Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 24.10.08

Analysis III
WS 2008/09
1.Übung

AUFGABE 1:
Geben Sie zu folgenden Funktionen f die Menge in $\mathbb{C}$ an, auf der f holomorph ist, und berechnen Sie die Ableitung.

$$f(z) := z^2, \quad f(z) := \exp(1/z),$$
$$f(z) := \bar{z}, \quad f(z) := |z|.$$

AUFGABE 2:
Es sei $f = u + iv : U \to \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}$ offen, holomorph, $u = Re(f), v = Im(f)$. Zeigen Sie u, v sind harmonisch, d.h.

$$\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0, \quad \Delta v = \partial_{xx} v + \partial_{yy} v = 0.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen.)

AUFGABE 3:
Geben Sie die Potenzreihenentwicklung des komplexen Logarithmus $\log : B_1(1) \to \mathbb{C}$ mit $\log(1) = 0$ an.

AUFGABE 4: (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)
Es sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph in $B_1(0) - \{x \mid -1 < x < 1\}$. Zeigen Sie f ist holomorph in $B_1(0)$.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Morera.)

Abgabetermin ist Freitag, 31.10.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 31.10.08

Analysis III
WS 2008/09
2.Übung

AUFGABE 5:
Zeigen Sie ist f holomorph in U, so ist auch f' holomorph in U.
AUFGABE 6: (Parseval Identität)
Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für } |z| < \varrho.$$

Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t \quad \text{für } 0 < r < \varrho.$$

Schließen Sie damit für holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$|f(z)| \le A + B|z|^k \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

wobei $A, B < \infty$, daß f ein Polynom vom Grad $\le k$ ist.
(Hinweis: Beachten Sie, daß $f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}$ gleichmäßig konvergiert.)
AUFGABE 7:
Zeigen Sie für f dargestellt als Laurent-Reihe ohne Verwendung der Vorlesung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für } \varrho_1 < |z| < \varrho_2,$$

daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} f(z) \, \mathrm{d}z = a_{-1} \quad \text{für } \varrho_1 < r < \varrho_2.$$

(Hinweis: Beachten Sie, daß Laurent-Reihen auf kompakten Teilmengen gleichmäßig konvergieren.)
AUFGABE 8:
Es sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, der bezüglich U nicht nullhomolog ist. Zeigen Sie, es existiert eine in U holomorphe Funktion f mit

$$\int_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z \neq 0,$$

d.h. der Cauchy-Integralsatz kann nicht für nicht nullhomologe Wege gelten.

Abgabetermin ist Freitag, 07.11.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 07.11.08

Analysis III
WS 2008/09
3.Übung

AUFGABE 9: (Satz von Fubini)
Es sei $k : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie

$$\int_a^b \int_c^d k(s,t) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \int_c^d \int_a^b k(s,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s.$$

(Hinweis: Approximieren Sie gleichmäßig mit Treppenfunktionen.)

AUFGABE 10:
Es sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, der nullhomolog bezüglich U ist, und r eine rationale Funktion, deren Pole nicht in U liegen. Zeigen Sie ohne Verwendung des Cauchy-Integralsatzes

$$\int_\gamma r(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

AUFGABE 11:
Zeigen Sie

$$z \mapsto \exp(1/z)$$

hat eine wesentliche Singularität in 0 .

AUFGABE 12:
Es seien f, g holomorph in $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und f habe eine einfache Nullstelle bei $0 \in U$. Zeigen Sie

$$Res(g/f, 0) = \frac{g(0)}{f'(0)}.$$

Abgabetermin ist Freitag, 14.11.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 14.11.08

Analysis III
WS 2008/09
4.Übung

AUFGABE 13:
Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Residuensatz und den Weg $\partial B_R(0)^+$ und Aufgabe 12.)
AUFGABE 14:
Berechnen Sie für $n \geq 2$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Residuensatz und den Weg $\partial\{re^{it} \mid 0 < r < R, 0 < t < 2\pi/n\}$ und Aufgabe 12.)
AUFGABE 15:
Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend, und $A \subseteq U$ habe keine Häufungspunkte in U. Zeigen Sie $U - A$ ist offen und für alle kompakten Mengen $K \subseteq U$ ist $A \cap K$ endlich. Zeigen Sie weiter für g, h holomorph in U und $h \not\equiv 0$, daß $f = g/h$ meromorph in U ist.
AUFGABE 16:
Für eine holomorphe Funktion f in $\mathbb{C} - B_R(0)$ heißt ∞ eine hebbare Singularität, ein Pol oder eine wesentliche Singularität entsprechend dem Verhalten von $z \mapsto f(1/z)$ bei $z = 0$. Zeigen Sie, eine holomorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ mit nicht wesentlicher Singularität bei ∞ ist ein Polynom. Schließen Sie $z \mapsto e^z, \cos z, \sin z$ haben wesentliche Singularitäten bei ∞. Zeigen Sie weiter, eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, d.h. meromorph in $\mathbb{C}$, die Pole häufen sich nicht bei ∞ und mit keiner wesentlichen Singularität bei ∞, ist rational.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 6.)

Abgabetermin ist Freitag, 21.11.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 21.11.08

Analysis III
WS 2008/09
5.Übung

AUFGABE 17:
Es seien g, h holomorph in $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g, h \neq 0$ in U. Zeigen Sie für die logarithmische Ableitung des Produkts $f = gh$

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h}.$$

AUFGABE 18:
Es sei f holomorph auf $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ ein stückweise stetig differenzierbarer geschlossener Weg U, der nullhomolog bezüglich U ist, keine Nullstelle von f in U trifft und

$$Ind_\gamma(z) \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } z \in U - im(\gamma),$$

$I_\gamma := [Ind_\gamma = 1]$. $z_1, \ldots, z_n$ seien die Nullstellen von f in I_γ entsprechend der Vielfachheit. Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} z^k \, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} z_i^k.$$

AUFGABE 19:
Es sei f holomorph in $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\overline{B_1(0)} \subseteq U$,

$$|f(z)| > 1 \quad \text{für } z \in \partial B_1(0),$$
$$f(0) = 1.$$

Zeigen Sie f hat eine Nullstelle in $B_1(0)$.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Rouché.)

AUFGABE 20:
Es seien $f_m, f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f_m \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U. Zeigen Sie, ist f injektiv, so existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq U$ ein $M(K) \in \mathbb{N}$, so daß f_m für $m \geq M(K)$ auf K injektiv ist.

Abgabetermin ist Freitag, 28.11.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 28.11.08

Analysis III
WS 2008/09
6.Übung

AUFGABE 21:
Es sei φ die gebrochen lineare Abbildung mit

$$\varphi(z) := \frac{1-z}{1+z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} - \{-1\},$$

$\varphi(\infty) := -1, \varphi(-1) := \infty$. Zeigen Sie

$$\varphi : B_1(0) \xrightarrow{\approx} \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\},$$

$$\varphi : \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\} \xrightarrow{\approx} B_1(0)$$

und $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0$.

AUFGABE 22:
Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller holomorphen Funktionen auf $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend, mit $0 \in U$ und

$$Re\ f > 0,$$

$$f(0) = 1.$$

Zeigen Sie für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq U$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in K} |f(z)| < \infty.$$

(Hinweis: Betrachten Sie $\varphi \circ f$ für eine gebrochen lineare Funktion φ mit $\varphi : \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\} \xrightarrow{\approx} B_1(0), \varphi(1) = 0$.)

AUFGABE 23:
Es sei f holomorph in $B_1(0) - \{0\}$ mit nach oben oder unten beschränktem Real- oder Imaginärteil. Zeigen Sie f hat eine hebbare Singularität bei 0 .
(Hinweis: Betrachten Sie $\varphi \circ f$ für eine geeignete gebrochen lineare Funktion φ .)

AUFGABE 24:
Es sei $\varphi : U \xrightarrow{\approx} V$ ein Homöomorphismus zwischen zwei offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$, d.h. φ ist bijektiv und φ, φ^{-1} sind stetig. Zeigen Sie, ist U zusammenhängend bzw. einfach zusammenhängend, so ist auch V zusammenhängend bzw. einfach zusammenhängend.

Abgabetermin ist Freitag, 05.12.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 05.12.08

Analysis III
WS 2008/09
7.Übung

AUFGABE 25:
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen expilzit.

1. $y' = 5y + t$.
2. $y' = \alpha y/t, \alpha \neq 0$.
3. $y' = 2ty^2$.
4. $y' = y + ty^5$. (Bernoullische Differentialgleichung)
   (Hinweis: Setzen Sie $v = y^{-4}$.)

AUFGABE 26:
Es seien $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ stetig, und y sei in $]-\varepsilon, \varepsilon[-\{0\}$ differenzierbar mit

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[-\{0\}.$$

Zeigen Sie, y ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(., y) \quad \text{auf }]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

d.h. y ist differenzierbar bei $t = 0$ und

$$y'(0) = f(0, y(0)).$$

AUFGABE 27:
Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g > 0$. Zeigen Sie, die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(y), \quad y(0) = 0,$$

ist eindeutig und existiert auf dem rechts-maximalen Lösungsintervall $[0, t_0[$ mit

$$t_0 := \int_0^\infty \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s.$$

AUFGABE 28:
Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g(0) = 0, g(t) > 0$ für $t \neq 0$. Zeigen Sie, die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(y), \quad y(0) = 0,$$

ist eindeutig $y \equiv 0$ nach rechts auf Intervallen $[0, t_0[$ genau dann, wenn

$$\int_0^\delta \frac{1}{g(s)} \, \mathrm{d}s = \infty$$

für ein $\delta > 0$.

Abgabetermin ist Freitag, 12.12.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 12.12.08

Analysis III
WS 2008/09
8.Übung

AUFGABE 29: (Satz von Picard-Lindelöf)
Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit einer Lipschitzbedinung

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Definieren Sie für $t_0 > 0$ den Operator $\Phi : \mathcal{C}([-t_0, t_0], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}([-t_0, t_0], \mathbb{R}^n)$ durch

$$(\Phi y)(t) := \int_0^t f(s, y(s)) \, \mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie Φ ist für $Lt_0 < 1$ eine Kontraktion und schließen Sie, das Anfangswertproblem

$$y' = f(., y), \quad y(0) = 0,$$

hat eine lokal eindeutige, gobale Lösung.
(Hinweis: Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.)

AUFGABE 30:
Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung $n-$ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und das zugehörige Polynom

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Zeigen Sie für $y(t) := e^{\lambda t}, D = d/dt$,

$$p(D)y := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = p(\lambda)e^{\lambda t}.$$

AUFGABE 31:
Es sei $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig und schiefsymmetrisch, d.h. $A^T(t) = -A(t)$ für $t \in [a, b]$.
Zeigen Sie die Fundamentallösung

$$Y' = AY, \quad Y(a) = I_n,$$

ist orthogonal, d.h. $Y^T(t)Y(t) = I_n$ für $t \in [a, b]$.

AUFGABE 32:
Es sei $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\eta(x) = 0$ in $|x| \geq R$. Zeigen Sie, es existiert eine eindeutige Abbildung $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = \eta(\Phi_t(x)), \quad \Phi_0(x) = x.$$

Zeigen Sie Φ_t ist stetig differenzierbar,

$$\Phi_t(x) = x \quad \text{für } |x| \geq R,$$
$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s},$$

und schließen Sie, $\Phi_t : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$ ist ein bijektiver Diffeomorphismus.

Abgabetermin ist Freitag, 19.12.08.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 19.12.08

Analysis III
WS 2008/09
9.Übung

AUFGABE 33:
Es sei $\mathcal{S} := \{[a,\infty[,]-\infty,a[\mid a \in \mathbb{R}\ \}$ und $\mathcal{B} := \{[a,b[\mid a < b\ \}$. Zeigen Sie $\mathcal{S}$ ist eine Subbasis und $\mathcal{B}$ eine Basis der gleichen Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$, und $\mathcal{T}$ ist feiner als die euklidische Topologie $\mathcal{T}_{euk}$, die durch die Metrik $d(x,y) := |x-y|$ induziert wird. Zeigen Sie weiter, daß $[a,b[, a < b$, in dieser Topologie offen und abgeschlossen ist.

AUFGABE 34:
Es sei X eine Menge und $\mathcal{T}_{\aleph} := \{U \subseteq X \mid X - U \text{ ist abzählbar }\} \cup \{\emptyset\}$. Zeigen Sie $\mathcal{T}_{\aleph}$ ist eine Topologie, die für überabzählbares X keinen Hausdorff-Raum erzeugt. Zeigen Sie weiter $x_n \to x$ genau dann, wenn

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n = x,$$

und schließen Sie, jede Abbildung $f : X \to Y$ ist folgenstetig. Andererseits ist für $X = Y = \mathbb{R}$ die Abbildung $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\aleph}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{euk})$ mit der euklidischen Topologie $\mathcal{T}_{euk}$ nicht stetig.

AUFGABE 35:
Es sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie folgende Aussagen und geben Sie bei den Inklusionen ein Gegenbeispiel für Gleichheit.

$$int(A \cap B) = int(A) \cap int(B), \quad int(A \cup B) \supseteq int(A) \cup int(B),$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\text{Häufungspunkte von } (A \cup B) = (\text{Häufungspunkte von } A) \cup (\text{Häufungspunkte von } B),$$

$$\bar{A} \cap U \subseteq \overline{A \cap U} \text{ für } U \text{ offen.}$$

AUFGABE 36:
Es sei $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\mathcal{B} := \{]a,b[\mid a < b\ \} \cup \{\bar{\mathbb{R}} - [-R,R] \mid R > 0\ \}$. Zeigen Sie $\mathcal{B}$ ist Basis einer kompakten Topologie auf $\bar{\mathbb{R}}$, deren Spurtopologie auf $\mathbb{R}$ die euklidische Topologie ist.

Abgabetermin ist Freitag, 09.01.09.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 16.01.09

Analysis III
WS 2008/09
10.Übung

AUFGABE 37:
Es seien X_n topologische Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Zeigen Sie, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ erfüllt auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
AUFGABE 38:
Zeigen Sie, sind zwei topologische Räume X und Y homöomorph, so existiert zu jedem $x \in X$ ein $y \in Y$, so daß $X - \{x\}$ und $Y - \{y\}$ homöomorph sind. Schließen Sie, daß $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n, n > 1$, nicht homöomorph sind.
(Hinweis: $\mathbb{R}^n - \{x\}, x \in \mathbb{R}^n$, ist für $n = 1$ nicht zusammenhängend, aber für $n > 1$ zusammenhängend.)

Abgabetermin ist Freitag, 23.01.09.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 23.01.09

Analysis III
WS 2008/09
11.Übung

AUFGABE 39:
Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K , V^* der Dualraum der linearen Funktionale, und $V^{**} = (V^*)^*$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Für $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k \in V^*$ linear unabhängig und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ existiert $v \in V$ mit

$$\Lambda_i v = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

d.h. $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) : V \to K^k$ ist surjektiv.

2. Für $\Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_k \in V^*$ mit

$$\forall v \in V : \Lambda_1 v = \dots = \Lambda_k v = 0 \Longrightarrow \Lambda v = 0$$

gilt

$$\Lambda \in span\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_k\}.$$

3. Für $v^{**} \in V^{**}$ und endlich-dimensionales $W \subseteq V^*$ existiert $v \in V$ mit

$$\langle v^{**}, \Lambda \rangle = \Lambda v \quad \forall \Lambda \in W.$$

AUFGABE 40:
Es sei X ein normierter Raum, und $Y \subseteq X$ ein dichter Unterraum. Zeigen Sie, jede beschränkte lineare Abbildung $T : Y \to Z$ in einen Banachraum Z läßt sich eindeutig zu einer beschränkten linearen Abbildung $X \to Z$ fortsetzen.
(Hinweis: Betrachen Sie für $x \in X$ eine Folge $y_j \in Y$ mit $y_j \to x$ und beachten Sie, daß $(Ty_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Z ist.)

AUFGABE 41:
Es seien $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f_n \to f$ konvergiere punktweise auf $[0,1]$. Es sei

$$E_{m,k} := \cup_{n=m}^{\infty} [|f_n - f_m| > 1/k],$$
$$A := \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \overline{E_{m,k}}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Für $E_m \subseteq [0,1]$ beliebig gilt

$$\cap_{m=1}^{\infty} \overline{E_m} \subseteq (\cap_{m=1}^{\infty} E_m) \cup (\cup_{m=1}^{\infty} (\overline{E_m} - E_m)).$$

2. $\cap_{m=1}^{\infty} E_{m,k} = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

3. $A \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} (\overline{E_{m,k}} - E_{m,k})$.

4. $int(A) = \emptyset$, also ist $[0,1] - A$ dicht in $[0,1]$.
   (Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Baire.)

5. f ist stetig auf $[0,1] - A$, also stetig auf einer dichten Teilmenge von $[0,1]$.

AUFGABE 42:
Es sei $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}, y_j \in \mathbb{C}$ so, daß für alle $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^p, 1 \leq p < \infty$ die Summe

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \in \mathbb{C}$$

konvergiert. Zeigen Sie $y \in l^q$ für $p^{-1} + q^{-1} = 1$.
(Hinweis: Betrachten Sie $y^k := \sum_{j=1}^{k} y_j e_j \in l^q$ und verwenden Sie $l^q \cong (l^p)^*$ und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit.)

Abgabetermin ist Freitag, 30.01.09.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 30.01.09

Analysis III
WS 2008/09
12.Übung

AUFGABE 43:
Zeigen Sie $C^0([0,1],\mathbb{R})$ ist mit

$$\| f \|_1 := \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

ein normierter Vektorraum, aber kein Banachraum.

AUFGABE 44:
Es sei $T : l^2 \to l^2$ mit $T(x_j)_{j\in\mathbb{N}} := (x_j/j)_{j\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie T ist stetig linear mit $\| T \| \leq 1$, injektiv, aber nicht surjektiv.

AUFGABE 45:
Es sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $\Lambda : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\| f \|_{C^0([0,1],\mathbb{R})} := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ und

$$\Lambda f := \int_0^1 f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie Λ ist ein stetiges, lineares Funktional mit

$$\| \Lambda \| = \int_0^1 |g(t)| \, \mathrm{d}t.$$

(Hinweis: Betrachten Sie zuerst eine Treppenfunktion g .)

AUFGABE 46:
Es sei $e_i := (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}, e := (1)_{j\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Zeigen Sie es existiert ein stetiges, lineares Funktional $\Lambda \in (l^\infty)^*$ mit

$$\Lambda e_i = 0, \Lambda e \neq 0.$$

Zeigen Sie weiter, es gibt kein $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^1$ mit

$$\Lambda x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \quad \text{für alle } x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^\infty.$$

Schließen Sie daraus, daß die Einbettung $l^1 \hookrightarrow (l^\infty)^*$ nicht surjektiv ist.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Hahn-Banach.)

AUFGABE 47*:
Es sei X ein Banachraum, $x^{**} \in X^{**}$ mit $\| x^{**} \| < 1$ und $W \subseteq X^*$ endlich-dimensional.
Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Es existiert ein $x \in X$ mit
$$\langle x^{**}, \Lambda \rangle = \Lambda x \quad \forall \Lambda \in W. \tag{1}$$
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 39.)
2. Setzen wir $Y := \cap_{\Lambda \in W} ker\ \Lambda$, so gilt (1) für alle Elemente von $x + Y$.
3. Angenommen $B_1(0) \cap (x + Y) = \emptyset$, dann existieren $\Lambda \in X^*, \gamma \in \mathbb{R}$ mit
$$\forall z \in B_1(0), y \in Y : \Lambda z < \gamma \leq \Lambda(x + y). \tag{2}$$
(Hinweis: Verwenden Sie den Trennungssatz von Hahn-Banach.)
4. Für Λ wie in (2) gilt
$$\| \Lambda \| \leq \gamma, \quad Y \subseteq ker\ \Lambda.$$
Schließen Sie daraus $\Lambda \in W$ und rechnen mit (1)
$$\gamma \leq |\Lambda x| = |\langle x^{**}, \Lambda \rangle| \leq \| x^{**} \| \gamma < \gamma,$$
also ein Widerspruch.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 39.)
5. Es existiert $x \in B_1(0)$, das (1) erfüllt.

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben.
Abgabetermin ist Freitag, 06.02.09.

Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle 06.02.09

Analysis III
WS 2008/09
13.Übung

AUFGABE 48:
Es sei $e_i := (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$. Zeigen Sie

$$e_i \to 0 \text{ schwach in } l^2,$$

aber nicht in der Norm.
(Hinweis: Verwenden Sie die Isomorphie $l^2 \xrightarrow{\approx} (l^2)^*$.)

AUFGABE 49:
Es sei X en Hilbertraum, $x_k, x \in X$. Zeigen Sie

$$x_k \to x \text{ in der Norm} \Longleftrightarrow x_k \to x \text{ schwach in } X, \| x_k \| \to \| x \| .$$

AUFGABE 50:
Es sei $\Lambda_n : l^\infty \to \mathbb{C}$ mit

$$\Lambda_n(x_j)_{j\in\mathbb{N}} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Zeigen Sie keine Teilfolge von $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach* in $(l^\infty)^*$. Vergleichen Sie dies mit Korollar 9.3 der Vorlesung.
(Hinweis: Betrachten Sie $n_{k+1}/n_k \to \infty, x_j := (-1)^j$ für $n_{j-1} < j \leq n_j$ und zeigen Sie $|\Lambda_{n_k}(x_j)_{j\in\mathbb{N}} - (-1)^k| \leq 2n_{k-1}/n_k \to 0$.)

AUFGABE 51:
Es seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear mit

$$x_n \to 0 \Longrightarrow Tx_n \to 0 \text{ schwach in } Y.$$

Zeigen Sie T ist stetig.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen und den Satz von Hahn-Banach.)

AUFGABE 52*:
X sei ein normierter Raum. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. (Satz vom fast orthogonalen Element)
   Für einen abgeschlossenen Unterraum $Y \subseteq X, \neq X$, und $0 < \theta < 1$ existiert ein $x \in X$ mit
   $$\| x \| = 1, \theta \leq d(x, Y).$$
   (Hinweis: Wählen Sie $x_0 \in X - Y$ und $y \in Y$ mit $\| x_0 - y \| \leq \theta^{-1} d(x_0, Y)$ und setzen Sie $x := (x_0 - y)/ \| x_0 - y \|$.)

2. Jeder endlich-dimensionales Unterraum $Y \subseteq X$ ist abgeschlossen. (Hinweis: Beachten Sie $Y \cong \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.)

3. Gilt
$$\overline{B_1(0)} \subseteq \cup_{i=1}^N B_{1/2}(x_i),$$
so gilt $X = span\{x_1, \ldots, x_N\}$.
(Hinweis: Wenden Sie den Satz vom fast orthogonalen Element auf den endlich-dimensionales Unterraum $Y := span\{x_1, \ldots, x_N\}$ an.

4. $\overline{B_1(0)} \subseteq X$ ist kompakt genau dann, wenn X endlich-dimensional ist.

AUFGABE 53*:

X sei ein Banachraum über $K = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, und $i = i_X : X \to X^{**}$ die natürliche Einbettung in den Bidualraum. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Die natürliche Einbettung $i_X : X \to X^{**}$ ist ein Homöomorphismus bezüglich der schwachen Topologie auf X und die schwach*-Topologie auf X^{**} auf einen schwach*-dichten Unterraum.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 39.)

2. $i_X(\overline{B_1(0)})$ liegt schwach*-dicht in $\overline{B_1(0)} \subseteq X^{**}$.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 47*.)

3. X ist reflexiv genau dann, wenn $\overline{B_1(0)} \subseteq X$ schwach-kompakt ist.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Banach-Alaoglu.)

Keine Abgabe.