega \in \mathbb{C}$ gibt, d.h. $\omega^n = 1$. Zeigen Sie weiter

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = \begin{cases} n & \text{für } \omega = 1, \\ 0 & \text{für } \omega \neq 1. \end{cases}$$

(Hinweis: Beachten Sie $(e^{2\pi i/n})^n = 1$.)
AUFGABE 38: (Komplexer Logarithmus)
Zeigen Sie,

$$\exp|\ \{z \in \mathbb{C} \mid |Im(z)| < \pi\ \} \to \mathbb{C} - \{t \mid t \in]-\infty, 0]\}$$

ist bijektiv und die Umkehrung

$$\log|\ \mathbb{C} - \{t \mid t \in]-\infty, 0]\} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |Im(z)| < \pi\ \}$$

ist stetig.
AUFGABE 39:
Zeigen Sie, daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(3^n x) \text{ für } x \in \mathbb{R},$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist.
AUFGABE 40:
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Zeigen Sie, daß die Partielsumme $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ gleichmäßig auf $B_{\varrho'}(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varrho'\ \}$ für $0 < \varrho' < \varrho$ konvergiert und daß die Summe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stetig auf $B_\varrho(0)$ ist.

Abgabetermin ist Donnerstag, 10.01.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

10.01.08

Analysis I
WS 2007/08
11.Übung

AUFGABE 41: (Rademacher-Funktionen)
Die Rademacher-Funktionen sind definiert durch

$$r_0(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < 1/2, \\ 1 & \text{für } 1/2 \leq t < 1, \end{cases}$$

$r_0(t+l) := r_0(t)$ für $l \in \mathbb{Z}$ und $r_n(t) := r_0(2^n t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, für jede abzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ existiert eine Teilfolge, so daß $(r_{n_k}|A)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, aber es existiert keine Teilfolge, so daß $(r_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.
(Hinweis: Verwenden Sie das Diagonalverfahren im Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli und die dyadischen Zerlegung reeller Zahlen.)

AUFGABE 42:
Es sei $\mathcal{F} \subseteq \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ eine Familie von Funktionen mit gemeinsamer Lipschitzkonstante $L < \infty$, d.h.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [0,1], f \in \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie, $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.

AUFGABE 43:
Zeigen Sie für ein Polynom $P(x) := a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$ für $x \in \mathbb{R}$ vom Grade $\leq n \in \mathbb{N}_0$, daß

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und $P^{(n+1)} = 0$.

AUFGABE 44:
Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen in x .

$$x \log x, \quad (\log x)/x, \quad 1/\log x, \quad \sin x/\cos x, \quad \sinh x/\cosh x,$$

$$e^{\sin x}, \quad e^{1/x^2}, \quad x^x, \quad \log f(x).$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 17.01.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller 17.01.08

Analysis I
WS 2007/08
12.Übung

AUFGABE 45:
Es sei $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(0) \leq f(x)$ für alle $x \in]-1,1[$. Zeigen Sie, wenn die rechtsseitige Ableitung bei 0

$$f'_+(0) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

existiert, so gilt

$$f'_+(0) \geq 0.$$

Diskutieren Sie dieses Resultat für $f(x) := |x|$.

AUFGABE 46:(Leibnizsche Formel)
$f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ seien $n-$fach differenzierbar auf $[a,b]$. Zeigen Sie

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'',$$
$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + g''',$$
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

AUFGABE 47:
$f : I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ sei konvex. Zeigen Sie für $x_1, \ldots, x_n \in I, 0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 1$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

AUFGABE 48:
Berechnen Sie folgende Limiten.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x/2)}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}, \quad \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha - \left(1-\frac{\alpha}{n}\right) \right) \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 24.01.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

24.01.08

Analysis I
WS 2007/08
13.Übung

AUFGABE 49:
Es sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}, a < b \in \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit $|f^{(n)}(t)| \leq CM^n$ für $t \in]a,b[, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{für } x, x_0 \in]a,b[.$$

AUFGABE 50:
Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!) x^n$$

an.

AUFGABE 51:
Zeigen Sie folgende Potenzreihenentwicklungen.

$$\text{Areatanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \quad \text{für } |x| < 1,$$

$$\text{Areasinh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

AUFGABE 52:
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte z.B. mit Potenzreihen oder mit der Regel von de l'Hospital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2}.$$

Abgabetermin ist Freitag, 01.02.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

31.01.08

Analysis I
WS 2007/08
14.Übung

AUFGABE 53:
Zeigen Sie
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n} \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0.$$
(Hinweis: Verwenden Sie den Identitätssatz für Potenzreihen.)

AUFGABE 54:
Zeigen Sie, daß die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^n/n$ für $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1, z \neq -1$ konvergiert und die Summenfunktion $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^n/n$ die Identität
$$\exp(g(z)) = 1 + z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1, z \neq -1$$
erfüllt.
(Hinweis: Verwenden Sie das Dirichletsche Konvergenzkriterium aus Aufgabe 28.)

AUFGABE 55:
Zeigen Sie, für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}, a < b \in \mathbb{R}$, existiert eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$ genau dann, wenn die rechts- und linksseitigen Grenzwerte von f in allen $x \in]a,b[$ und der rechts bzw. linksseitige Grenzwert von f in a bzw. b existieren. Eine solche Funktion f heißt Regelfunktion.

AUFGABE 56:
Es seien $f_k : [a,b] \to \mathbb{C}, a < b \in \mathbb{R},$ seien Regelfunktionen und $f_k \to f$ gleichmäßig. Zeigen Sie f ist eine Regelfunktion und
$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k = \int_a^b f.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 07.02.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. A. Koeller

07.02.08

Analysis I
WS 2007/08
15.Übung

AUFGABE 57:
Bestimmen Sie Stammfunktionen folgender Funktionen in x .

$$x^n \log x, \quad \text{Areatanh}\, x.$$

AUFGABE 58:
Bestimmen Sie Stammfunktionen folgender Funktionen in x .

$$\sin^5 x, \quad \sin x \cos(2x).$$

(Hinweis: Schreiben Sie $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2, \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.)

AUFGABE 59:
Bestimmen Sie Stammfunktionen folgender Funktionen in x .

$$\frac{2x+4}{x^2-8x+15}, \quad \frac{5x^2+7}{x^3-x^2+x-1}.$$

(Hinweis: Schreiben Sie $(2x+3)/(x^2-8x+15) = a/(x-3)+b/(x-5)$ und $(5x^2+7)/(x^3-x^2+x-1) = (ax+b)/(x^2+1)+c/(x-1)$.)

AUFGABE 60:(Gammafunktion)
Die Gammafunktion ist durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt \quad \text{für } x > 0$$

definiert. Zeigen Sie, daß das Integral konvergiert

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{für } x > 0$$

und

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Keine Abgabe.