Harmonische Analysis

Reiner Schätzle
Wintersemester 2023/24
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vorbereitungen

1 Die Fourier-Transformation

Definition 1.1 *Ein komplexes Borel-Maß auf* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Abbildung* $\mu : \mathcal{B}^n \to \mathbb{C}$ *von der Menge aller Borelmengen in* $\mathbb{R}^n$ *in die komplexen Zahlen, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

$$\mu(\emptyset) = 0,$$
$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

wenn A_i *paarweise disjunkte Borelmengen sind.*

Wir bezeichnen die Menge aller komplexen Borel-Maße auf $\mathbb{R}^n$ *mit* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *.* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *ist durch die Zuordnung*

$$f \mapsto f\mathcal{L}^n$$

in natürlicher Weise ein Unterraum von $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *.*

□

Bemerkung:
In der Maßtheorie wird die Total-Variation $|\mu|$ von $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$|\mu|(A) := \sup\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| \mid A_i \in \mathcal{B}^n \text{ sind paarweise disjunkt}, A_i \subseteq A \} \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n.$$

Es kann gezeigt werden, daß $|\mu|$ ein nicht-negatives, endliches Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist. Mit der Norm

$$\| \mu \| := |\mu|(\mathbb{R}^n) = \sup\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| \mid A_i \in \mathcal{B}^n \text{ sind paarweise disjunkt } \} < \infty$$

ist $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ist der Dualraum des Raumes aller stetigen, im unendlichen verschwindenden Funktionen

$$C^0_*(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^0_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid \forall \varepsilon > 0 : [|\varphi| > \varepsilon] \subset\subset \mathbb{R}^n \}.$$

Äquivalent dazu ist $C^0_*(\mathbb{R}^n)$ der Abschluß von $C^0_0(\mathbb{R}^n)$ im Raum aller stetigen, beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, den wir mit $C^0_b(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen.

Für $\varphi \in L^1(\mu) := L^1(|\mu|)$ gilt die Dreiecksungleichung

$$\left| \int \varphi \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int |\varphi| \, \mathrm{d}|\mu|. \tag{1.1}$$

□

Als nächstes definieren wir eine Multiplikation auf $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, genannt Faltung.

Definition 1.2 *Für* $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *definieren wir die Faltung* $\mu * \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *mit der Dualität aus der Bemerkung durch*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \ \mathrm{d}(\mu * \nu) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\nu(y) \quad \forall \varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

□

Bemerkung:
Da μ und ν Borel-Maße sind, sind alle offenen Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar bezüglich μ und ν . Damit sind alle offenen Intervalle $I \times J \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ meßbar bezüglich des Produktmaßes $\mu \otimes \nu$, und, da slle offenen Menge in $\mathbb{R}^{2n}$ abzählbare Vereinigungen von offenen Intervallen sind, ist das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}^{2n}$.

Die Abbildung $(x, y) \mapsto \varphi(x+y)$ ist stetig, also borelmeßbar auf $\mathbb{R}^{2n}$, und mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \ \mathrm{d}(\mu * \nu) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x+y) \ \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) \quad \forall \varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

□

Einfache Eigenschaften der Faltung stellen wir in der folgenden Proposition zusammen.

Proposition 1.1 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *ist mit der Faltung eine kommutative Banachalgebra mit Einselement* δ_0 *, die Einpunktmasse bei* $0 \in \mathbb{R}^n$ *, d.h. es gilt*

$$\begin{gathered}
\mu * \nu = \nu * \mu \quad \forall \mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \\
(\alpha\mu) * \nu = \alpha(\mu * \nu) \quad \forall \mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{C}, \\
(\mu * \nu) * \sigma = \mu * (\nu * \sigma) \quad \forall \mu, \nu, \sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \\
\mu * (\nu + \sigma) = (\mu * \nu) + (\mu * \sigma) \quad \forall \mu, \nu, \sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \\
\mu = \mu * \delta_0 = \delta_0 * \mu.
\end{gathered}$$

Weiter ist $L^1(\mathbb{R}^n)$ *eine Ideal, genauer gilt für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

$$(f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \ \mathrm{d}\mu(y), \tag{1.2}$$

bzw. für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \ \mathrm{d}y. \tag{1.3}$$

Beweis:
Die Kommutativität ergibt sich sofort mit dem Satz von Fubini, da $\varphi(x+y) = \varphi(y+x)$.

Für $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ rechnen wir

$$\int \varphi \ \mathrm{d}((\alpha\mu) * \nu)) = \int \int \varphi(x+y) \ \mathrm{d}(\alpha\mu)(x) \ \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$= \alpha \int \int \varphi(x+y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\nu(y) = \int \varphi \ \mathrm{d}(\alpha(\mu * \nu))$$

und weiter

$$\int \varphi \ \mathrm{d}((\mu * \nu) * \sigma) = \int \int \varphi(w+z) \ \mathrm{d}(\mu * \nu)(w) \ \mathrm{d}\sigma(z) =$$
$$= \int \int \int \varphi(x+y+z) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\nu(y) \ \mathrm{d}\sigma(z),$$

und die Assoziativität ergibt sich wieder mit dem Satz von Fubini. Ohne Verwendung des Satzes von Fubini rechnen wir

$$\int \varphi \ \mathrm{d}(\mu * (\nu + \sigma)) = \int \int \varphi(x+y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}(\nu + \sigma)(y) =$$
$$= \int \int \varphi(x+y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\nu(y) + \int \int \varphi(x+y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\sigma(y) =$$
$$= \int \varphi \ \mathrm{d}(\mu * \nu) + \int \varphi \ \mathrm{d}(\mu * \sigma) = \int \varphi \ \mathrm{d}\Big((\mu * \nu) + (\mu * \sigma)\Big),$$

also folgt das Distributivgesetz. Weiter gilt

$$\int \int \varphi(x+y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\delta_0(y) = \int \int \varphi(x+y) \ \mathrm{d}\delta_0(y) \ \mathrm{d}\mu(x) = \int \varphi \ \mathrm{d}\mu,$$

also $\mu * \delta_0 = \mu$.

Weiter sehen wir

$$\Big| \int \varphi \ \mathrm{d}(\mu * \nu) \Big| \leq \| \varphi \|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \ \| \mu \| \ \| \nu \|,$$

also $\| \mu * \nu \| \leq \| \mu \| \ \| \nu \|$, und $\| \ . \ \|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}$ ist eine Algebranorm.

Da $\mathcal{L}^n$ ein Radon-Maß ist, existiert eine borelmeßbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ bzw. $\mathbb{C}$, die mit f fast überall bezüglich $\mathcal{L}^n$ übereinstimmt. Klarerweise ist die Abbildung $(x, y) \mapsto g(x-y)$ als Verkettung einer stetigen Abbildung und einer borelmeßbaren Abbildung borelmeßbar auf $\mathbb{R}^{2n}$. Da das Produktmaß $\mathcal{L}^n \otimes |\mu|$, wie oben bemerkt, ein Borelmaß ist, rechnen wir mit dem Satz von Fubini und der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes, da μ ein endliches Maß ist,

$$\int |g(x-y)| \ \mathrm{d}(\mathcal{L}^n \otimes |\mu|)(x,y) = \int \int |g(x-y)| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) \ \mathrm{d}|\mu|(y) =$$

$$= \int \int |g(x)| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) \ \mathrm{d}|\mu|(y) = \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ \| \mu \| < \infty.$$

Wählen wir eine Borlmenge $B \supseteq [f \neq g]$ mit $\mathcal{L}^n(B) = 0$, so ergibt obige Rechnung für $g = \chi_B$

$$(\mathcal{L}^n \otimes |\mu|)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid f(x-y) \neq g(x-y) \ \}) \leq$$
$$\leq (\mathcal{L}^n \otimes |\mu|)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x - y \in B \ \}) =$$
$$= \int |\chi_B(x-y)| \ \mathrm{d}(\mathcal{L}^n \otimes |\mu|)(x,y) \leq \| \chi_B \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ \| \mu \| = 0.$$

Zusammen sehen wir $\Big((x,y) \mapsto f(x-y)\Big) \in L^1(\mathcal{L}^n \otimes \mu)$ und mit dem Satz von Fubini

$$\Big(y \mapsto f(x-y)\Big) \in L^1(\mu) \text{ für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Big(x \mapsto (f*\mu)(x) := \int f(x-y)\ \mathrm{d}\mu(y)\Big) \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Weiter folgt mit dem Satz von Fubini und der Translationsinvarianz des Lebesguesmaßes für $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$

$$\int \varphi\ \mathrm{d}(f\mathcal{L}^n * \mu) = \int \int \varphi(x+y) f(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}\mu(y) = \int \varphi(x) \Big(\int f(x-y)\ \mathrm{d}\mu(y) \Big)\ \mathrm{d}x,$$

also $(f\mathcal{L}^n) * \mu = (f*\mu)\mathcal{L}^n$ wie in (1.2).

///

Allgemeiner können auch Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ gefaltet werden.

Proposition 1.2 *Es sei* $1 \le p,q,r \le \infty, f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n), \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r},$$

und wir setzen

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\ \mathrm{d}y$$

bzw.

$$(f*\mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\ \mathrm{d}\mu(y)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ *, für die diese Integrale definiert sind.*

Dann sind $f*g$ *bzw.* $f*\mu$ $\mathcal{L}^n$*−fast überall definiert,* $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *bzw.* $f*\mu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\| f*g \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{1.4}$$

bzw.

$$\| f*\mu \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| \mu \| . \tag{1.5}$$

Beweis:
Zuerst nehmen wir $1 < p,q,r < \infty$ an. Wir sehen $p,q < r$ und

$$\frac{1}{r} + \frac{r-p}{pr} + \frac{r-q}{qr} = 1.$$

Damit folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} &\textstyle\int |f(x-y)g(y)|\ \mathrm{d}y = \\ &= \textstyle\int (|f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r})\ |f(x-y)|^{p(1/p-1/r)}\ |g(y)|^{q(1/q-1/r)}\ \mathrm{d}y \le \\ &\le \Big(\textstyle\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q\ \mathrm{d}y \Big)^{1/r}\ \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{(r-p)/r}\ \| g \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(r-q)/r} \end{aligned}$$

und

$$\int \Big| \int |f(x-y)g(y)|\ \mathrm{d}y \Big|^r\ \mathrm{d}x \le \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^r\ \| g \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^r,$$

also (1.4).

Ist $r = \infty$, so sind p und q konjugiert, und wir erhalten mit der Hölder-Ungleichung

$$\int |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}y \leq \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

bzw.

$$\int |f(x-y)| \, \mathrm{d}|\mu|(y) \leq \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \| \mu \| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

also (1.4) bzw. (1.5).

Ist $r < \infty$, so haben wir $p, q \leq r < \infty$, und für $q = 1$ erhalten wir mit der Jensen-Ungleichung

$$\int \left(\int |f(x-y)| \, \mathrm{d}|\mu|(y) \right)^p \mathrm{d}x \leq$$
$$\leq \int \int |f(x-y)|^p \, \mathrm{d}|\mu(y)| \, \mathrm{d}x \ \ \| \mu \|^{p-1} = \| f \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \| \mu \|^p,$$

also (1.5).

Ist $r < \infty$ und $p, q \neq 1$, so folgt $1 + 1/r = 1/p + 1/q < 2$, also $r > 1$, und zusammen $1 < p, q, r < \infty$, was im ersten Fall bewiesen wurde.

///

Nun kommen wir zur Fourier-Transformation.

Definition 1.3 *Die Fourier-Transformierte eines Maßes* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *ist definiert durch*

$$(\mathcal{F}\mu)(y) := \hat{\mu}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \, \mathrm{d}\mu(x) \quad \textit{für } y \in \mathbb{R}^n$$

bzw. für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \, \mathrm{d}x \quad \textit{für } y \in \mathbb{R}^n.$$

□

Die Fourier-Transformation ist ein Banachalgebrahomomorphismus von $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ nach $C^0_b(\mathbb{R}^n)$, d.h. die Faltung wird in punktweise Multiplikation übertragen.

Proposition 1.3 *Für* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *ist* $\hat{\mu} \in C^0_b(\mathbb{R}^n)$ *, und es gilt*

$$\| \hat{\mu} \|_{C^0_b(\mathbb{R}^n)} \leq \| \mu \| \,. \tag{1.6}$$

Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu}\hat{\nu}. \tag{1.7}$$

Beweis:
Da $|\exp(-2\pi i \langle x, y \rangle)| = 1$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, folgt mit dem Satz von Lebesgue für $y_j \to y \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{\mu}(y_j) = \int \exp(-2\pi i \langle x, y_j \rangle) \, \mathrm{d}\mu(x) \to \int \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \, \mathrm{d}\mu(x) = \hat{\mu}(y),$$

und $\hat{\mu}$ ist stetig.

Weiter gilt mit (1.1)

$$|\hat{\mu}(y)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i\langle x, y\rangle)\ \mathrm{d}\mu(x) \right| \leq \| \mu \|,$$

also (1.6).

Wir wählen $\eta \in C_0^0(B_2(0)), 0 \leq \eta \leq 1, \eta \equiv 1$ in $B_1(0)$ und setzen $\eta_R(x) := \eta(x/R)$. Aus der Definition der Faltung erhalten wir

$$\begin{aligned}\widehat{\mu * \nu}(z) = \int \exp(-2\pi i\langle x, z\rangle)\ \mathrm{d}(\mu * \nu)(x) \leftarrow \int \exp(-2\pi i\langle x, z\rangle)\eta_R(x)\ \mathrm{d}(\mu * \nu)(x) = \\ = \int\int \exp(-2\pi i\langle x + y, z\rangle)\eta_R(x + y)\ \mathrm{d}\mu(x)\ \mathrm{d}\nu(y) \rightarrow \\ \rightarrow \int\int \exp(-2\pi i\langle x + y, z\rangle)\ \mathrm{d}\mu(x)\ \mathrm{d}\nu(y) = \\ = \int\int \exp(-2\pi i\langle x, z\rangle)\exp(-2\pi i\langle y, z\rangle)\ \mathrm{d}\mu(x)\ \mathrm{d}\nu(y) = \hat{\mu}(z)\hat{\nu}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Lebesgue angewendet haben, da $\exp(-2\pi i\langle ., z\rangle)$ eine beschränkte, stetige Funktion ist. Dies ergibt (1.7).

///

Weiter überträgt die Fourier-Transformation Translationen in Multiplikationen mit der Exponentialfunktion und Homothetien. Wir fixieren folgende Notation.

Definition 1.4 *Für* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$ *setzen wir*

$$\begin{gathered}(\tau_x\mu)(A) := \mu(A - x) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n, \quad (\tau_x f)(y) := f(y - x) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^n, \\ (h_\lambda\mu)(A) := \lambda^{-n}\mu(\lambda A) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n, \quad (h_\lambda f)(y) := f(\lambda y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^n, \\ \mu^*(A) := \mu(-A) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n, \quad f^*(y) := f(-y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^n, \\ e_x(y) := \exp(2\pi i\langle x, y\rangle).\end{gathered}$$

□

Proposition 1.4 *Für* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$ *gilt*

$$\begin{gathered}\widehat{(\tau_x\mu)} = e_{-x}\hat{\mu}, \\ \widehat{(e_x\mu)} = \tau_x\hat{\mu}, \\ \widehat{(h_{\lambda^{-1}}\mu)} = \lambda^n h_\lambda\hat{\mu}, \\ \widehat{\mu^*} = (\hat{\mu})^*, \\ \widehat{\overline{\mu^*}} = \overline{\hat{\mu}}.\end{gathered}$$

Beweis:
Für $y \in \mathbb{R}^n$ rechnen wir

$$\begin{aligned}\widehat{(\tau_x\mu)}(y) = \int \exp(-2\pi i\langle z, y\rangle)\ \mathrm{d}(\tau_x\mu)(z) = \\ = \int \exp(-2\pi i\langle z + x, y\rangle)\ \mathrm{d}\mu(y) = e_{-x}(y)\hat{\mu}(y),\end{aligned}$$

$$\widehat{(e_x\mu)}(z) = \int \exp(-2\pi i\langle z,y\rangle)\ \mathrm{d}(e_x\mu)(z) =$$
$$= \int \exp(-2\pi i\langle z,y-x\rangle)\ \mathrm{d}\mu(z) = \hat{\mu}(y-x) = (\tau_x\hat{\mu})(y),$$

$$\widehat{(h_{\lambda^{-1}}\mu)}(y) = \int \exp(-2\pi i\langle z,y\rangle)\ \mathrm{d}(h_{\lambda^{-1}}\mu)(z) =$$
$$= \int \exp(-2\pi i\langle \lambda z,y\rangle)\lambda^n\ \mathrm{d}\mu(z) = \lambda^n \int \exp(-2\pi i\langle z,\lambda y\rangle)\ \mathrm{d}\mu(z) =$$
$$= \lambda^n\hat{\mu}(\lambda y) = \lambda^n(h_\lambda\hat{\mu})(y),$$

$$\widehat{\mu^*}(y) = \int \exp(-2\pi i\langle x,y\rangle)\ \mathrm{d}\mu^*(x) =$$
$$= \int \exp(-2\pi i\langle x,-y\rangle)\ \mathrm{d}\mu(x) = \hat{\mu}(-y) = (\hat{\mu})^*(y)$$

und

$$\widehat{\overline{\mu^*}}(y) = \int \exp(-2\pi i\langle x,y\rangle)\ \mathrm{d}\overline{\mu^*}(x) = \overline{\int \exp(2\pi i\langle x,y\rangle)\ \mathrm{d}\mu^*(x)} =$$
$$= \overline{\int \exp(2\pi i\langle -x,y\rangle)\ \mathrm{d}\mu(x)} = \overline{\hat{\mu}}(y).$$

///

Die große Bedeutung der Fourier-Transformation für Differentialgleichungen besteht darin, daß sie Differentiation in Multiplikation mit Polynomen überträgt.

Definition 1.5 *Für* $k = 1,\ldots,n$ *setzen wir*

$$D_k := (2\pi i)^{-1}\ \partial_k$$

für Multiindices $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$D^\gamma := D_1^{\gamma_1}\cdots D_n^{\gamma_n}$$

und für Polynome $P(x,\xi) = \sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma(x)\xi^\gamma, a_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}_0, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$P(x,D) := \sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma(x)D^\gamma \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Im folgenden schreiben wir $\xi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \xi_k(x) := x_k$.

□

Proposition 1.5 *Für* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), k \in \{1,\ldots,n\}$ *mit* $\xi_k \in L^1(\mu)$ *gilt* $\nu := \xi_k\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$D_k\hat{\mu} = -\hat{\nu}.$$

Ist umgekehrt $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \partial_k f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *im Sinne von einer schwachen Ableitung*

$$\int \varphi\ \mathrm{d}(\partial_k f) := -\int f\ \partial_k\varphi\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n),$$

so gilt

$$\widehat{D_k f} = \xi_k\hat{f}.$$

Beweis:
Für $y \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ sehen wir mit dem Satz von Lebesgue, da $\xi_k \in L^1(\mu)$,

$$h^{-1}(\hat{\mu}(y + he_k) - \hat{\mu}(y)) = \int h^{-1}(\exp(-2\pi i\langle x, y + he_k\rangle) - \exp(-2\pi i\langle x, y\rangle)) \, \mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \int \exp(-2\pi i\langle x, y\rangle)h^{-1}(\exp(-2\pi i\langle x, he_k\rangle) - 1) \, \mathrm{d}\mu(x) \to$$
$$\to \int \exp(-2\pi i\langle x, y\rangle) \, (-2\pi i x_k) \, \mathrm{d}\mu(x) = -2\pi i \, \hat{\nu}(y),$$

also

$$D_k\hat{\mu} = -\hat{\nu}.$$

Umgekehrt rechnen wir mit $\eta \in C_0^1(B_2(0)), 0 \leq \eta \leq 1, \eta \equiv 1$ in $B_1(0)$, $\eta_R(x) := \eta(x/R)$ und dem Satz von Lebesgue

$$\widehat{\partial_k f}(y) = \int \exp(-2\pi i\langle x, y\rangle) \, \mathrm{d}(\partial_k f)(x) \leftarrow \int \exp(-2\pi i\langle x, y\rangle)\eta_R(x) \, \mathrm{d}(\partial_k f)(x) =$$
$$= -\int f(x)\partial_{x_k}\Big(\exp(-2\pi i\langle x, y\rangle)\eta_R(x)\Big) \, \mathrm{d}x =$$
$$= -\int f(x)(-2\pi i y_k)\exp(-2\pi i\langle x, y\rangle)\eta_R(x) \, \mathrm{d}x - \int f(x)\exp(-2\pi i\langle x, y\rangle)\partial_k\eta_R(x) \, \mathrm{d}x \to$$
$$\to 2\pi i y_k\hat{f}(y),$$

also

$$\widehat{D_k f} = \xi_k\hat{f}.$$

///

Das Bild von $L^1(\mathbb{R}^n)$ unter der Fourier-Transformation in $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ können wir weiter einschränken.

Lemma 1.6 (Riemann-Lebesgue) *Für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\hat{f} \in C_*^0(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:
Mit Proposition 1.3 wissen wir bereits, daß $\hat{f} \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, also stetig und beschränkt ist.
Für $y \neq 0$ gilt

$$\hat{f}(y) = \int f(x)\exp(-2\pi i\langle x, y\rangle) \, \mathrm{d}x = -\exp(-\pi i)\int f(x)\exp(-2\pi i\langle x, y\rangle) \, \mathrm{d}x =$$
$$= -\int f(x)\exp(-2\pi i\langle x + y/(2|y|^2), y\rangle) \, \mathrm{d}x =$$
$$= -\int f(x - y/(2|y|^2))\exp(-2\pi i\langle x, y\rangle) \, \mathrm{d}x,$$

und

$$2\hat{f}(y) = \int (f(x) - f(x - y/(2|y|^2)))\exp(-2\pi i\langle x, y\rangle) \, \mathrm{d}x.$$

Also

$$|\hat{f}(y)| \leq \frac{1}{2}\int |f(x) - f(x - y/(2|y|^2))| \, \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{für } y \to \infty,$$

und $\hat{f} \in C_*^0(\mathbb{R}^n)$.

///

Unter den Dualitäten $L^\infty(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n)^*$ und $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = C^0_*(\mathbb{R}^n)^*$ ist die Fourier-Transformation ihre eigene duale Abbildung.

Proposition 1.7 *Für* $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\int \hat{\mu} \, \mathrm{d}\nu = \int \hat{\nu} \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.8}$$

Damit ist die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C^0_*(\mathbb{R}^n)$$

ihre eigene duale Abbildung

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:
Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\int \hat{\mu} \, \mathrm{d}\nu = \int \int \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\nu(y) = \int \hat{\nu} \, \mathrm{d}\mu,$$

also (1.8). Damit folgt

$${}_{L^\infty}\langle \mathcal{F}^*\mu, f \rangle_{L^1} = {}_{\mathcal{M}}\langle \mu, \mathcal{F}f \rangle_{C^0_*} = \int \hat{f} \, \mathrm{d}\mu = \int \hat{\mu} f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = {}_{L^\infty}\langle \mathcal{F}\mu, f \rangle_{L^1} \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

und damit $\mathcal{F}^*\mu = \mathcal{F}\mu$.

///

Unser nächstes Ziel ist der Inversionssatz. Als einfache Folge ergibt sich daraus, daß die Fourier-Transformation injektiv ist. Andererseits stellt der Inversionsatz zusätzliche Annahmen an das Bild, und tatsächlich sehen wir mit der Dualität aus Proposition 1.7 und der Injektivität, daß die Fourier-Transformationen $\mathcal{F} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to C^0_b(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C^0_*(\mathbb{R}^n)$ nicht surjektiv sind.

Wir beginnen mit einer einfachen Hilfsfunktion.

Proposition 1.8 *Für die Funktion* $\Phi(x) := \exp(-\pi|x|^2)$ *gilt*

$$\hat{\Phi} = \Phi.$$

Beweis:
Φ erfüllt die Differentialgleichung

$$D_k\Phi - i\xi_k\Phi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Da $\xi_k\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, erfüllt $\hat{\Phi}$ mit Proposition 1.5 dieselbe Differentialgleichung

$$D_k\hat{\Phi} - i\xi_k\hat{\Phi} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Da $\Phi \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, folgt $\hat{\Phi}/\Phi \equiv const$. Schließlich rechnen wir

$$\hat{\Phi}(0) = \int \Phi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi t^2) \, \mathrm{d}t \right)^n = 1 = \Phi(0),$$

und es folgt $\hat{\Phi} = \Phi$.

///

Satz 1.1 (Inversionssatz) *Für* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\hat{\mu} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\mu = f\mathcal{L}^n,$$

wobei

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \exp(2\pi i\langle x, y\rangle) \, \mathrm{d}y \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Beweis:
Für Φ aus Proposition 1.8 setzen wir $\Phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\Phi(x/\varepsilon)$ und $\nu := (h_\varepsilon \Phi)\mathcal{L}^n$ für $\varepsilon > 0$. Aus den Propositionen 1.4, 1.7 und 1.8 erhalten wir, da $\Phi(x) = \Phi(-x)$,

$$(\Phi_\varepsilon * \mu)(x) = \int \Phi_\varepsilon(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int \Phi_\varepsilon(y) \, \mathrm{d}(\tau_{-x}\mu)(y) = \int \varepsilon^{-n}\hat{\Phi}(y/\varepsilon) \, \mathrm{d}(\tau_{-x}\mu)(y) =$$

$$= \int \widehat{\tau_{-x}\mu}(y)\Phi(\varepsilon y) \, \mathrm{d}y = \int \hat{\mu}(y) \exp(2\pi i\langle x, y\rangle)\Phi(\varepsilon y) \, \mathrm{d}y.$$

Da $\hat{\mu} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $0 \leq \Phi \leq 1$, erhalten wir

$$\| \Phi_\varepsilon * \mu \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \| \hat{\mu} \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{1.10}$$

Setzen wir

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(y) \exp(2\pi i\langle x, y\rangle) \, \mathrm{d}y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,$$

so erhalten wir weiter mit dem Satz von Lebesgue, da $\hat{\mu} \in L^1(\mathbb{R}^n), \Phi \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \Phi(0) = 1$,

$$(\Phi_\varepsilon * \mu)(x) \to \Phi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(y) \exp(2\pi i\langle x, y\rangle) \, \mathrm{d}y = f(x).$$

Zusammen mit (1.10) folgt

$$\Phi_\varepsilon * \mu \to f \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Dies ergibt für $\varphi \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$

$$\int \varphi f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leftarrow \int \varphi(\Phi_\varepsilon * \mu) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \int \varphi(x)\Phi_\varepsilon(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int \int \Phi_\varepsilon(y-x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\mu(y) = \int (\Phi_\varepsilon * \varphi) \, \mathrm{d}\mu.$$

Da $\int \Phi_\varepsilon = \int \Phi = \hat{\Phi}(0) = \Phi(0) = 1$ und φ gleichmäßig stetig und beschränkt ist, erhalten wir

$$\Phi_\varepsilon * \varphi \to \varphi \quad \text{gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n.$$

Zusammen ergibt sich

$$\int \varphi f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leftarrow \int (\Phi_\varepsilon * \varphi) \, \mathrm{d}\mu \to \int \varphi \, \mathrm{d}\mu,$$

und, da $\varphi \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$ beliebig war, folgt $\mu = f\mathcal{L}^n$, also die Behauptung.

///

Als Korollar erhalten wir sofort den Eindeutigkeitssatz.

Korollar 1.2 (Eindeutigkeitssatz) *Für* $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ *gilt* $\mu = \nu$ *.*

Beweis:
Es gilt $\mu - \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $\widehat{\mu - \nu} = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mit dem Inversionssatz, Satz 1.1, folgt $\mu = \nu$.

///

Damit ist die Fourier-Transformation injektiv, aber nicht surjektiv.

Korollar 1.3 *Die Fourier-Transformationen*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C^0_*(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to C^0_b(\mathbb{R}^n)$$

sind injektiv mit dichten Bildern, genauer

$$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \textit{ ist dicht in } C^0_*(\mathbb{R}^n),$$
$$\mathcal{F}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)) \textit{ ist schwach}^* \textit{dicht in } L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

aber nicht surjektiv.

Beweis:
Die Injektivität folgt sofort aus dem Eindeutigkeitssatz, Korollar 1.2. Mit der Dualität der Fourier-Transformation, Proposition 1.7, folgt mit Standard-Funktionalanalysis, siehe [Ru] Korollar zu Theorem 4.12, daß die Bilder entsprechend dicht liegen.

Da $\mathcal{F}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)) \subseteq C^0_b(\mathbb{R}^n) \neq L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ist $\mathcal{F}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n))$ nicht schwach*-abgeschlossen. Damit sind $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n))$ und $\mathcal{F}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n))$ nicht norm-abgeschlossen, siehe [Ru] Theorem 4.14, insbesondere

$$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \neq C^0_*(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)) \neq C^0_b(\mathbb{R}^n),$$

und $\mathcal{F}$ ist nicht surjektiv.

///

Günstiger liegen die Dinge, wenn die Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}$, dem Raum der stark-abfallenden Funktionen, oder auf den Räumen $L^2(\mathbb{R}^n)$, siehe Satz von Plancherel Satz 1.5, betrachtet wird.

Definition 1.6 $f \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *heißt stark-abfallende Funktion oder Schwartz-Funktion, falls*

$$\sup_{|\gamma| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |\partial^\gamma f(x)| < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Den Raum der stark-abfallenden Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$ *.*

Bemerkung:
Klarerweise gilt $C^\infty_0(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$ und $\Phi \in \mathcal{S}$, für die Hilfsfunktion aus Proposition 1.8.

$\square$

Satz 1.4 *Die Fourier-Transformation bildet* $\mathcal{S}$ *in sich ab, und*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

ist bijektiv mit $\mathcal{F}^2 f = f^*$ *und* $\mathcal{F}^4 = id_{\mathcal{S}}$ *.*

Für $f \in \mathcal{S}$ *und ein Polynom* $P \in \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ *gilt*

$$\widehat{P(D)f} = P(\xi)\hat{f}, \quad \widehat{P(\xi)f} = P(-D)\hat{f}. \tag{1.11}$$

Beweis:
Für $f \in \mathcal{S}, P \in \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ gilt $P(D)f, P(\xi)f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und (1.11) folgt aus Proposition 1.5. Insbesondere folgt

$$(1 + |\xi|^2)^N D^\gamma \hat{f} = (-1)^{|\gamma|}(1 + |\xi|^2)^N \widehat{\xi^\gamma f} = (-1)^{|\gamma|}\mathcal{F}\Big((1 + |D|^2)^N (\xi^\gamma f)\Big) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

mit Proposition 1.2, also $\hat{f} \in \mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$. Mit dem Inversionssatz, Satz 1.1, folgt nun $\mathcal{F}^2 f = f^*, \mathcal{F}^4 f = f^{**} = f$, und $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist bijektiv.

///

Satz 1.5 (Satz von Plancherel) *Für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \hat{f} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} . \tag{1.12}$$

Die Erweiterung der Fourier-Transformation

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), f \mapsto \hat{f},$$

ist eine bijektive Hilbertraum-Isometrie. Insbesondere erhält $\mathcal{F}$ *innere Produkte, d.h. für* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\int f\bar{g} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \hat{f}\overline{\hat{g}} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Beweis:
Mit Satz 1.4 und den Propositionen 1.4 und 1.7 gilt für $f, g \in \mathcal{S}$

$$\int f\bar{g} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int f^*\bar{g}^* \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \mathcal{F}^2 f \ \bar{g}^* \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \mathcal{F}f \ \mathcal{F}(\bar{g}^*) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \hat{f}\overline{\hat{g}} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

insbesondere für $f = g$

$$\| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \hat{f} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

also (1.12) für $f \in \mathcal{S}$.

Da $\mathcal{S}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, kann $\mathcal{F}$ eindeutig zu einer Hilbertraum-Isometrie von $L^2(\mathbb{R}^n)$ erweitert werden, die wir zuerst mit

$$\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

bezeichnen. Als Isometrie ist $\tilde{\mathcal{F}}$ injektiv. Da mit Satz 1.4 $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathcal{S})$ dicht liegt in $L^2(\mathbb{R}^n)$, ist $\tilde{\mathcal{F}}$ auch surjektiv.

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ existiert $f_j \in \mathcal{S}$, so daß $f_j \to f$ simultan in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mit Proposition 1.2 folgt

$$\| \hat{f}_j - \hat{f} \|_{C_b^0(\mathbb{R}^n)} \leq \| f_j - f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für } j \to \infty$$

und mit (1.12) für $f_j - f_k \in \mathcal{S}$

$$\| \hat{f}_j - \hat{f}_k \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| f_j - f_k \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für } j, k \to \infty.$$

Daraus folgt $\hat{f}_j \to \hat{f}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und damit (1.12). Weiter folgt

$$\hat{f} \leftarrow \hat{f}_j = \tilde{\mathcal{F}} f_j \to \tilde{\mathcal{F}} f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n),$$

und $\tilde{\mathcal{F}}$ ist eine Erweiterung von $\mathcal{F}|(L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n))$, die wir daher auch mit $\mathcal{F}$ bezeichnen.

///

Bemerkung:
Die Abbildung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ wird auch Plancherel-Transformation genannt.

□

Zum Schluß dieses Paragraphen untersuchen wir Operatoren, die mit Translationen kommutieren.

Proposition 1.9 *Eine stetige, lineare Abbildung $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ kommutiert genau dann mit Translationen, d.h.*

$$\tau_x T = T \tau_x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

wenn

$$T(f * \mu) = (Tf) * \mu \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \tag{1.13}$$

Für $q = 1, 2$ existiert eine meßbare Funktion $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so daß

$$\widehat{Tf} = m \hat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S} \tag{1.14}$$

Beweis:
Wir wählen eine Partition $\mathbb{R}^n = \sum_{i=1}^\infty B_i^\varepsilon$ mit Borelmengen $B_i^\varepsilon, diam\ B_i^\varepsilon < \varepsilon, x_i^\varepsilon \in B_i^\varepsilon$ und setzen

$$\mu^\varepsilon := \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i^\varepsilon) \delta_{x_i^\varepsilon}.$$

Klarerweise gilt $\sum_{i=1}^\infty |\mu(B_i^\varepsilon)| \leq \sum_{i=1}^\infty |\mu|(B_i^\varepsilon) = \| \mu \| < \infty$. Für $g \in L^r(\mathbb{R}^n), 1 \leq r \leq \infty$ sehen wir

$$g * \mu^\varepsilon = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i^\varepsilon) \tau_{x_i} g \quad \text{in } L^r(\mathbb{R}^n),$$

also mit der Stetigkeit von T

$$T(f * \mu^\varepsilon) = T \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i^\varepsilon) \tau_{x_i} f = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i^\varepsilon) \tau_{x_i} Tf = (Tf) * \mu^\varepsilon. \tag{1.15}$$

Weiter rechnen wir

$$(f*\mu)(x)-(f*\mu^\varepsilon)(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_i^\varepsilon}(f(x-y)-f(x-x_i))\ \mathrm{d}\mu(y), \tag{1.16}$$

also

$$\| f*(\mu-\mu^\varepsilon) \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}= \Big\| \sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_i^\varepsilon}(f(.-y)-f(.-x_i))\ \mathrm{d}\mu(y)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\Big\|\int_{B_i^\varepsilon}(f(.-y)-f(.-x_i))\ \mathrm{d}\mu(y)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\Big(|\mu|(B_i^\varepsilon)^{p-1}\int_{B_i^\varepsilon}\int |f(x-y)-f(x-x_i)|^p\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}|\mu|(y)\Big)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}|\mu|(B_i^\varepsilon)\sup_{|h|<\varepsilon}\| f(.+h)-f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=\| \mu \| \sup_{|h|<\varepsilon}\| f(.+h)-f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

also

$$f*\mu^\varepsilon\to f*\mu \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Für $q<\infty$ erhalten wir mit (1.15)

$$T(f*\mu)\leftarrow T(f*\mu^\varepsilon)=(Tf)*\mu^\varepsilon\to(Tf)*\mu, \tag{1.17}$$

also (1.13).

Für $q=\infty$ sehen wir

$$\| \tau_h Tf-Tf \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}=\| T(\tau_h f-f) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq\| T \| \| f(.-h)-f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ .$$

Für $\varphi\in C_0^0(B_1(0))$ mit $\varphi\geq 0, \int\varphi=1, \varphi_\varepsilon(x):=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ sehen wir

$$|(\varphi_\varepsilon*(Tf))(x)-(\varphi_\varepsilon*(Tf))(y)|\leq\int\varphi_\varepsilon(z)|(Tf)(x-z)-(Tf)(y-z)|\ \mathrm{d}z\leq$$

$$\leq\| T \| \sup_{|h|\leq|x-y|}\| f(.-h)-f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

und, da $\varphi_\varepsilon*(Tf)\to(Tf)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, folgt $Tf\in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ ist gleichmäßig stetig. Wie in (1.16) sehen wir

$$|((Tf)*\mu)(x)-((Tf)*\mu^\varepsilon)(x)|\leq\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_i^\varepsilon}|(Tf)(x-y)-(Tf)(x-x_i)|\ \mathrm{d}|\mu|(y)\leq$$

$$\leq\| \mu \| \| T \| \sup_{|h|\leq\varepsilon}\| f(.-h)-f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

also

$$(Tf)*\mu^\varepsilon\to(Tf)*\mu \quad \text{in } C_b^0(\mathbb{R}^n),$$

und (1.13) folgt wie in (1.17).

Für $q = 1, 2$ folgt daraus für $f, g \in \mathcal{S}$

$$\widehat{Tf}\ \hat{g} = \widehat{(Tf) * g} = \widehat{T(f * g)} = \widehat{f * Tg} = \hat{f}\ \widehat{Tg}.$$

Wählen wir g mit $\hat{g} \neq 0$ auf $\mathbb{R}^n$, z.B. $g = \Phi$ aus Proposition 1.8, so folgt (1.14) für

$$m := \hat{g}^{-1} \widehat{Tg} \tag{1.18}$$

mit der Stetigkeit von T .

Gilt umgekehrt (1.13), so sehen wir

$$\tau_x Tf = (Tf) * \delta_x = T(f * \delta_x) = T\tau_x f,$$

und T kommutiert mit Translationen.

///

Für $p = q = 1$ bzw. $= 2$ können wir die Aussagen verschärfen.

Proposition 1.10 *Die stetigen, linearen Abbildungen* $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ *, die mit Translationen kommutieren, d.h.*

$$\tau_x T = T\tau_x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

sind gegeben durch

$$Tf = f * \mu \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

für ein $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *. In diesem Fall gilt*

$$\| T \| = \| \mu \| .$$

Beweis:
Mit Proposition 1.9 (1.14) existiert meßbares $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\widehat{Tf} = m\hat{f} \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Aus (1.18) erhalten wir mit Proposition 1.3, daß $\widehat{Tg} \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, also ist m stetig.

Wir wählen $g \in \mathcal{S}$ mit $\hat{g}(0) = 1$ und setzen $g_\lambda(x) := \lambda^{-n} g(x/\lambda)$ für $\lambda > 0$. Es gilt

$$\| Tg_\lambda \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| T \| \ \| g_\lambda \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \| T \| \ \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

also konvergiert für eine Teilfolge $\lambda_j \to 0$

$$Tg_{\lambda_j} \to \mu \quad \text{schwach}^* \text{ in } C_*^0(\mathbb{R}^n)^*.$$

Daraus folgt für $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit Proposition 1.7,

$$\int \varphi\hat{\mu} \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \hat{\varphi} \ \mathrm{d}\mu \leftarrow \int \hat{\varphi} \ Tg_{\lambda_j} \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \varphi \ \widehat{Tg_{\lambda_j}} \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n =$$
$$= \int \varphi m \widehat{g_{\lambda_j}} \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int \varphi m \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

da $\hat{\varphi} \in C_*^0(\mathbb{R}^n)$ nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue, Lemma 1.6, m stetig ist und mit Proposition 1.4

$$\widehat{g_\lambda}(y) = \hat{g}(\lambda y) \to \hat{g}(0) = 1.$$

Daraus folgt $\hat{\mu} = m$ und mit Proposition 1.3

$$\widehat{Tf} = m\hat{f} = \hat{\mu}\hat{f} = \widehat{f * \mu},$$

also mit dem Eindeutigkeitssatz, Korollar 1.2,

$$Tf = f * \mu \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.2 ergibt

$$\| T \| \leq \| \mu \| .$$

Für einen Faltungskern $\psi \in C_0^0(B_1(0)), \psi \geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1, \psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$ und $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leftarrow \int \psi_\varepsilon^* * \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int \int \varphi(x)\psi_\varepsilon(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) \, \mathrm{d}x = \int \varphi(\psi_\varepsilon * \mu) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n =$$
$$= \int \varphi \, T\psi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \| T \| \, \| \varphi \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} .$$

Bilden wir das Supremum über alle $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $|\varphi| \leq 1$, so folgt

$$\| \mu \| \leq \| T \| .$$

Umgekehrt ist $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig, linear und erfüllt $Tf := f * \mu$, so gilt

$$\tau_x Tf = \tau_x(f * \mu) = (\tau_x f) * \mu = T\tau_x f,$$

also kommutiert T mit Translationen.

///

Proposition 1.11 *Eine stetige, lineare Abbildung* $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *kommutiert genau dann mit Translationen, d.h.*

$$\tau_x T = T\tau_x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *existiert mit*

$$\widehat{Tf} = m\hat{f} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

In diesem Fall gilt

$$\| T \| = \| m \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} .$$

Weiter kommutiert T *genau dann mit Homothetien, d.h.*

$$h_\lambda T = T h_\lambda \quad \forall \lambda > 0,$$

wenn m *homogen vom Grad* 0 *ist.*

Beweis:
Mit Proposition 1.9 (1.14) existiert meßbares $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\widehat{Tf} = m\hat{f} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Mit dem Satz von Plancherel, Satz 1.5, folgt

$$\| T \| = \sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=1} \| mf \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Daraus folgt $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, und

$$\| T \| = \| m \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} .$$

Umgekehrt definiert jedes $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit dem Satz von Plancherel eine stetige, lineare Abbildung $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\widehat{Tf} = m\hat{f} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Mit Proposition 1.4 folgt

$$\widehat{T\tau_x f} = m\widehat{\tau_x f} = me_{-x}\hat{f} = e_{-x}\widehat{Tf} = \widehat{\tau_x Tf} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

und der Eindeutigkeit im Satz von Plancherel

$$T\tau_x f = \tau_x Tf,$$

also kommutiert T mit Translationen.

Schließlich sehen wir mit Proposition 1.4

$$\widehat{h_{\lambda^{-1}}(Tf)} = \lambda^n h_\lambda(\widehat{Tf}) = \lambda^n h_\lambda(m\hat{f}) = h_\lambda(m)\ \widehat{h_{\lambda^{-1}} f}$$

und

$$\widehat{Th_{\lambda^{-1}} f} = m\widehat{h_{\lambda^{-1}} f}.$$

Also kommutiert T genau dann mit Homothetien, wenn

$$h_\lambda m = m \quad \forall \lambda > 0,$$

d.h. wenn m homogen vom Grad 0 ist.

///

2 Überdeckungs-, Zerlegungs- und Interpolationssätze

Überdeckungsargumente haben in der Analysis bzw. Harmonischen Analysis eine große Bedeutung. Für unsere Anwendungen wird folgender einfacher Überdeckungssatz von Vitali ausreichen.

Satz 2.1 (Überdeckungssatz von Vitali) *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen, nicht degenerierten Bällen in $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\sup\{diam\ B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Dann existiert eine paarweise disjunkte Unterfamilie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ mit

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subseteq \bigcup_{B'\in\mathcal{G}} \hat{B}',$$

wobei $\hat{B}'$ der offene Ball mit gleichem Zentrum und $5-$fachem Radius wie B' ist. Insbesondere gilt

$$\mathcal{L}^n(\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B) \leq 5^n \mathcal{L}^n(\bigcup_{B'\in\mathcal{G}} B'). \tag{2.1}$$

Genauer existiert zu jedem $B \in \mathcal{F}$ ein $B' \in \mathcal{G}$ mit

$$B \cap B' \neq \emptyset \text{ und } B \subseteq \hat{B}'.$$

Beweis:
Es sei $D := \sup\{diam\ B \mid B \in \mathcal{F}\}$, und wir setzen

$$\mathcal{F}_j := \{B \in \mathcal{F} \mid 2^{-j}D < diam\ B \leq 2^{-j+1}D\}$$

für $j = 1, 2, \ldots$ Klarerweiese gilt $\mathcal{F} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$.

Nun wählen wir sukzessive Teilfamilien $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F}_j$ wie folgt:

1. $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$ ist eine maximale paarweise disjunkte Teilfamilie von $\mathcal{F}_1$.

2. Nun seien $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{j-1}, j \geq 2$, bereits gewählt und $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F}_j$ sei eine maximale paarweise disjunkte Teilfamilie von

$$\mathcal{F}_j' := \{B \in \mathcal{F}_j \mid \forall\, B' \in \bigcup_{l=1}^{j-1} \mathcal{G}_l :\ B \cap B' = \emptyset\}.$$

Nun setzen wir

$$\mathcal{G} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F}.$$

Trivialerweise ist $\mathcal{G}$ eine paarweise disjunkte Teilfamilie von $\mathcal{F}$. Nun sei $B \in \mathcal{F}$, also $B \in \mathcal{F}_j$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Wegen der Maximalität der $\mathcal{G}_j$ existiert $B' \in \bigcup_{l=1}^{j} \mathcal{G}_l$ mit

$$B \cap B' \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

Insbesondere gilt $diam\ B \le 2^{-j+1}D$ und $2^{-j}D < diam\ B'$, also

$$diam\ B < 2 \cdot diam\ B'. \tag{2.3}$$

Schreiben wir $B' = \overline{B_\varrho(x)}$ mit $x \in \mathbb{R}^n, \varrho > 0$, so gilt per Definition $\hat{B}' = B_{5\varrho}(x)$. Daraus folgt $diam\ B' = 2\varrho$ und mit (2.3)

$$diam\ B < 4\varrho. \tag{2.4}$$

Nun sei $z \in B \cap B'$ gemäß (2.2). Es gilt

$$|x - z| \le \varrho$$

und

$$\forall\, y \in B : \quad |z - y| \le diam\ B < 4\varrho$$

mit (2.3). Daraus folgt für $y \in B$, dass

$$|x - y| \le |x - z| + |z - y| < 5\varrho$$

also $y \in \hat{B}'$ und

$$B \subseteq \hat{B}'.$$

Dies ergibt

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subseteq \bigcup_{B' \in \mathcal{G}} \hat{B}'.$$

Da $\mathcal{L}^n(\hat{B}) = 5^n \mathcal{L}^n(B)$ und $\mathcal{G}$ paarweise disjunkt ist, folgt (2.5), und der Satz ist bewiesen.

///

Die folgende Calderon-Zygmund-Zerlegung wird bei der Abschätzung singulärer Integrale in den nächsten Paragraphen eine entscheidende Rolle spielen.

Satz 2.2 (Calderon-Zygmund-Zerlegung) *Es sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $t > 0$ *. Dann existiert eine Zerlegung* $\mathbb{R}^n = F + \Omega$ *mit*

$$|f| \le t \quad \mathcal{L}^n - \textit{fast überall in } F, \tag{2.5}$$

und $\Omega = \cup_{k=1}^\infty Q_k$ *ist eine Vereinigung von abgeschlossenen Würfeln mit paarweise disjunktem Inneren mit*

$$t < \fint_{Q_k} |f| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \le 2^n t \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Insbesondere gilt

$$\mathcal{L}^n(\Omega) \le t^{-1} \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{2.7}$$

Beweis:
Wir schreiben $\mathbb{R}^n$ als Vereinigung abgeschlossener Würfel gleicher Seitenlänge und mit paarweise disjunktem Inneren. Dabei wählen wir die Seitenlänge so groß, daß für jeden dieser Würfel Q

$$\fint_Q |f| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \le t$$

gilt.

Nun führen wir eine Calderon-Zygmund-Zerlegung für diese Würfel durch, d.h. wir halbieren die Seiten von Q und zerlegen Q in 2^n kongruente Unterwürfel Q' . Diejenigen Q' , die

$$\fint_{Q'} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq t$$

erfüllen, werden weiter unterteilt. Die restlichen Würfel, die

$$\fint_{Q'} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n > t$$

erfüllen, fassen wir sukzessiv in eine Familie $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Unterwürfeln zusammen, deren Inneres paarweise disjunkt ist. Wir setzen $\Omega := \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $F := \mathbb{R}^n - \Omega$.

Jedes Q_k ist in einem eindeutigen Vorgängerwürfel $\tilde{Q}_k$ doppelter Seitenlänge enthalten, der

$$\fint_{\tilde{Q}_k} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq t$$

erfüllt. Da $\mathcal{L}^n(\tilde{Q}_k) = 2^n \mathcal{L}^n(Q_k)$ folgt

$$t < \fint_{Q_k} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq 2^n t,$$

also (2.6), und (2.7) folgt daraus sofort.

Für jedes $x \in F = \mathbb{R}^n - \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$ existiert eine Folge $Q_{x,k}$ von Unterwürfeln mit beliebig kleiner Seitenlänge und

$$\fint_{Q_{x,k}} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq t.$$

Da fast alle x Lebesguepunkte von f sind, folgt (2.5), und das Lemma ist bewiesen.

///

Korollar 2.3 *Es sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $t > 0$. *Dann existiert eine Zerlegung* $f = g + b$ *und eine Folge von abgeschlossenen Würfeln* Q_k *mit paarweise disjunktem Inneren*

$$|g| \leq 2^n t \quad \mathcal{L}^n - \textit{fast überall}, \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} b = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^n - \cup_{k=1}^{\infty} Q_k, \\ \fint_{Q_k} |b| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq 2^{n+1} t, \int_{Q_k} b = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \| b \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_k) \leq t^{-1} \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{2.11}$$

Beweis:
Mit der Notation aus Satz 2.2 setzen wir

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in F \\ \displaystyle\fint_{Q_k} f & \text{für } x \in Q_k, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

und $b := f - g$.

Damit folgt sofort $b = 0$ in F und $\int_{Q_k} b = 0$. Mit (2.5) folgt

$$|g| \leq t \quad \text{fast überall in } F,$$

und mit (2.6)

$$|g| \leq 2^n t \quad \text{in } \cup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

also (2.8).

Weiter gilt

$$\int_{Q_k} |g| = |\int_{Q_k} f| \leq \int_{Q_k} |f|,$$

also

$$\fint_{Q_k} |b| \leq 2 \fint_{Q_k} |f| \leq 2^{n+1} t$$

und

$$\| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \| b \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Damit sind (2.9) und (2.10) bewiesen.

Schließlich folgt (2.11) aus (2.7), da Q_k paarweise disjunktes Inneres haben.

///

Eine andere Art der Zerlegung gibt folgendes Lemma.

Lemma 2.1 (Whitney-Zerlegung) *Jede offene* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \neq \mathbb{R}^n$, *kann als Vereinigung von abgeschlossenen Würfeln* Q_k *mit paarweise disjunktem Inneren dargestellt werden, deren Durchmesser proportional ihrem Abstand zum Komplement* $F := \mathbb{R}^n - \Omega$ *ist, genauer*

$$diam\ Q_k \leq d(Q_k, F) \leq 4\ diam\ Q_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Beweis:
Mit $\mathcal{Q}_0$ bezeichnen wir alle abgeschlossene Würfel der Seitenlänge 1 mit ganzzahligen Eckpunkten, und $\mathcal{Q}_l := 2^{-l}\mathcal{Q}_0$ sind die Würfel der Seitenlänge 2^{-l} mit Eckpunkten in $(2^{-l}\mathbb{Z})^n$. Der Durchmesser der Wüfrel in $\mathcal{Q}_l$ beträgt $\sqrt{n}2^{-l}$.

Wir zerlegen $\Omega = \cup_{l=-\infty}^{\infty} \Omega_l$ mit $\Omega_l := \{x \in \Omega \mid \sqrt{n}2^{-l+1} < d(x, F) \leq \sqrt{n}2^{-l+2}\ \}$ und setzen

$$\mathcal{F}_0 := \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \{Q \in \mathcal{Q}_l \mid Q \cap \Omega_l \neq \emptyset\ \}.$$

Für $Q \in \mathcal{F}_0$, z.B. $Q \in \mathcal{Q}_l$ und $x \in Q \cap \Omega_l$, gilt

$$d(Q, F) \leq d(x, F) \leq \sqrt{n}2^{-l+2} = 4\ diam\ Q,$$

und
$$d(Q,F) \geq d(x,F) - diam\ Q \geq \sqrt{n}2^{-l+1} - \sqrt{n}2^{-l} = diam\ Q.$$
Damit gilt (2.12) für alle $Q \in \mathcal{F}_0$, insbesondere $Q \subseteq \Omega$. Dies ergibt
$$\Omega = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q.$$

Schließlich sei $\mathcal{F}$ die Familie der maximalen Würfel von $\mathcal{F}_0$, d.h. aller $Q \in \mathcal{F}_0$ mit $Q' \in \mathcal{F}_0, Q \subseteq Q' \Rightarrow Q = Q'$. Für $x \in Q \in \mathcal{F}_0$ sehen wir mit (2.12)
$$diam\ Q \leq d(Q,F) \leq d(x,F) < \infty,$$
da $F \neq \emptyset$, also liegt jedes $x \in \Omega$ in mindestens einem Würfel mit maximaler Seitenlänge. Damit überdeckt $\mathcal{F}$ nach wie vor Ω .

Da andererseits zwei beliebige Würfel aus $\cup_l \mathcal{Q}_l$ mit gemeinsamen Inneren in einander enthalten sind, folgt, daß die maximalen Würfel paarweise disjunktes Inneres haben.

///

Es wird nützlich sein Funktionen zu betrachten, die nicht in L^1 liegen, aber die Konklusion der Tschebychef-Ungleichung erfüllen.

Definition 2.1 *Eine meßbare Funktion f heißt schwach in $L^1(\mathbb{R}^n)$, falls für ein $M < \infty$*
$$\mathcal{L}^n(|f| > t) \leq Mt^{-1} \quad \forall t > 0.$$
In diesem Fall setzen wir
$$|f|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} := \sup_{t>0} t\ \mathcal{L}^n(|f| > t).$$

Eine Abbildung T von $L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, in den Raum der $\mathcal{L}^n-$meßbaren Funktionen heißt vom schwachen Typ (p,q) für $1 \leq q < \infty$, falls für ein $M < \infty$
$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \leq \Big(Mt^{-1} \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big)^q \quad \forall t > 0. \tag{2.13}$$
T heißt vom schwachen Typ (p,∞) bzw. vom starken Typ $(p,q), 1 \leq q \leq \infty$, falls für ein $M < \infty$
$$\parallel Tf \parallel_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq M \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$
insbesondere ist $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ stetig bei 0 .

□

Proposition 2.2 (Ungleichung von Kolmogorov) *Für f schwach in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt für alle $0 < p < 1$ und meßbaren $A \subseteq \mathbb{R}^n$*
$$\int_A |f|^p \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq (1-p)^{-1} |f|^p_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}^n(A)^{1-p}. \tag{2.14}$$

Gilt umgekehrt für eine meßbare Funktion $f, 0 < p < 1, 0 < \Lambda < \infty$ *und alle meßbaren* $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int\limits_A |f|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq (1-p)^{-1} \Lambda^p \mathcal{L}^n(A)^{1-p},$$

so ist f *schwach in* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$|f|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq (1-p)^{-1/p} \Lambda.$$

Beweis:
Es gilt

$$\int\limits_A |f|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq p \int\limits_0^\infty t^{p-1} \mathcal{L}^n(A \cap [|f| > t]) \, \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq p \int\limits_0^\infty t^{p-1} \min(\mathcal{L}^n(A), |f|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} t^{-1}) \, \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq p\mathcal{L}^n(A) \int\limits_0^M t^{p-1} \, \mathrm{d}t + p|f|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \int\limits_M^\infty t^{p-2} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \mathcal{L}^n(A) M^p + \frac{p}{1-p} |f|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} M^{p-1} \leq (1-p)^{-1} |f|^p_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}^n(A)^{1-p}.$$

wenn $M \to |f|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} / \mathcal{L}^n(A)$, also (2.14).

Umgekehrt sehen wir für $A := [|f| > t] \cap B_R(0)$

$$\mathcal{L}^n(A) \leq t^{-p} \int\limits_A |f|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq t^{-p}(1-p)^{-1} \Lambda^p \mathcal{L}^n(A)^{1-p},$$

und, da $\mathcal{L}^n(A) < \infty$,

$$\mathcal{L}^n(A) \leq (1-p)^{-1/p} \Lambda t^{-1},$$

also

$$|f|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq (1-p)^{-1/p} \Lambda.$$

///

Der folgende Interpolationssatz von Marcinkiewicz schließt vom schwachen Typ an den Randpunkten des Intervals auf starken Typ im Inneren.

Satz 2.4 (Interpolationssatz von Marcinkiewicz) *Es sei* T *eine Abbildung von* $L^q(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq q < p \leq \infty$ *, in den Raum der* $\mathcal{L}^n-$*meßbaren Funktionen, die subadditiv ist , d.h.*

$$|T(f_1 + f_2)| \leq |Tf_1| + |Tf_2|,$$

und vom schwachen Typ (q,q) *und* (p,p) *mit Konstanten* M_q *bzw.* M_p *in (2.13).*

Dann ist T *vom starken Typ* (r,r) *für* $q < r < p$ *, und es gilt*

$$\| Tf \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(p,q,r) M_q^{1-\alpha} M_p^\alpha \| f \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \tag{2.15}$$

mit $r^{-1} = (1-\alpha)q^{-1} + \alpha p^{-1}$ *für alle* $f \in L^r(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:
Es sei o.B.d.A. $M_q, M_p > 0$. Für $f \in L^r(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$ und $s > 0$ zerlegen wir

$$f = f_1 + f_2,$$

wobei

$$f_1 := f \cdot \chi_{[|f|>s]}, \quad f_2 := f \cdot \chi_{[|f|\le s]}.$$

Es gilt

$$|Tf| \le |Tf_1| + |Tf_2|,$$

also für $p < \infty$

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \le \mathcal{L}^n(|Tf_1| > \frac{t}{2}) + \mathcal{L}^n(|Tf_2| > \frac{t}{2}) \le$$

$$\le \Big(\frac{2M_q \parallel f_1 \parallel_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{t}\Big)^q + \Big(\frac{2M_p \parallel f_2 \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{t}\Big)^p.$$

Für $s = t/A, A > 0$ unten gewählt, folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Tf|^r = r \int\limits_0^\infty t^{r-1} \mathcal{L}^n(|Tf| > t)\ \mathrm{d}t \le$$

$$\le r(2M_q)^q \int\limits_0^\infty t^{r-1-q} \Big(\int\limits_{[|f|>t/A]} |f|^q \Big)\ \mathrm{d}t + r(2M_p)^p \int\limits_0^\infty t^{r-1-p} \Big(\int\limits_{[|f|\le t/A]} |f|^p \Big)\ \mathrm{d}t$$

$$= r(2M_q)^q A^{r-q} \int\limits_0^\infty \tau^{r-1-q} \Big(\int\limits_{[|f|>\tau]} |f|^q \Big)\ \mathrm{d}\tau + r(2M_p)^p A^{r-p} \int\limits_0^\infty \tau^{r-1-p} \Big(\int\limits_{[|f|\le\tau]} |f|^p \Big)\ \mathrm{d}\tau.$$

Da

$$\int\limits_0^\infty \tau^{r-1-q} \Big(\int\limits_{[|f|>\tau]} |f|^q \Big)\ \mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^q \int\limits_0^{|f|} \tau^{r-1-q}\ \mathrm{d}\tau = \frac{1}{r-q} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^r$$

und

$$\int\limits_0^\infty \tau^{r-1-p} \Big(\int\limits_{[|f|\le\tau]} |f|^p \Big)\ \mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p \int\limits_{|f|}^\infty \tau^{r-1-p}\ \mathrm{d}\tau = \frac{1}{p-r} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^r,$$

folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Tf|^r \le \Big[\frac{r}{r-q}(2M_q)^q A^{r-q} + \frac{r}{p-r}(2M_p)^p A^{r-p}\Big] \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^r. \tag{2.16}$$

Ist $p = \infty$, so gilt $|Tf_2| \le M_\infty s$, und für $s = t/(2M_\infty)$ erhalten wir

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \le \Big(\frac{2M_q \parallel f_1 \parallel_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{t}\Big)^q.$$

Für $p < \infty$ wählen wir

$$A = 2M_q^{-\frac{q}{p-q}} \quad M_p^{\frac{p}{p-q}},$$

während für $p=\infty$ und $A=2M_\infty$ der zweite Term in (2.16) wegfällt. In beiden Fällen erhalten wir

$$\| Tf \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq 2(\frac{r}{r-q}+\frac{r}{p-r})^{\frac{1}{r}} M_q^{1-\alpha} M_p^{\alpha} \| f \|_{L^r(\mathbb{R}^n)},$$

und (2.15) folgt mit

$$C(p,q,r) = 2(\frac{r}{r-q}+\frac{r}{p-r})^{1/r}.$$

///

Kombinieren wir den Überdeckungssatz von Vitali und den Interpolationssatz von Marcinkiewicz, so erhalten wir folgendes fundamentale Resultat über die Maximalfunktion, die wie folgt definiert ist.

Definition 2.2 *Für* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *ist die Maximalfunktion* Mf *definiert durch*

$$Mf(x) := \sup_{\varrho>0} \fint_{B_\varrho(x)} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

□

Satz 2.5 M *ist vom schwachen Typ* $(1,1)$ *und vom starken Typ* (p,p) *für* $1<p\leq\infty$ *, genauer*

$$\mathcal{L}^n(Mf>t) \leq C_n t^{-1} \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für } f \in L^1(\mathbb{R}^n), t>0,$$

und

$$\| Mf \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für } f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1<p\leq\infty.$$

Insbesondere ist die Maximalfunktion Mf *fast überall endlich bezüglich* $\mathcal{L}^n$ *für* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1\leq p\leq\infty$ *.*

Beweis:
Die Maximalfunktion ist unterhalbstetig, also meßbar. Wir betrachten

$$\mathcal{F} = \{\overline{B_\varrho(x)} \mid t < \fint_{B_\varrho(x)} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \}$$

und sehen $[Mf>t] \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Für $\overline{B_\varrho(x)} \in \mathcal{F}$ gilt

$$\omega_n \varrho^n = \mathcal{L}^n(B_\varrho(x)) \leq t^{-1} \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Daher sind die Radien von $\mathcal{F}$ beschränkt, und mit dem Überdeckungssatz von Vitali, Satz 2.1, gibt es eine paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ mit

$$t\ \mathcal{L}^n(Mf>t) \leq t\mathcal{L}^n(\bigcup \mathcal{F}) \leq 5^n \sum_{B\in\mathcal{G}} t\ \mathcal{L}^n(B) \leq$$

$$\leq 5^n \sum_{B\in\mathcal{G}} \int_B |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq 5^n \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

da $\mathcal{G}$ paarweise disjunkt ist. Damit ist M vom schwachen Typ $(1,1)$. Da trivialerweise

$$|Mf| \leq \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ist M auch vom Typ (∞,∞) . Mit dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz ist M vom starken Typ (p,p) für $1<p<\infty$, und der Satz ist bewiesen.

///

Bemerkung:
Betrachten wir $g := f\chi_{[|f|>t/2]}$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so sehen wir $|f| \leq t/2 + g$ und

$$[Mf > t] \subseteq [Mg > t/2].$$

Daraus folgt mit obigem Satz

$$\mathcal{L}^n(Mf > t) \leq C_n t^{-1} \int\limits_{|f|>t/2} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n. \tag{2.17}$$

□

Abschließend beweisen wir ein nützliches Resultat zur Approximationen der Identität.

Lemma 2.3 *Es sei* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n), \varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ *, und die monoton nicht-wachsende, radiale Majorante, definiert durch*

$$\psi(x) := \sup_{|y|\geq|x|} |\varphi(y)|,$$

sei integrierbar mit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \Lambda < \infty.$$

Dann gilt für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$ *,*

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \leq \Lambda(Mf)(x) \quad \textit{für } Mf(x) < \infty, \tag{2.18}$$

insbesondere ist $(f * \varphi_\varepsilon)(x)$ *für* $(Mf)(x) < \infty$ *wohldefiniert, und, falls* $\int \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 1$ *,*

$$f * \varphi_\varepsilon \to f \quad \textit{punktweise } \mathcal{L}^n - \textit{fast überall in } \mathbb{R}^n.$$

Ist $f \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ *, so ist diese Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Teilmengen.*

Beweis:
Die Urbilder unter ψ von Intervallen sind Differenzen von Bällen, und somit ist ψ meßbar.

Zum Beweis von (2.18) genügt es

$$(f * \psi_\varepsilon)(x) \leq \Lambda(Mf)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

für $f \geq 0, f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty, \varepsilon > 0$ zu zeigen. Da diese Abschätzung translations- und homothetie-invariant ist, genügt es

$$(f * \psi)(0) \leq \Lambda(Mf)(0) \tag{2.19}$$

für $(Mf)(0) < \infty$ zu zeigen.

Da ψ radial ist, schreiben wir im folgenden abkürzend $\psi(r) = \psi(x)$ für $r = |x|$. Da ψ monoton nicht-wachsend und integrierbar ist, gilt $\psi(r) \to \inf \psi = 0$ für $r \to \infty$, und weiter existiert für $0 < t < \lim_{r \searrow 0} \psi(r) =: \Gamma$ ein $0 < r_t < \infty$ mit

$$[0, r_t[\subseteq \{ r \in [0, \infty[\mid \psi(r) > t \} \subseteq [0, r_t],$$

also

$$B_{r_t(0)} \subseteq [\psi > t] \subseteq \overline{B_{r_t}(0)}.$$

Dies ergibt

$$(f * \psi)(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^\Gamma (f\mathcal{L}^n)(\psi > t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^\Gamma \int\limits_{B_{r_t}(0)} f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \, \mathrm{d}t \leq \int\limits_0^\Gamma (Mf)(0)\mathcal{L}^n(B_{r_t}(0)) \, \mathrm{d}t =$$

$$= (Mf)(0) \int\limits_0^\Gamma \mathcal{L}^n(\psi > t) \, \mathrm{d}t = \Lambda (Mf)(0),$$

also (2.19).

Ist $\int \varphi = 1$, so gilt

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x)) \, \mathrm{d}y.$$

Für f stetig und beschränkt folgt

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| \leq \Lambda \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| + 2 \sup_{\mathbb{R}^n} |f| \int\limits_{|y| \geq \delta} |\varphi_\varepsilon(y)| \, \mathrm{d}y.$$

Für $\tau > 0, R < \infty,$ wählen wir zuerst δ mit

$$\Lambda \sup_{x \in B_R^n(0)} \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(y) - f(x)| < \tau,$$

dann $\varepsilon_0 > 0$ so, daß für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\int\limits_{|y| \geq \delta} |\varphi_\varepsilon(y)| \, \mathrm{d}y = \int\limits_{|y| \geq \delta/\varepsilon} |\varphi(y)| \, \mathrm{d}y < \tau.$$

Dies ergibt

$$\| (f * \varphi_\varepsilon) - f \|_{L^\infty(B_R^n(0))} \leq (1 + 2 \sup_{\mathbb{R}^n} |f|)\tau,$$

und $f * \varphi_\varepsilon \to f$ gleichmäßig auf $B_R^n(0)$.

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$(Nf)(x) := \limsup_{\varepsilon \to 0} |(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)|.$$

Nach dem eben Bewiesenen gilt $Ng = 0$ für $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, also mit (2.18)

$$Nf \leq N(f-g) \leq (\Lambda+1)M(f-g) \quad \text{fast überall bezüglich } \mathcal{L}^n.$$

Für $1 \leq p < \infty$ wählen wir $g_m \in C_0^0(\mathbb{R}^n), g_m \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, und sehen mit Satz 2.5 $Nf = 0$ $\mathcal{L}^n-$fast überall.

Für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $f\chi_{B^n_{2\varrho}(x_0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also $N(f\chi_{B^n_{2\varrho}(x_0)}) = 0$ $\mathcal{L}^n-$fast überall nach dem eben Bewiesenen. Weiter gilt für $x \in B^n_\varrho(x_0)$

$$\left|\Big((f(1-\chi_{B^n_{2\varrho}(x_0)})) * \varphi_\varepsilon\Big)(x)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n - B^n_\varrho(0)} |\varphi_\varepsilon(y) f(x-y)| \,\mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{|y| \geq \varrho/\varepsilon} |\varphi| \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \to 0,$$

und $Nf = 0$ $\mathcal{L}^n-$fast überall.

///

Teil II

Singuläre Integrale

3 Singuläre Integrale mit allgemeinen Kernen

Mit Proposition 1.2 sind Faltungsoperatoren

$$(Kf)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\ \mathrm{d}y$$

für Kerne $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ stetige, translationsinvariante Endomorphismen auf $L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq \infty$. In den Propositionen 1.10 und 1.11 wurden die stetigen, translationsinvarianten Endomorphismen auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^2(\mathbb{R}^n)$ in den Fourierdaten charakterisiert. Für $L^p(\mathbb{R}^n),\ p \neq 1,2,$ ist eine solche Charakterisierung bislang nicht vorhanden.

In diesem Paragraphen betrachten wir Faltungsoperatoren mit $K \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ und mit einer Punktsingularität im Ursprung. Solche Integralkerne treten z.B. bei Integraldarstellungen von Lösungen partieller Differtialgleichungen auf. In diesem Fall sind die Faltungs- bzw. Lösungsoperatoren nicht nur translationsinvariant, sondern auch invariant gegenüber Homothetien. Daher sind solche Kerne homogen von Grade $-n$. Wir betrachten diese Kerne genauer im nächsten Paragraphen.

Das nächste Lemma gibt das Hauptargument unserer Abschätzungen singulärer Integrale wieder. Die etwas technischen Bedingungen werden im Laufe des Paragraphen durch einfacher zu verifizierende Bedingungen ersetzt.

Lemma 3.1 *Es sei* $K \in L^1(\mathbb{R}^n) \cup L^2(\mathbb{R}^n), 0 < \Lambda < \infty,$ *mit*

$$\| \hat{K} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda, \tag{3.1}$$

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\ \mathrm{d}x \leq \Lambda. \tag{3.2}$$

Setzen wir für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(Kf)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\ \mathrm{d}y,$$

so ist K *vom schwachen Typ* $(1,1)$ *, genauer*

$$\mathcal{L}^n(|Kf| > t) \leq C_n \Lambda \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-1} \quad \forall\ t > 0, \tag{3.3}$$

und erweitert zum starken Typ (p,p) *für* $1 < p < \infty,$ *genauer*

$$\| Kf \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p}\ \Lambda \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ . \tag{3.4}$$

Bemerkung:
(3.2) ist z.B. erfüllt, wenn $K \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ und

$$|\nabla K(x)| \leq \Lambda |x|^{-n-1}, \tag{3.5}$$

wobei Λ durch $C_n\Lambda$ ersetzt werden muß.

$\square$

Beweis:
Zuerst zeigen wir, daß K vom starken Typ $(2,2)$ mit der Abschätzung (3.4) für $p=2$ ist. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt mit (1.7)

$$\widehat{Kf} = \hat{K}\hat{f},$$

und mit dem Satz von Plancherel, Satz 1.5, und (3.1) gilt

$$\| Kf \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \widehat{Kf} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda \| \hat{f} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \Lambda \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} . \tag{3.6}$$

//

Nun zeigen wir, daß K vom schwachen Typ $(1,1)$ mit der Abschätzung (3.3) ist. Dazu betrachten wir eine Calderon-Zygmund-Zerlegung $f = g+b$ mit abgeschlossenen Würfeln Q_k mit paarweise disjunktem Inneren wie im Korollar 2.3. Da $Kf = Kg + Kb$, gilt

$$\mathcal{L}^n(|Kf| > t) \leq \mathcal{L}^n(|Kg| > t/2) + \mathcal{L}^n(|Kb| > t/2). \tag{3.7}$$

Mit (2.8) und (2.10) ist $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, insbesondere $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\| g \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n t \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Mit der Tschebychef-Ungleichung und (3.6) folgt

$$\mathcal{L}^n(|Kg| > t/2) \leq 4t^{-2} \; \| Kg \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 4\Lambda^2 t^{-2} \| g \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \Lambda^2 t^{-1} \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{3.8}$$

Zur Abschätzung von Kb setzen wir $b_k := b \cdot \chi_{Q_k}$, $b = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ und schreiben

$$Q_k = x_k + [-\varrho_k, \varrho_k]^n \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mit (2.9) gilt für $x \notin Q_k$

$$Kb_k(x) = \int\limits_{Q_k} K(x-y) \; b(y) \; \mathrm{d}y = \int\limits_{Q_k} \Big(K(x-y) - K(x-x_k) \Big) \; b(y) \; \mathrm{d}y.$$

Für $y \in Q_k = x_k + [\varrho_k, \varrho_k]^n$ und $x \notin B^n_{2\sqrt{n}\varrho_k}(x_k)$ gilt

$$|y - x_k| \leq \sqrt{n} \; \varrho_k \leq \frac{1}{2} \; |x - x_k|.$$

Daher folgt mit (3.2)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B^n_{2\sqrt{n}\varrho_k}(x_k)} |Kb_k| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \int\limits_{Q_k} \Bigg(\int\limits_{|x-x_k| \geq 2|y-x_k|} |K(x-y) - K(x-x_k)| \;\; \mathrm{d}x \Bigg) \; |b(y)| \; \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \Lambda \int\limits_{Q_k} |b| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n \Lambda t \mathcal{L}^n(Q_k),$$

wobei wir (2.9) verwendet haben. Setzen wir

$$\Omega^* := \cup_{k=1}^{\infty} \; B_{2\sqrt{n}\varrho_k} \; (x_k),$$

so sehen wir mit (2.11)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - \Omega^*} |Kb| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n - B^n_{2\sqrt{n}\varrho_k} \; (x_k)} |Kb_k| \leq C_n \Lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_k) \leq C_n \Lambda \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \qquad (3.9)$$

Wieder mit (2.11) sehen wir

$$\mathcal{L}^n(\Omega^*) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \; \mathcal{L}^n(B_{2\sqrt{n}\varrho_k}(x_k)) \leq C_n \sum_{k=1}^{\infty} \; \varrho_k^n \leq C_n \sum_{k=1}^{\infty} \; \mathcal{L}^n(Q_k) \leq C_n t^{-1} \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Zusammen mit (3.9) erhalten wir

$$\mathcal{L}^n(|Kb| > t/2) \leq \mathcal{L}^n(\Omega^*) + 2t^{-1} \parallel Kb \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n - \Omega^*)} \leq C_n(1 + \Lambda) t^{-1} \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Zusammen mit (3.8) und (3.9) erhalten wir

$$\mathcal{L}^n(|Kf| > t) \leq C_n(1 + \Lambda^2) t^{-1} \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für } t > 0.$$

Da K linear in K ist, folgt (3.3).

Aus (3.3) und (3.6) folgt mit dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz, Satz 2.4, daß K vom starken Typ (p,p) mit der Abschätzung (3.4) für $1 < p < 2$ ist.

Für $p > 2$ beweisen wir dies mit Dualität. Für $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 2 < p < \infty, p' = p/(p-1)$, gilt mit $K^*(x) := K(-x)$

$$\begin{aligned} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Kf \; g \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \Big| &= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(x) g(y) \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}x \Big| = \\ &= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f K^* g \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \Big| \leq \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \parallel K^* g \parallel_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Mit Proposition 1.4 erfüllt K^* (3.1), (3.2) für gleiches Λ. Nach dem oben Bewiesenen gilt

$$\parallel K^* g \parallel_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p'} \Lambda \parallel g \parallel_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)},$$

also

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Kf \; g \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \Big| \leq C_{n,p'} \Lambda \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \parallel g \parallel_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

und mit Dualität

$$\parallel Kf \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \Lambda \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

///

Die Bedingung (3.1) aus Lemma 3.1 kann mit folgendem Lemma verifiziert werden.

Lemma 3.2 *Es sei* $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\}), 0 < \Lambda < \infty$, *mit*

$$\int\limits_{B_R(0)} |x| \ |K(x)| \ \mathrm{d}x \leq \Lambda R \quad \forall R > 0, \tag{3.10}$$

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \ \mathrm{d}x \leq \Lambda, \tag{3.11}$$

$$\left| \int\limits_{B_R(0) - B_\varrho(0)} K \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right| \leq \Lambda \qquad \forall \ 0 < \varrho < R < \infty. \tag{3.12}$$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cup L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\| \hat{K} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \Lambda. \tag{3.13}$$

Weiter erfüllen für $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ *die abgeschnittenen Kerne* $K_\varepsilon := K \chi_{\mathbb{R}^n - B_\varepsilon(0)}$

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)| \ \mathrm{d}x \leq C\Lambda. \tag{3.14}$$

Bemerkung:

(3.10) ist z.B. erfüllt, wenn

$$|K(x)| \leq \Lambda |x|^{-n}, \tag{3.15}$$

wobei Λ durch $C_n \Lambda$ ersetzt werden muß.

□

Beweis:
Wir sehen für eine Teilfolge $R_j \to \infty$ und für $\mathcal{L}^n$ – fast alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{K}(y) = \lim_{j \to \infty} \int\limits_{B^n_{R_j}(0)} K(x) \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{|x| \leq 2/|y|} K(x) \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \ \mathrm{d}x + \lim_{j \to \infty} \int\limits_{2/|y| < |x| < R_j} K(x) \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \ \mathrm{d}x =$$

$$=: I_1 + I_2. \tag{3.16}$$

Ist $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so folgt $|\hat{K}(0)| \leq \Lambda$ mit (3.12). Für $\mathcal{L}^n$ – fast alle $y \neq 0$ folgt zusammen mit (3.10), (3.12),

$$|I_1| \leq \left| \int\limits_{|x| \leq 2/|y|} K(x) \Big(\exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) - 1 \Big) \ \mathrm{d}x \right| + \Lambda \leq$$

$$\leq C|y| \int\limits_{|x| \leq 2/|y|} |x| \ |K(x)| \ \mathrm{d}x + \Lambda \leq C\Lambda. \tag{3.17}$$

Für $z = y/(2|y|^2), |z| = 1/(2|y|)$, gilt $\exp(\pm 2\pi i \langle y, z \rangle) = -1$ und

$$\int\limits_{2/|y| < |x| < R} K(x) \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \ \mathrm{d}x = - \int\limits_{2/|y| < |x-z| < R} K(x-z) \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \ \mathrm{d}y. \tag{3.18}$$

Nun gilt für die Mengen

$$[2/|y| < |x-z| < R] + \Big([2/|y| < |x| < R] - [2/|y| < |x-z| < R]\Big) =$$

$$= [2/|y| < |x| < R] + \Big([2/|y| < |x-z| < R] - [2/|y| < |x| < R]\Big) =$$

$$=: [2/|y| < |x-z| < R] + B =$$

$$=: [2/|y| < |x| < R] + C.$$

Mit (3.18) erhalten wir

$$2|I_2| \leq \limsup_{R\to\infty} \Bigg| \int\limits_{2/|y|<|x|<R} \Big(K(x) - K(x-z)\Big) \exp(-2\pi i \langle x, y\rangle)\ \mathrm{d}x -$$

$$- \int\limits_{C} K(x-z) \exp(-2\pi i\langle x, y\rangle)\ \mathrm{d}x + \int\limits_{B} K(x-z)\exp(-2\pi i\langle x,y\rangle)\ \mathrm{d}x \Bigg| =$$

$$=: \limsup_{R\to\infty} |J_1 + J_2 + J_3|. \tag{3.19}$$

Da $|z| = 1/(2|y|)$, gilt mit (3.11)

$$|J_1| \leq \int\limits_{|x|\geq 2/|y|} |K(x) - K(x-z)|\ \mathrm{d}x = \int\limits_{|x|\geq 4|z|} |K(x-z) - K(x)|\ \mathrm{d}x \leq \Lambda. \tag{3.20}$$

Wir sehen

$$B = [2/|y| < |x-z| < R] - [2/|y| < |x| < R]$$

$$\subseteq [R - |z| \leq |x-z| \leq R] \cup [2/|y| \leq |x-z| \leq 2/|y| + |z|]$$

und

$$C = [2/|y| < |x| < R] - [2/|y| < |x-z| < R]$$

$$\subseteq [R \leq |x-z| \leq R + |z|] \cup [2/|y| - |z| \leq |x-z| \leq 2/|y|].$$

Da $|z| = 1/(2|y|)$, folgt

$$B + C \subseteq [R - 1/(2|y|) \leq |x-z| \leq R + 1/(2|y|)] \cup [3|z| \leq |x-z| \leq 5|z|]$$

Mit (3.10) sehen wir

$$|J_2| + |J_3| \leq \int\limits_{B+C} |K(x-z)|\ \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int\limits_{3R/4\leq|w|\leq 5R/4} |K(w)|\ \mathrm{d}w + \int\limits_{3|z|\leq|w|\leq 5|z|} |K(w)|\ \mathrm{d}w \leq C_n\Lambda \quad \text{für } R \geq 2/|y| = 4|z|.$$

Zusammen mit (3.19) und (3.20) erhalten wir $|I_2| \leq C_n\Lambda$, und mit (3.16) und (3.17)

$$|\hat{K}(y)| \leq C_n\Lambda,$$

also (3.13).

Zum Beweis von (3.14) bemerken wir

$$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, \mathrm{d}x +$$

$$+ \int\limits_{|x|\geq 2|y|, |x-y|>\varepsilon, |x|\leq\varepsilon} |K(x)| \, \mathrm{d}x + \int\limits_{|x|\geq 2|y|, |x-y|\leq\varepsilon, |x|>\varepsilon} |K(x-y)| \, \mathrm{d}x =$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3.$$

Mit (3.11) gilt $I_1 \leq \Lambda$. Für $|x| \geq 2|y|, |x-y| > \varepsilon$ folgt $|x| \geq 2\varepsilon/3$ und mit (3.10)

$$I_2 \leq \int\limits_{B^n_\varepsilon(0) - B^n_{2\varepsilon/3}(0)} |K(x)| \, \mathrm{d}x \leq (2\varepsilon/3)^{-1} \int\limits_{B^n_\varepsilon(0) - B^n_{2\varepsilon/3}(0)} |x| \, |K(x)| \, \mathrm{d}x \leq 3\Lambda/2.$$

Für $|x| \geq 2|y|, |x| > \varepsilon$ folgt $|x-y| \geq \varepsilon/2$ und mit (3.10)

$$I_3 \leq \int\limits_{B^n_\varepsilon(0) - B^n_{\varepsilon/2}(0)} |K(z)| \, \mathrm{d}z \leq 2\Lambda.$$

Zusammen erfüllt K_ε (3.14).

///

Dieses Lemma legt folgende Definition nahe.

Definition 3.1 $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ *heißt ein Calderon-Zygmund-Kern, falls für ein* $0 < \Lambda < \infty$

$$\int_{B_R(0)} |x| \, |K(x)| \, \mathrm{d}x \leq \Lambda R \quad \forall R > 0, \tag{3.21}$$

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, \mathrm{d}x \leq \Lambda, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B_R(0) - B_\varrho(0)} K \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right| \leq \Lambda \quad \forall \, 0 < \varrho < R < \infty, \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(0) - B_\varepsilon(0)} K \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \text{ existiert } \forall R > 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

□

Aus den Lemmata 3.1 und 3.2 erhalten wir folgenden Satz.

Satz 3.1 K *sei ein Calderon-Zygmund-Kern. Setzen wir für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit kompaktem Träger*

$$(K_\varepsilon f)(x) := \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} K(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y,$$

so erweitert K_ε *zum schwachen Typ* $(1,1)$ *, genauer*

$$\mathcal{L}^n(|K_\varepsilon f| > t) \le C_n \Lambda \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-1} \quad \forall\, t > 0, \tag{3.24}$$

und zum starken Typ (p,p) *für* $1 < p < \infty$ *, genauer*

$$\parallel K_\varepsilon f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,p} \Lambda \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \tag{3.25}$$

Weiter existiert

$$(Kf) = \lim_{\varepsilon \to 0} (K_\varepsilon f)$$

in $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ *, insbesondere im Maß, für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *, stark in* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *für* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ *, und* K *erfüllt (3.24) und (3.25).*

Beweis:
Mit Lemma 3.2 (3.14) folgt, daß auch die abgeschnittenen Kerne $K_{\varepsilon,R} := K\chi_{B_R(0)-B_\varepsilon(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ Calderon-Zygmund-Kerne mit Λ ersetzt durch $C_n\Lambda$ sind. Mit (3.13) folgen (3.24) und (3.25) für $K_{\varepsilon,R}$ aus Lemma 3.1. Da $K_\varepsilon f = \lim_{R\to\infty} K_{\varepsilon,R} f$ punktweise auf $\mathbb{R}^n$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, folgen (3.24) und (3.25) für K_ε mit dem Lemma von Fatou für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger. Die Erweiterung von (3.25) auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist klar, da K_ε eine stetige, lineare Abbildung auf einer dichten Teilmenge des Banachraumes $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist.

Zur Erweiterung zum schwachen Typ $(1,1)$ wählen wir für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit kompakten Trägern und $f_m \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, genauer mit

$$\parallel f_m - f_{m+1} \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} < 4^{-m}.$$

Mit (3.24) gilt

$$\mathcal{L}^n(|K_\varepsilon f_m - K_\varepsilon f_{m+1}| > t) \le C_n \Lambda 4^{-m} t^{-1} \quad \forall\, t > 0,$$

insbesondere

$$\mathcal{L}^n(|K_\varepsilon f_m - K_\varepsilon f_{m+1}| > 2^{-m}) \le C_n \Lambda 2^{-m}.$$

Setzen wir

$$A_l := \bigcup_{m=l}^{\infty} [|K_\varepsilon f_m - K_\varepsilon f_{m+1}| > 2^{-m}],$$

so sehen wir

$$\mathcal{L}^n(A_l) \le C_n \Lambda 2^{-l},$$

und

$$\{(K_\varepsilon f_m)(x)\}_m \text{ konvergiert für } x \notin A_l.$$

Daher konvergiert $K_\varepsilon f_m$ punktweise $\mathcal{L}^n-$fast überall in $\mathbb{R}^n$ gegen eine meßbare Funktion, die wir mit $K_\varepsilon f$ bezeichnen. (3.24) überträgt sich von $K_\varepsilon f_m$ auf $K_\varepsilon f$ mit der punktweisen Konvergenz.

Zur Konvergenz von K_ε betrachten wir zuerst $g \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$(K_\varepsilon g)(x) = \int\limits_{|y| \ge \varepsilon} K(y) g(x-y) \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{|y|\geq 1} K(y)g(x-y)\ \mathrm{d}y + \int\limits_{\varepsilon\leq|y|<1} K(y)(g(x-y)-g(x))\ \mathrm{d}y + g(x) \int\limits_{\varepsilon\leq|y|<1} K\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Da $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ist mit dem eben Bewiesenen das erste Integral $K_1 g \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$. Das zweite Integral konvergiert gleichmäßig, da $|g(x-y)-g(x)| \leq C_g|y|$ und (3.21). Der dritte Term konvergiert gleichmäßig mit (3.23). Damit erhalten wir

$$Kg := \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon g \quad \text{gleichmäßig in } \mathbb{R}^n, \forall g \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \tag{3.26}$$

Da g kompakten Träger hat, sind die Träger des zweiten und dritten Terms für $0 < \varepsilon \leq 1$ in einer kompakten Menge enthalten, und $K_\varepsilon g \to Kg$ konvergiert stark in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < \infty$. (3.24) und (3.25) übertragen sich von $K_\varepsilon g$ auf Kg für $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Da $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt mit (3.25) für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$, die starke Konvergenz von $K_\varepsilon f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, und (3.25) übertragen sich von $K_\varepsilon f$ auf den Limes Kf für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Wie oben erweitert K zum schwachen Typ $(1,1)$, und wir erhalten für $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{L}^n(|K_\varepsilon f - Kf| > t) \leq$$

$$\leq \mathcal{L}^n(|K_\varepsilon(f-g)| > t/3) + \mathcal{L}^n(|K_\varepsilon g - Kg| > t/3) + \mathcal{L}^n(|Kg - Kf| > t/3),$$

also

$$|K_\varepsilon f - Kf|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\leq 3|K_\varepsilon(f-g)|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} + 3|K_\varepsilon g - Kg)|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} + 3|K(f-g)|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\leq C_n \Lambda \parallel f - g \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \parallel K_\varepsilon g - Kg \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Wie wir oben gesehen, sind die Träger von $K_\varepsilon g - Kg$ gleichmäßig in einer kompakten Menge enthalten, und mit (3.26) ergibt sich $K_\varepsilon g - Kg \to 0$ stark in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |K_\varepsilon f - Kf|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \Lambda \parallel f - g \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Da $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt $K_\varepsilon f \to Kf$ in $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ und im Maß.

///

Bislang haben wir nur Konvergenz von $K_\varepsilon f \to Kf$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ betrachtet. Im folgenden Satz wenden wir uns der punktweisen Konvergenz zu. Dazu betrachen wir die Maximalfunktion.

Satz 3.2 *Es sei* K *ein Calderon-Zygmund-Kern, der zusätzlich eine Dini-Bedingung erfüllt, genauer*

$$|K(x-y) - K(x)| \leq \omega(2|y|/|x|)\ |x|^{-n} \quad \textit{für } 2|y| < |x| \tag{3.27}$$

mit ω *monoton nicht-fallend und*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(r)}{r}\ \mathrm{d}r \leq \Lambda.$$

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty$ *, definieren wir den Maximaloperator*

$$(K^M f)(x) := \sup_{0<\varepsilon\le R<\infty} |(K_{\varepsilon,R} * f)(x)| = \sup_{0<\varepsilon\le R<\infty} \Big| \int\limits_{\varepsilon\le|y|\le R} K(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y \Big|.$$

Dann ist K^M *vom schwachen Typ* $(1,1)$ *und vom starken Typ* (p,p) *für* $1 < p < \infty$ *, genauer*

$$(K^M f) \le C_{n,\mu} \Lambda M f + 3M(|Kf|^\mu)^{1/\mu} \quad \forall 0 < \mu < 1, f \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{3.28}$$

$$\mathcal{L}^n(|K^M f| > t) \le C_n \Lambda \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-1}, \tag{3.29}$$

$$\parallel K^M f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,p} \Lambda \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{für } 1 < p < \infty. \tag{3.30}$$

Weiter konvergiert

$$K_\varepsilon f \to K f$$

punktweise $\mathcal{L}^n$*–fast überall für* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty$ *.*

Bemerkung:
Mit der Dini-Bedingung ist K stetig in $\mathbb{R}^n - \{0\}$, und somit existiert für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$(K_{\varepsilon,R} * f)(x) = \int\limits_{\varepsilon\le|y|\le R} K(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, 0 < \varepsilon \le R < \infty$$

und ist stetig in x, ε, R . Dies ergibt

$$(K^M f)(x) = \sup_{0<\varepsilon\le R<\infty, \varepsilon, R\in\mathbb{Q}} |(K_{\varepsilon,R} * f)(x)|,$$

und $K^M f$ ist borelmeßbar.

Genauer folgt mit der Dini-Bedingung

$$osc_{B_{2R}(0)-B_{R/2}(0)} K \le C_n \omega(1/2) R^{-n} \le C_n \Lambda R^{-n}.$$

da $\omega(1/2) \le 2\int_{1/2}^1 \omega(r)/r \, \mathrm{d}r \le 2\Lambda$ mit der Monotonie von ω . Dies ergibt mit (3.21)

$$\inf_{B_R(0)-B_{R/2}(0)} |K| \le \fint\limits_{B_R(0)-B_{R/2}(0)} |K| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \le C_n R^{-n-1} \int\limits_{B_R(0)} |x| \, |K(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \le C_n \Lambda R^{-n},$$

also

$$|K(x)| \le C_n \Lambda |x|^{-n} \quad \text{für } x \ne 0. \tag{3.31}$$

Damit ist $K_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R}^n)$ für $1 < q \le \infty$, und für $f \in \cup_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ existiert $K_\varepsilon f = K_\varepsilon * f$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ und ist stetig.

□

Beweis von Satz 3.2:
Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty,$ gilt

$$K_{\varepsilon,R} * f = K_\varepsilon * f - K_R * f = K_\varepsilon f - K_R f. \tag{3.32}$$

Wir betrachten $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n, z \in B_{\varepsilon/4}(x), \varepsilon_j \to 0$ und sehen

$$(K_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{|x-y|\ge\varepsilon} (K(x-y) - K(z-y))f(y)\ \mathrm{d}y + \tag{3.33}$$

$$+\Big(\int\limits_{|x-y|\ge\varepsilon} K(z-y)f(y)\ \mathrm{d}y - \int\limits_{|z-y|\ge\varepsilon_j} K(z-y)f(y)\ \mathrm{d}y \Big) +$$

$$+ \int\limits_{|z-y|\ge\varepsilon_j} K(z-y)f(y)\ \mathrm{d}y =: I_1 + I_2 + I_3.$$

Mit Satz 3.1 können wir $\varepsilon_j \to 0$ so wählen, daß

$$K_{\varepsilon_j}(f, f\chi_{B_\varepsilon(x)}) \to K(f, f\chi_{B_\varepsilon(x)}) \quad \text{punktweise } \mathcal{L}^n - \text{fast überall auf } \mathbb{R}^n.$$

Dies ergibt

$$\lim_{j\to\infty} I_3 = (Kf)(z) \quad \text{für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } z \in B_{\varepsilon/4}(x).$$

Für $\varepsilon_j < \varepsilon/4$, gilt $B_{\varepsilon_j}(z) \subseteq B_\varepsilon(x)$ und

$$I_2 = - \int\limits_{B_\varepsilon(x) - B_{\varepsilon_j}(z)} K(z-y)f(y)\ \mathrm{d}y =$$

$$= -(K_{\varepsilon_j} f\chi_{B_\varepsilon(x)})(z) \to -(Kf\chi_{B_\varepsilon(x)})(z) \quad \text{für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } z \in B_{\varepsilon/4}(x).$$

Damit ergibt sich aus (3.33)

$$(K_\varepsilon f)(x) = I_1 - (Kf\chi_{B_\varepsilon(x)})(z) + (Kf)(z) \quad \text{für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } z \in B_{\varepsilon/4}(x). \tag{3.34}$$

Da $2|(x-y)-(z-y)| < \varepsilon/2 \le |x-y|/2$ im Integrand von I_1 , sehen wir mit (3.27), da ω monoton nicht-fallend ist,

$$|I_1| \le \int\limits_{|x-y|\ge\varepsilon} \omega(2|x-z|/|x-y|)\ |x-y|^{-n}|f(y)|\ \mathrm{d}y \le$$

$$\le \int\limits_{|x-y|\ge\varepsilon} \omega(\varepsilon/(2|x-y|))\ |x-y|^{-n}|f(y)|\ \mathrm{d}y,$$

also für

$$\varphi(y) := \begin{cases} \omega(1/(2|y|))\ |y|^{-n}, & \text{wenn } |y| \ge 1, \\ \omega(1/2), & \text{wenn } |y| \le 1, \end{cases}$$

$\varphi_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-n}\varphi(y/\varepsilon)$, dass

$$|I_1| \le (\varphi_\varepsilon * |f|)(x).$$

Nun ist φ radialsymmetrisch in y und monoton nicht-wachsend in $|y|$, da ω monoton nicht-fallend ist. Weiter gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n\Big(\omega(1/2) + \int_1^\infty \omega(1/r)r^{-1} \, \mathrm{d}r\Big) = C_n\Big(\omega(1/2) + \int_0^1 \frac{\omega(r)}{r} \, \mathrm{d}r\Big) \leq C_n\Lambda, \quad (3.35)$$

da $\omega(1/2) \leq 2\int_{1/2}^1 \omega(r)/r \, \mathrm{d}r \leq 2\Lambda$. Mit (3.34) erhalten wir

$$|(K_\varepsilon f)(x)| \leq (\varphi_\varepsilon * |f|)(x) + |(Kf\chi_{B_\varepsilon(x)})(z)| + |(Kf)(z)| \quad \text{für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } z \in B_{\varepsilon/4}(x).$$

Mit $(a+b)^{1/\mu} \leq C_\mu a^{1/\mu} + (3/2)b^{1/\mu}$ für $a, b \geq 0, 0 < \mu < 1$ und Integration über $B_{\varepsilon/4}(x)$ erhalten wir

$$|(K_\varepsilon f)(x)| \leq$$

$$\leq C_\mu(\varphi_\varepsilon * |f|)(x) + C_\mu\Big(\fint_{B_{\varepsilon/4}(x)} |K(f\chi_{B_\varepsilon(x)})|^\mu \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n\Big)^{1/\mu} + (3/2)\Big(\fint_{B_{\varepsilon/4}(x)} |K(f)|^\mu \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n\Big)^{1/\mu} \leq$$

$$\leq C_\mu(\varphi_\varepsilon * |f|)(x) + C_\mu\Big(\fint_{B_{\varepsilon/4}(x)} |K(f\chi_{B_\varepsilon(x)})|^\mu \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n\Big)^{1/\mu} + (3/2)M(|Kf|^\mu)(x)^{1/\mu}. \quad (3.36)$$

Da K vom schwachen Typ $(1,1)$ mit Satz 3.1 ist, sehen wir für den zweiten Term mit der Ungleichung von Kolmogorov (2.14), dass

$$\fint_{B_{\varepsilon/4}(x)} |K(f\chi_{B_\varepsilon(x)})|^\mu \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n(1-\mu)^{-1}\varepsilon^{-n\mu}|K(f\chi_{B_\varepsilon(x)})|^\mu_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq C_{n,\mu}\Lambda^\mu\varepsilon^{-n\mu} \parallel f\chi_{B_\varepsilon(x)} \parallel^\mu_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \Big(C_{n,\mu}\Lambda(\varepsilon^{-n}\chi_{B_\varepsilon(0)} * |f|)(x)\Big)^\mu.$$

Setzen wir $\psi := \varphi + C_{n,\mu}\Lambda\chi_{B_1(0)}, \psi_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-n}\psi(y/\varepsilon)$, so ergibt sich mit (3.36)

$$|(K_\varepsilon f)(x)| \leq (\psi_\varepsilon * |f|)(x) + (3/2)M(|Kf|^\mu)(x)^{1/\mu}. \quad (3.37)$$

Da φ und ψ radialsymmetrisch und monoton nicht-fallend sind und $\int \psi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_{n,\mu}\Lambda$ mit (3.35), erhalten wir mit Lemma 2.3

$$\psi_\varepsilon * |f| \leq C_{n,\mu}\Lambda Mf,$$

und mit (3.32)

$$\sup_{0<\varepsilon\leq R<\infty} |(K_{\varepsilon,R}f)| \leq C_{n,\mu}\Lambda Mf + 3(M(Kf)^\mu)^{1/\mu},$$

also (3.28).

Zum Beweis von (3.29) sehen wir für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit (2.17), der Ungleichung von Kolmogorov (2.14) und Satz 3.1, dass

$$\mathcal{L}^n(M(|Kf|^\mu) > t^\mu) \leq C_n t^{-\mu} \int_{[(Kf)^\mu > t^\mu/2]} |Kf|^\mu \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq C_n(1-\mu)^{-1}t^{-\mu}|Kf|^{\mu}_{L^1_w(\mathbb{R}^n)}\mathcal{L}^n((Kf)^{\mu} > t^{\mu}/2)^{1-\mu} \leq$$
$$\leq C_{n,\mu}|Kf|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)}t^{-1} \leq C_n\Lambda \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-1},$$

und (3.29) folgt mit (3.28) und Satz 2.5. (3.30) folgt für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$, sofort mit (3.28) aus den Sätzen 2.5 und 3.1.

Zum Beweis der punktweisen $\mathcal{L}^n-$fast überall Konvergenz setzen wir für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$, setzen wir

$$(Nf)(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} |(K_\varepsilon f)(x) - (Kf)(x)|,$$

und beachten mit der Bemerkung vor diesem Beweis, daß $K_\varepsilon f$ wohldefiniert und stetig ist. Klarerweise gilt $|K_\varepsilon f - K_{\varepsilon_j} f| \to |K_\varepsilon f - Kf|$, also $Nf \leq 2K^M f$ fast überall bezüglich $\mathcal{L}^n$. Für $g \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ sehen wir mit (3.26), dass

$$Ng = 0 \quad \forall g \in C^1_0(\mathbb{R}^n).$$

Damit erhalten wir

$$Nf \leq N(f-g) + Ng \leq 2K^M(f-g) \quad \forall g \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$$

und mit dem oben Bewiesenen

$$\mathcal{L}^n(|Nf| > t) \leq C_n\Lambda^p \parallel f-g \parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-p},$$

also $Nf = 0$ fast überall bezüglich $\mathcal{L}^n$, und wir erhalten die punktweise fast-überall Konvergenz $K_\varepsilon f \to Kf$.

///

Schliesslich können wir für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $Kf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, die Konvergenz $K_\varepsilon f \to Kf$ optimieren.

Proposition 3.3 *Für jeden ein Calderon-Zygmund-Kern K , der eine Dini-Bedingung wie in (3.27) erfüllt, gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $Kf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass*

$$K_\varepsilon f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{3.38}$$

$$K_\varepsilon f \to Kf \quad \textit{stark in } L^1(\mathbb{R}^n) \textit{ für } \varepsilon \to 0 \tag{3.39}$$

und

$$\widehat{Kf} = \lim_{\varepsilon \to 0, R \to \infty} \widehat{K_{\varepsilon,R}} \cdot \hat{f} \quad \textit{im Maß.} \tag{3.40}$$

Beweis:
Im vorigen Beweis haben wir in (3.37) die Abschätzung

$$|K_\varepsilon f| \leq (\psi_\varepsilon * |f|) + M(|Kf|^{\mu})^{1/\mu}$$

mit $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $0 < \mu < 1$ hergeleitet. Da nun $Kf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sehen wir $M(|Kf|^{\mu})^{1/\mu} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit Satz 2.5. Da andererseits klarerweise $\psi_\varepsilon * |f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit Proposition 1.2, erhalten wir $K_\varepsilon f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also (3.38).

Aus Satz 3.1 haben wir $K_\varepsilon f \to Kf$ im Maß, und, da die Faltung $\psi_\varepsilon * |f| \to |f| \int \psi$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, folgt mit dem Satz von Lebesgue $K_\varepsilon f \to Kf$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, also (3.39).

Mit Proposition 1.3 und (3.32) sehen wir

$$\widehat{K_{\varepsilon,R}} \cdot \hat{f} = \widehat{K_{\varepsilon,R} * f} = \widehat{K_\varepsilon f} - \widehat{K_R * f}. \tag{3.41}$$

Aus (3.39) folgt wieder mit Proposition 1.3, daß $\widehat{K_\varepsilon f} \to \widehat{Kf}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$. Andererseits gilt klarerweise $K_R = \chi_{\mathbb{R}^n - B^n_R(0)} K \to 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und $|K_R| \leq |K_1| \in L^q(\mathbb{R}^n)$ für $R \geq 1, 1 < q \leq \infty$ mit (3.31), also mit dem Satz von Lebesgue $K_R \to 0$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und mit Proposition 1.2 und dem Satz von Plancherel, Satz 1.5,

$$\widehat{K_R * f} \to 0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n),$$

insbesondere im Maß. Dann folgt (3.40) aus (3.41).

///

4 Singuläre Integrale mit homogenen Kernen

Singuläre Integrale treten z.B. in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen als Lösungsdarstellungen auf. Diese Integraldarstellungen von Lösungen sind neben der Translationsinvarianz auch invariant gegenüber Homothetien. Das Integral

$$(Kf)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} K(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y$$

ist genau dann invariant gegenüber Homothetien, d.h. $Kh_\lambda = h_\lambda K$, wenn der Kern K homogen vom Grad $-n$ ist. In diesem Fall schreiben wir

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \quad x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \tag{4.1}$$

wobei $\Omega : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen vom Grad 0 ist.

Falls $\Omega \in L^1(area_{\partial B_1^n(0)})$, gilt (3.23) genau dann, wenn Ω die Auslöschungsbedingung

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)} = 0 \tag{4.2}$$

erfüllt.

Mit Proposition 1.11 sind die stetigen, translations- und homothetie-invarianten Endormorphismen T auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ durch Multiplikation der Fourier-Transformierten

$$\widehat{Tf} = m\hat{f} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

mit einer beschränkten, meßbaren Funktion m homogen vom Grad 0 gegeben. Im folgenden rechnen wir diesen Faktor m für K unter geeigneten Bedingungen an Ω aus.

Lemma 4.1 *Es sei* $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ *wie in (4.1), (4.2). Für* $\Omega = \Omega_g + \Omega_u$ *zerlegt in geraden und ungeraden Anteil gelte für ein* $0 < \Lambda < \infty$

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} |\Omega_u(\omega)| \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) \leq \Lambda,$$

$$\sup_{\nu \in \partial B_1^n(0)} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} |\Omega_g(\omega)| \log \frac{1}{|\langle \nu, \omega \rangle|} \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) \leq \Lambda. \tag{4.3}$$

Dann gilt für $K_{\varepsilon,R} := \mathcal{X}_{B_R^n(0) - B_\varepsilon^n(0)} \, K \in L^1(\mathbb{R}^n),\ 0 < \varepsilon < R < \infty, x \neq 0$,

$$\| \widehat{K_{\varepsilon,R}} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \Lambda, \tag{4.4}$$

$$m(x) := \lim_{\varepsilon \to 0, R \to \infty} \widehat{K_{\varepsilon,R}}(x) =$$

$$= \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega_g(\omega) \log \frac{|x|}{|\langle x, \omega \rangle|} \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) - \frac{i\pi}{2} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega_u(\omega) sgn\langle x, \omega \rangle \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega). \tag{4.5}$$

Insbesondere sind $K_{\varepsilon,R}$ *und* $K = \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} K_{\varepsilon,R}$ *stetige Endomorphismen auf* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *mit durch* $C_n\Lambda$ *beschränkter Norm.*

K *ist translations- und homothetieinvariant, und seine Aktion auf der Fourier-Transformierten ist gegeben durch*

$$\widehat{Kf} = m\hat{f} \quad \textit{für } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:
Mit dem Satz von Plancherel, genügt es (4.4) und (4.5) zu zeigen. Wir rechnen mit (4.2)

$$\widehat{K_{\varepsilon,R}}(x) = \int\limits_{B_R^n(0)-B_\varepsilon^n(0)} K(y)\exp(-2\pi i\langle x,y\rangle)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \int\limits_\varepsilon^R \Omega(\omega)\frac{\exp(-2\pi i\langle x, r\omega\rangle)}{r}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) =$$

$$= \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega(\omega) \int\limits_\varepsilon^R \frac{\exp(-2\pi i r\langle x,\omega\rangle) - \cos(2\pi r|x|)}{r}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) = \tag{4.6}$$

$$=: \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega(\omega) I_{\varepsilon,R}(x,\omega)\ \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega).$$

Für den Imaginäranteil gilt

$$Im(I_{\varepsilon,R}(x,\omega)) = -\int\limits_\varepsilon^R \frac{\sin 2\pi r\langle x,\omega\rangle}{r}\ \mathrm{d}r = -sgn\langle x,\omega\rangle \int\limits_{2\pi|\langle x,\omega\rangle|\varepsilon}^{2\pi|\langle x,\omega\rangle|R} \frac{\sin r}{r}\ \mathrm{d}r.$$

Insbesondere ist der Imaginärteil ungerade in x und ω und

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty} Im(I_{\varepsilon,R}(x,\omega)) = -\frac{\pi}{2} sgn\langle x,\omega\rangle. \tag{4.7}$$

Da für $0 < a < b < \infty$

$$\Big|\int\limits_a^b \frac{\sin r}{r}\ \mathrm{d}r\Big| = \Big|\Big[\frac{1-\cos r}{r}\Big]_a^b + \int\limits_a^b \frac{1-\cos r}{r^2}\ \mathrm{d}r\Big| \le$$

$$\le \sup_{b\in\mathbb{R}}\Big|\frac{1-\cos b}{b}\Big| + \int\limits_0^\infty \Big|\frac{1-\cos r}{r^2}\Big|\ \mathrm{d}r < \infty,$$

folgt

$$|Im(I_{\varepsilon,R}(x,\omega))| \le C. \tag{4.8}$$

Für den Realteil gilt, wenn $\langle x,\omega\rangle \neq 0$,

$$Re(I_{\varepsilon,R}(x,\omega)) = \int\limits_\varepsilon^R \frac{\cos(2\pi r|\langle x,\omega\rangle|) - \cos 2\pi r|x|}{r}\ \mathrm{d}r =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{2\pi|\langle x,\omega\rangle|\varepsilon}^{2\pi|\langle x,\omega\rangle|R} - \int\limits_{2\pi|x|\varepsilon}^{2\pi|x|R} \Bigg) \frac{\cos r}{r} \,\mathrm{d}r = \Bigg(\int\limits_{2\pi|\langle x,\omega\rangle|\varepsilon}^{2\pi|x|\varepsilon} - \int\limits_{2\pi|\langle x,\omega\rangle|R}^{2\pi|x|R} \Bigg) \frac{\cos r}{r} \,\mathrm{d}r =: I_1 - I_2.$$

Der Realteil ist gerade in x, ω , und wir sehen

$$|Re(I_{\varepsilon,R}(x,\omega))| \leq 2 \log \frac{|x|}{|\langle x,\omega\rangle|}. \tag{4.9}$$

Weiter gilt

$$\Big| I_1 - \log \frac{|x|}{|\langle x,\omega\rangle|} \Big| \leq \int\limits_{2\pi|\langle x,\omega\rangle|\varepsilon}^{2\pi|x|\varepsilon} \Big| \frac{1-\cos r}{r} \Big| \,\mathrm{d}r \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

und

$$I_2 = \Big[\frac{\sin r}{r} \Big]_{2\pi|\langle x,\omega\rangle|R}^{2\pi|x|R} + \int\limits_{2\pi|\langle x,\omega\rangle|R}^{2\pi|x|R} \frac{\sin r}{r^2} \,\mathrm{d}r \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty} Re(I_{\varepsilon,R}(x,\omega)) = \log \frac{|x|}{|\langle x,\omega\rangle|}. \tag{4.10}$$

Mit der Zerlegung $\Omega = \Omega_g + \Omega_u$ in geraden und ungeraden Anteil erhalten wir mit (4.6)

$$\widehat{K_{\varepsilon,R}}(x) = \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega_g(\omega) Re(I_{\varepsilon,R}(x,\omega)) \,\mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) +$$

$$+ i \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega_u(\omega) Im(I_{\varepsilon,R}(x,\omega)) \,\mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega)$$

und mit (4.3), (4.8), (4.9) folgt (4.4).

Mit (4.3), (4.7) - (4.10) und dem Satz von Lebesgue folgt für $x \neq 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \widehat{K}_{\varepsilon,R}(x) =$$

$$= \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega_g(\omega) \log \frac{|x|}{|\langle x,\omega\rangle|} \,\mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) - \frac{i\pi}{2} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega_u(\omega) sgn\langle x,\omega\rangle \,\mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega),$$

also (4.5).

///

Damit kommen wir zu unserem Hauptsatz über singuläre Integrale mit homogenen Kernen.

Satz 4.1 *Es sei* K *homogen vom Grad* $-n$

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

mit $\Omega : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{C}$ *homogen vom Grad* 0 . *Es gelte für ein* $0 < \Lambda < \infty$,

$$|\Omega| \leq \Lambda, \tag{4.11}$$

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = 0, \tag{4.12}$$

und die Dini-Bedingung

$$\omega(\delta) := \sup_{|\mu-\nu|<\delta, |\mu|, |\nu|=1} |\Omega(\mu) - \Omega(\nu)|$$

mit

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r} \ \mathrm{d}r \leq \Lambda. \tag{4.13}$$

Setzen wir für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit kompaktem Träger*

$$(K_\varepsilon f)(x) := \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} K(y) f(x-y) \ \mathrm{d}y,$$

$Kf := \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon f$ *im Mass, so erweitern* K, K_ε *zum schwachen Typ* $(1,1)$ *und zum starken Typ* (p,p) *für* $1 < p < \infty$, *genauer gilt für den Maximaloperator*

$$(K^M f)(x) := \sup_{0<\varepsilon\leq R<\infty} |(K_{\varepsilon,R} * f)(x)| = \sup_{0<\varepsilon\leq R<\infty} \Big| \int\limits_{\varepsilon\leq|y|\leq R} K(y) f(x-y) \ \mathrm{d}y \Big|,$$

daß

$$\mathcal{L}^n(|K^M f| > t) \leq C_n \Lambda \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-1} \quad \forall t > 0, \tag{4.14}$$

$$\parallel K^M f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \Lambda \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \tag{4.15}$$

Die Aktion auf der Fourier-Transformierten ist gegeben durch

$$\widehat{Kf} = m\hat{f} \quad \begin{cases} \text{für } f \in L^2(\mathbb{R}^n), \\ \text{für } f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ mit } Kf \in L^1(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{4.16}$$

mit

$$m(y) := \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega(\omega) \Big(-\frac{i\pi}{2} sgn\langle y, \omega\rangle + \log \frac{|y|}{|\langle y, \omega\rangle|} \Big) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(\omega) \quad \text{für } y \neq 0.$$

Weiter gilt

$$Kf = \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon f \tag{4.17}$$

punktweise $\mathcal{L}^n$*−fast überall auf* $\mathbb{R}^n$ *für* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ *und stark in* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *für* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$.

□

(4.14), (4.15) und (4.17) folgen sofort aus dem Satz 3.2 und dem folgenden Lemma.

Lemma 4.2 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 ist* K *ein Calderon-Zygmund-Kern mit Dini-Bedingung, genauer erfüllt* K *(3.21) - (3.23) aus Definition 3.1 und (3.27) mit* Λ *ersetzt durch* $C_n\Lambda$ *.*

Beweis:
(3.21) folgt aus (4.11) mit (3.15). (3.23) folgt sofort aus der Auslöschungsbedingung (4.12). Zum Beweis von (3.27) schreiben wir

$$K(x-y)-K(x)=\frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{|x-y|^n}+\Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right).$$

Für den ersten Term sehen wir mit

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|\leq\frac{|y|}{\min(|x-y|,|x|)}\leq\frac{2|y|}{|x|}$$

für $|x|\geq 2|y|$ und der Dini-Bedingung

$$|\Omega(x-y)-\Omega(x)|\leq\omega(2|y|/|x|),$$

also

$$\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{|x-y|^n}\leq C_n\omega(2|y|/|x|)|x|^{-n}.$$

Für $|x|\geq 2|y|$ gilt weiter

$$|\Omega(x)|\left|\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right|\leq C_n\Lambda(|y|/|x|)|x|^{-n}.$$

Setzen wir

$$\tilde{\omega}(r):=C_n(\omega(r)+\Lambda r),$$

so erhalten wir

$$|K(x-y)-K(x)|\leq\tilde{\omega}(2|y|/|x|)|x|^{-n}.$$

Klarerweise ist $\tilde{\omega}$ monoton nicht-fallend, und es gilt (4.13)

$$\int_0^1\frac{\tilde{\omega}(r)}{r}\,\mathrm{d}r\leq C_n\Lambda.$$

Dies ergibt (3.27) mit Λ ersetzt durch $C_n\Lambda$. Schließlich folgt (3.22) allgemein aus (3.27), denn

$$\int_{|x|\geq 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,\mathrm{d}x\leq\int_{|y|\geq 2|x|}\tilde{\omega}(2|y|/|x|)|x|^{-n}\,\mathrm{d}x\leq$$

$$\leq C_n\int_{2|y|}^{\infty}\tilde{\omega}(2|y|/r)r^{-1}\,\mathrm{d}r=C_n\int_0^1\frac{\tilde{\omega}(r)}{r}\,\mathrm{d}r\leq C_n\Lambda.$$

///

Abschluß des Beweises von Satz 4.1:
Es verbleibt (4.16) zu zeigen. Zuerst folgt (4.3) aus (4.11). Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt mit Lemma 4.1 und dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \to 0, R \to \infty} \widehat{K_{\varepsilon,R}} \hat{f} = m\hat{f} \quad \text{stark in } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Andererseits konvergieren $K_\varepsilon f \to Kf, K_R f = K_R * f \to 0$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit (4.17) und, da $K_R \to 0$ gleichmäßig mit (3.31). Dann folgt (4.16) für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit (3.32) und dem Satz von Plancherel.

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $Kf \in L^1(\mathbb{R}^n)$ haben wir mit Proposition 3.3 (3.40) und (4.5)

$$\widehat{Kf} = \lim_{\varepsilon \to 0, R \to \infty} \widehat{K_{\varepsilon,R}} \cdot \hat{f} = m\hat{f} \quad \text{im Maß bzw. punktweise fast überall,}$$

insbesondere $\widehat{Kf} = m\hat{f}$ fast überall auf $\mathbb{R}^n$. Mit der Dini-Bedingung ist Ω stetig, insbesondere $\Omega \in L^\infty(\partial B_1(0))$, und mit dem Satz von Lebesgue ist auch m stetig auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Da $\hat{f}, \widehat{Kf}$ mit Proposition 1.3 stetig auf $\mathbb{R}^n$ sind, folgt $\widehat{Kf} = m\hat{f}$ auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Ist $\hat{f}(0) \neq 0$, so lässt sich $m = \widehat{Kf}/\hat{f}$ stetig in 0 fortsetzen, und, da m homogen vom Grad 0 ist, ist m konstant. Dann überträgt sich $\widehat{Kf} = m\hat{f}$ von $\mathbb{R}^n - \{0\}$ mit der Stetigkeit auf ganz $\mathbb{R}^n$. Ist $\hat{f}(0) = 0$, so folgt mit der Stetigkeit, also auch der Beschränktheit von m , daß auch $\widehat{Kf}(0) = 0$. Damit gilt wieder $\widehat{Kf} = m\hat{f}$ auch in 0 , und (4.16) ist bewiesen.

///

Bemerkung:

Existiert umgekehrt in (4.16) für ein $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ein $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{g} = m\hat{f}$, so sehen wir für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \varphi \, d\mathcal{L}^n = 1, \varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, daß

$$\widehat{\varphi_\varepsilon * g} = \widehat{\varphi_\varepsilon}\hat{g} = m\widehat{\varphi_\varepsilon}\hat{f} = m \cdot \widehat{\varphi_\varepsilon * f} = \mathcal{F}(K(\varphi_\varepsilon * f)),$$

mit (4.16), da $\varphi_\varepsilon * f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Proposition 1.2. Dies ergibt $\varphi_\varepsilon * g = K(\varphi_\varepsilon * f)$ und für $\varepsilon \to 0$ mit Satz (3.1) oder Satz (4.1)

$$g \leftarrow \varphi_\varepsilon * g = K(\varphi_\varepsilon * f) \to Kf \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n) \text{ bzw. im Maß,}$$

also ist $Kf = g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

□

Für $n = 1$ ist ein Kern homogen vom Grad -1 , der die Auslöschungsbedingung (4.2) erfüllt, bis auf einen konstanten Faktor gegeben durch

$$H(x) = \frac{1}{\pi x} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Mit (3.5) erfüllt K (3.2) bzw. (3.22) und damit alle Voraussetzungen von Satz 3.1. Der zugehörige Integraloperator

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} \, dy \tag{4.18}$$

heißt Hilbert-Transformation. Mit Satz 4.1 und Standardresultaten zur Fourier-Transformation erhalten wir sofort folgenden Satz.

Satz 4.2 (Hilbert-Transformation) *Die Hilbert-Transformation* H *und* H_ε *sind vom schwachen Typ* $(1,1)$ *und vom starken Typ* (p,p) *für* $1 < p < \infty$ *, genauer*

$$\mathcal{L}^1(|H_{(\varepsilon)}f| > t) \leq C \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R})} t^{-1}, \tag{4.19}$$

$$\parallel H_{(\varepsilon)}f \parallel_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R})} \quad \text{für } 1 < p < \infty. \tag{4.20}$$

Die Aktion der Hilbert-Transformation auf der Fourier-Transformation ist

$$\begin{gathered} \widehat{Hf} = m\hat{f} \quad \text{für } f \in L^2(\mathbb{R}) \\ m(y) = -i\ sgn(y). \end{gathered} \tag{4.21}$$

Insbesondere

$$H^2 = -id \tag{4.22}$$

und

$$H \quad \text{kommutiert mit Translationen,} \tag{4.23}$$

$$H \quad \text{kommutiert mit Homothetien,} \tag{4.24}$$

$$H \quad \text{anti-kommutiert mit Reflexion.} \tag{4.25}$$

Umgekehrt charakterisieren (4.23) - (4.25) die stetigen Endomorphismen auf $L^2(\mathbb{R})$ *als die Hilbert-Transformation bis auf einen konstanten Faktor.*

Beweis:
(4.19) und (4.20) folgen sofort aus Satz 4.1. Weiter gilt $H_\varepsilon = \chi_{\mathbb{R}-]-\varepsilon,\varepsilon[}H \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\widehat{H_\varepsilon f} = \widehat{H_\varepsilon}\hat{f} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

und $m = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \widehat{H_\varepsilon}$. Wir setzen $H_\varepsilon^R := H\chi_{]-R,R[-]\varepsilon,\varepsilon[} \in L^1(\mathbb{R})$ und rechnen

$$\widehat{H_\varepsilon^R}(y) = \int\limits_{\varepsilon<|x|<R} \frac{1}{\pi x} \exp(-2\pi i\ yx)\ \mathrm{d}x =$$

$$= -2i \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{\pi x} \sin\ (2\pi yx)\ \mathrm{d}x = -\frac{2i}{\pi}\ sgn(y) \int\limits_{2\pi|y|\varepsilon}^{2\pi|y|R} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x.$$

Beachten wir

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin\ x}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{\sin\ x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

so erhalten wir für $y \neq 0$

$$m(y) = -\frac{2i}{\pi} sgn(y) \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = -i\ sgn(y),$$

also (4.21).

Aus (4.21) folgt (4.22) - (4.25) mit Proposition 1.4 z.B. für $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\widehat{H(f^*)} = m\widehat{f^*} = m(\hat{f})^* = -m^*(\hat{f})^* = -(m\hat{f})^* = -(\widehat{Hf})^* = -\widehat{(Hf)^*},$$

also

$$H(f^*) = -(Hf)^*$$

und damit (4.25).

Nun sei T ein stetiger Endomorphismus, der (4.23) - (4.25) erfüllt. Mit Proposition 1.11 ist die Aktion von T auf der Fourier-Transformierten gegeben durch

$$\widehat{Tf} = m_T \hat{f} \quad \text{für } f \in L^2(\mathbb{R})$$

für ein $m_T \in L^\infty(\mathbb{R})$ homogen vom Grad 0. Mit Proposition 1.4 folgt aus (4.25) für T

$$m_T^*(\hat{f})^* = (m_T\hat{f})^* = \left(\widehat{Tf}\right)^* = \widehat{(Tf)^*} = -\widehat{T(f^*)} = -m_T\widehat{f^*} = -m_T(\hat{f})^*,$$

also $m_T^* = -m_T$ und

$$m_T(y) = -i\sigma\ sgn(y) \quad y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

für ein $\sigma \in \mathbb{C}$. Dies ergibt

$$T = \sigma H,$$

also die Behauptung.

///

Nun wenden wir uns der M. Riesz-Transformation als höher dimensionalen Verallgemeinerung der Hilbert-Transformation zu. Dazu definieren wir die singulären, homogenen Integral-Kerne

$$R_j(x) = \frac{1}{\pi\omega_{n-1}} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \quad x \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \tag{4.26}$$

Satz 4.3 (Riesz-Transformation) *Die Riesz-Transformation*

$$(R_j f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} \frac{1}{\pi\omega_{n-1}} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\ f(x-y)\ \mathrm{d}y$$

ist vom schwachen Typ $(1,1)$ *und vom starken Typ* (p,p) *für* $1 < p < \infty$ *.*

Die Aktion von R_j *auf der Fourier-Transformation ist gegeben durch den Multiplikator*

$$m_{R_j}(y) = -i\frac{y_j}{|y|}. \tag{4.27}$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{j=1}^n R_j^2 = -id \tag{4.28}$$

und

$$\sum_{j=1}^n \| R_j f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für } f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{4.29}$$

Beweis:
Die R_j sind ungerade und glatt auf $\partial B_1^n(0)$. Mit Satz 4.1 ist die Riesz-Transformation vom starken Typ (p,p) für $1 < p < \infty$ und vom schwachen Typ $(1,1)$. Mit Lemma 4.1 (4.5) rechnen wir den Multiplikator von R_j aus. Da R_j ungerade ist, gilt

$$m_{R_j}(y) = -\frac{\pi}{2} i \int\limits_{\partial B_1^n(0)} R_j(\nu) sgn\langle y,\nu\rangle \; darea_{\partial B_1^n(0)}(\nu) =$$

$$= -\frac{i}{2\omega_{n-1}} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \nu_j \; sgn\langle y,\nu\rangle \; darea_{\partial B_1^n(0)}(\nu).$$

Wir setzen für $x,y \in \mathbb{R}^n$

$$m(x,y) = -\frac{i}{2\omega_{n-1}} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \langle x,\nu\rangle \; sgn\langle y,\nu\rangle \; darea_{\partial B_1^n(0)}(\nu).$$

Für $x \perp y \neq 0$ sehen wir für die Spiegelung $\bar\nu := \nu - 2\langle \nu,y\rangle y/|y|^2$ von ν an y , daß

$$\langle x,\bar\nu\rangle \; sgn\langle y,\bar\nu\rangle = -\langle x,\nu\rangle \; sgn\langle y,\nu\rangle,$$

also

$$m(x,y) = 0 \quad \text{für } x \perp y.$$

Weiter gilt

$$m(y,y) = -\frac{i}{2\omega_{n-1}} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} |\langle y,\nu\rangle| \; darea_{\partial B_1^n(0)}(\nu) = -\frac{i|y|}{2\omega_{n-1}} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} |\nu_1| \; darea_{\partial B_1^n(0)}(\nu).$$

Wir rechnen

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} |\nu_1| \; darea_{\partial B_1^n(0)}(\nu) = 2 \int\limits_0^1 \int\limits_{\partial B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}}(0)} t(1-t^2)^{-1/2} \; darea_{\partial B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}}(0)} \; \mathrm{d}t =$$

$$= 2 \int\limits_0^1 t(1-t^2)^{(n-3)/2}(n-1)\omega_{n-1} \; \mathrm{d}t = (n-1)\omega_{n-1}\Big[-\frac{2}{n-1}(1-t^2)^{(n-1)/2}\Big]_0^1 = 2\omega_{n-1},$$

also

$$m(y,y) = -i|y| \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^n.$$

Da m in der ersten Variablen linear ist, erhalten wir für $y \neq 0$ mit der Zerlegung $x = \langle x,y\rangle y/|y|^2 + x^\perp, x^\perp \perp y$

$$m(x,y) = \langle x, y/|y|^2\rangle m(y,y) + m(x^\perp,y) = -i\frac{\langle x,y\rangle}{|y|}.$$

Dies ergibt

$$m_{R_j}(y) = m(e_j,y) = -i\frac{y_j}{|y|},$$

also (4.27).

Damit sehen wir

$$\sum_{j=1}^{n} m_{R_j}(y)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-i)^2 y_j^2}{|y|^2} = -1,$$

und (4.28) folgt aus dem Satz von Plancherel. Weiter erhalten wir mit (4.27) und dem Satz von Plancherel

$$\| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \Big| -i \frac{y_j}{|y|} \hat{f}(y) \Big|^2 \, \mathrm{d}y =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{R_j f}|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^{n} \| R_j f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

also (4.29).

///

Als Anwendung auf partielle Differentialgleichungen erhalten wir Calderon-Zygmund- bzw. L^p-Abschätzungen für den Laplace-Operator.

Korollar 4.4 *Für* $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \| \Delta u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Beweis:
Mit Proposition 1.5 sehen wir

$$\widehat{\partial_{jk} u} = -4\pi^2 \widehat{D_j D_k u} = -4\pi^2 \xi_j \xi_k \hat{u}$$

und genauso

$$\widehat{\Delta u} = -4\pi^2 |\xi|^2 \, \hat{u}.$$

Dies ergibt

$$\widehat{\partial_{jk} u} = \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{\Delta u}$$

und mit (4.27)

$$\partial_{jk} u = -R_j R_k \Delta u.$$

Aus Satz 4.3 folgt

$$\| \partial_{jk} u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \| R_j \|_{L^p} \| R_k \|_{L^p} \| \Delta u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \| \Delta u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

und die Behauptung folgt.

///

5 Poisson-Integrale

In diesem Paragraphen wollen wir harmonische Funktionen auf dem Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+$ mit vorgegebenen Randwerten, d.h.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+,$$
$$u = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\},$$

für geeignetes f erhalten. Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \exp(2\pi i \langle y, x\rangle) \exp(-2\pi |y| t) \, \mathrm{d}y \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{5.1}$$

Da $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\exp(-2\pi|y|t)$ für $t > 0$ stark abfällt, ist u wohldefiniert. Darüberhinaus können wir unter dem Integral differenzieren, und, da

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \Delta_x \right) \exp(2\pi i \langle y, x\rangle) \exp(-2\pi |y| t) = 0 \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

sehen wir $u \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ und

$$\Delta_{x,t} u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Mit dem Satz von Plancherel folgt weiter

$$u(.,t) \to f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ für } t \to 0.$$

Mit Proposition 1.4 sehen wir $\hat{f} e_x = \widehat{\tau_{-x} f}$. Definieren wir den Poisson-Kern

$$P_t(x) := \int_{R^n} \exp(2\pi i \langle x, y\rangle) \exp(-2\pi |y| t) \, \mathrm{d}y, \tag{5.2}$$

so sehen wir mit Proposition 1.7 und Approximation, da $\exp(-2\pi|.|t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, also auch $P_t = \mathcal{F}(\exp(-2\pi|.|t)) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dass

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f} e_x)(y) \exp(-2\pi|y|t) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-x} f)(y) P_t(-y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y, \tag{5.3}$$

und wir erhalten u als Faltung von f mit dem Poisson-Kern. Eine explizite Darstellung des Poisson-Kerns gibt folgende Propositon.

Proposition 5.1 *Es gilt*

$$P_t(x) = \frac{1}{\pi \omega_{n-1}} \frac{t}{|(x,t)|^{n+1}} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \tag{5.4}$$

mit $\omega_0 = 1$.

Beweis:
Mit dem Cauchy-Integralsatz folgt für $\gamma \geq 0$, dass

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\gamma x}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x} e^{-sx^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s.$$

Mit $\Phi(x) = \exp(-\pi x^2)$ aus Proposition 1.8 rechnen wir für das innere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x} e^{-sx^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\gamma \pi^{1/2} s^{-1/2} x) \Phi(x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot \hat{\Phi}(-\gamma \pi^{1/2} s^{-1/2}/(2\pi)) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \exp(-\gamma^2/(4s)),$$

und damit

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \exp(-\gamma^2/(4s)) \, \mathrm{d}s.$$

Nun setzen wir dies in (5.2) ein und erhalten wieder mit Proposition 1.8, dass

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \exp(-\pi^2 |y|^2 t^2/s) \, \mathrm{d}s \exp(2\pi i \langle x, y \rangle) \, \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} (\pi t^2 s^{-1})^{-n/2} \exp(-|x|^2 s/t^2) \, \mathrm{d}s =$$

$$= \pi^{-(n+1)/2} t^{-n} \int_{0}^{\infty} s^{(n-1)/2} \exp\Big(-\Big(1 + \frac{|x|^2}{t^2}\Big)s\Big) \, \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{t}{|(x,t)|^{n+1}} \pi^{-(n+1)/2} \int_{0}^{\infty} s^{(n-1)/2} e^{-s} \, \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{|(x,t)|^{n+1}} = \frac{1}{\pi \omega_{n-1}} \frac{t}{|(x,t)|^{n+1}}.$$

///

Folgende Eigenschaften können wir nun leicht verifizieren. Es gilt

$$P_t(x) > 0 \tag{5.5}$$

und

$$P_t \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap C^0_*(\mathbb{R}^n) \quad \forall 1 \leq q \leq \infty, \ t > 0. \tag{5.6}$$

Aus (5.1) folgt, daß P harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Dies können wir auch an der Darstellung (5.4) ablesen. Dazu betrachten wir die Fundamentallösung des Laplace-Operators auf $\mathbb{R}^{n+1}$, siehe [GT] Paragraph 2.4,

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)(1-n)\omega_{n+1}}|(x,t)|^{1-n} & n \geq 2, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|(x,t)| & n = 1. \end{cases} \tag{5.7}$$

Γ ist harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, und wir rechnen

$$\nabla\Gamma(x,t) = \frac{1}{(n+1)\omega_{n+1}} \frac{(x,t)}{|(x,t)|^{n+1}}$$

und, da $\pi\omega_{n-1} = (n+1)\omega_{n+1}/2$, folgt aus (5.4)

$$P_t(x) = 2\partial_t\Gamma(x,t), \tag{5.8}$$

insbesondere ist P harmonisch.

Aus (5.2) folgt mit dem Fourier-Inversionssatz, Satz 1.1,

$$\widehat{P_t}(y) = \exp(-2\pi|y|t), \tag{5.9}$$

insbesondere

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\ \mathrm{d}x = 1. \tag{5.10}$$

Weiter folgt aus (5.9)

$$P_{t+s} = P_t * P_s. \tag{5.11}$$

$P(.,.)$ ist homogen vom Grad $-n$, insbesondere

$$P_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} P_1(x/\varepsilon). \tag{5.12}$$

Schließlich ist P radialsymmetrisch in x und monoton nicht-wachsend in $|x|$, insbesondere ist P_t seine eigene monoton nicht-wachsende, radiale Maximalfunktion.

Zusammen mit den vorigen Bemerkungen und Lemma 2.3 erhalten wir folgenden Satz.

Satz 5.1 (Poisson-Integral) *Das Poisson-Integral einer Funktion* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$,

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) f(x-y)\ \mathrm{d}y = (P_t * f)(x) = (P_t f)(x)$$

ist harmonisch, in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *und erfüllt weiter*

$$\sup_{t>0} \| u_t \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.13}$$

$$\sup_{t>0} |u_t| \leq Mf, \tag{5.14}$$

$$\lim_{t\downarrow 0} u_t = f \quad \mathcal{L}^n - \textit{fast überall}, \tag{5.15}$$

$$u_t \to f \quad \textit{in } L^p(\mathbb{R}^n) \textit{ für } 1 \leq p < \infty. \tag{5.16}$$

Ist f *stetig und beschränkt, so*

$$u_t \to f \quad \textit{gleichmäßig auf kompakten Mengen.} \tag{5.17}$$

Beweis:
Mit (5.6) ist u wohldefiniert, und mit (5.8) kann u unter dem Integral differenziert werden, und u ist harmonisch. (5.13) folgt aus (5.5), (5.10) und Proposition 1.2. (5.14) und (5.17) folgen aus (5.5), (5.10), (5.12) und der Bemerkung vor diesem Satz und Lemma 2.3. (5.16) folgt aus (5.10), (5.12) und Standardresultaten für Faltungen.

///

Da $P_t \in C_*^0(\mathbb{R}^n)$ kann P_t auch mit Maßen gefaltet werden.

Satz 5.2 *Das Poisson-Integral eines endlichen Maßes* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\ \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(y) \exp(2\pi i \langle y, x\rangle) \exp(-2\pi |y| t)\ \mathrm{d}y = (P_t * \mu)(x) \tag{5.18}$$

ist harmonisch in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ *und erfüllt weiter*

$$\sup_{t>0} \| u_t \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| \mu \|, \tag{5.19}$$

$$u_t \to \mu \quad \textit{schwach}^* \textit{ in } C_*^0(\mathbb{R}^n)^*, \tag{5.20}$$

d.h.

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\ \mathrm{d}\mu \quad \forall \varphi \in C_*^0(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:
Die Identität (5.18) folgt aus Proposition 1.7 und (5.9). u ist harmonisch mit (5.8). (5.19) folgt aus (5.5), (5.10) und Proposition 1.2. Für $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\varphi(x)\ \mathrm{d}\mu(y)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} P_t(y-x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t * \varphi\ \mathrm{d}y \to \int \varphi\ \mathrm{d}\mu,$$

da $P_t * \varphi \to \varphi$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$.

///

Die Sätze 5.1 und 5.2 haben folgende Umkehrung.

Satz 5.3 u *sei harmonisch in* $\mathbb{R}_+^{n+1}$ *und erfülle für ein* $1 \leq p \leq \infty$

$$\sup_{t>0} \| u_t \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{5.21}$$

Dann ist u *das Poisson-Integral einer Funktion* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *, falls* $1 < p \leq \infty$ *.*

Für $p = 1$ *ist* u *das Poisson-Integral eines endlichen Maßes* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *. Konvergiert* u_t *in* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *für eine Teilfolge* $t \to 0$ *, so ist* u *das Poisson-Integral einer Funktion* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *.*

$\square$

Zum Beweis zeigen wir zuerst einige Propositionen.

Proposition 5.2 *Für* u *harmonisch in* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *mit*

$$\sup_{t>0} \| u_t \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

für ein $1 \le p < \infty$ *gilt*

$$\| u_t \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_n \sup_{s>0} \| u_s \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, t^{-n/p} \quad \forall t > 0. \tag{5.22}$$

Beweis:
Da u harmonisch ist, gilt mit dem Mittelwertsatz

$$u(x,t) = \fint_{B_t^{n+1}(x,t)} u \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1}.$$

Daraus folgt

$$|u(x,t)| \le \Big(\fint_{B_t^{n+1}(x,t)} |u|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} \Big)^{1/p} \le C_n t^{-(n+1)/p} \Big(\int_0^{2t} \int_{\mathbb{R}^n} |u_s|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \, \mathrm{d}s \Big)^{1/p} \le$$

$$\le C_n t^{-(n+1)/p} \Big(t \sup_{s>0} \| u_s \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/p} = C_n \sup_{s>0} \| u_s \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, t^{-n/p},$$

also (5.22).

///

Proposition 5.3 *Für* u *harmonisch in* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *mit*

$$\sup_{t>0} \| u_t \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

für ein $1 \le p \le \infty$ *gilt*

$$u_{t+s} = P_t * u_s \quad \textit{für } t, s > 0. \tag{5.23}$$

Beweis:
Mit Proposition 5.2 ist $u \in C^0_b(x_{n+1} \ge s)$ für $s > 0$, und mit Satz 5.1 (5.17) ist $P_t * u_s \in C^0_b(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Damit ist

$$v(x,t) := u(x,t+s) - (P_t * u_s)(x)$$

stetig, beschränkt auf $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ und

$$v(x,0) = 0.$$

Aus der folgenden Proposition folgt $v \equiv 0$ und $u_{t+s} = P_t * u_s$, also (5.23).

///

Proposition 5.4 *Es sei* $v \in C_b^0(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ *harmonisch in* $\mathbb{R}_+^{n+1}$ *und*

$$v(x,0) = 0 \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $v = 0$ *.*

Beweis:
Wir setzen

$$v(x,-t) := -v(x,t) \quad \text{für } t \geq 0.$$

Damit ist $v \in C_b^0(\mathbb{R}^{n+1}) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ und für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} v\Delta\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} \leftarrow \int_{|x_{n+1}|\geq\varepsilon} v\Delta\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty \Big(v(x,t)\Delta\varphi(x,t) + v(x,-t)\Delta\varphi(x,-t) \Big) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty v(x,t) \Big(\Delta\varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,-t) \Big) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x.$$

Setzen wir $\psi(x,t) := \varphi(x,t) - \varphi(x,-t)$, so ist $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \psi(x,0) = 0$, und

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} v\Delta\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} \leftarrow \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty v(x,t)\Delta\psi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty \nabla v(x,t)\nabla\psi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} v(x,\varepsilon)\partial_t\psi(x,\varepsilon) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\partial_t v(x,\varepsilon)\psi(x,\varepsilon) - v(x,\varepsilon)\partial_t\psi(x,\varepsilon)) \, \mathrm{d}x. \tag{5.24}$$

Da $v = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ und $\nabla\psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ konvergiert der zweite Term gegen 0 .

Mit den Cauchy-Abschätzungen für harmonische Funktionen, siehe [GT] Theorem 2.10, folgt

$$|\partial_t v(x,\varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{B_\varepsilon^{n+1}(x,\varepsilon)} |v|.$$

Da $\psi(x,0) = 0$, erhalten wir

$$|\partial_t v(.,\varepsilon)\psi(.,\varepsilon)| \leq \sup_{B_R^n(0)\times]0,2\varepsilon[} |v| \parallel \nabla\psi \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})} \to 0$$

für großes R , da ψ kompakten Träger hat.

Mit (5.24) folgt $\int v\Delta\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} = 0$, also ist v mit dem Lemma von Weyl, siehe [GT] Problem 2.8, harmonisch. Da v auf $\mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt ist, folgt mit dem Satz von Liouville, daß v konstant ist, [GT] Problem 2.14, also $v \equiv 0$, da $v(x,0) = 0$.

///

Beweis von Satz 5.3:
Mit (5.21) konvergiert $u_{s_k} \to f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ schwach in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < \infty$, schwach* in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $p = \infty$, und $u_{s_k} \to \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ schwach* in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = C^0_*(\mathbb{R}^n)^*$ für $p = 1$ für eine Teilfolge $s_k \to 0$.

Mit (5.6) und (5.23) folgt

$$u_t \leftarrow u_{t+s_k} = P_t * u_{s_k} \to P_t * f \quad \text{punktweise}$$

bzw.

$$u_t \leftarrow u_{t-s_k} = P_t * u_{s_k} \to P_t * \mu$$

punktweise.

Konvergiert $u_{s_k} \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so folgt genauso

$$u_t = P_t * f.$$

///

Da $\mathbb{R}^{n+1}_+$ einfach zumsammenhängend ist, existiert im Fall $n = 1$ eine zu u konjugiert harmonische Funktion v, so daß $F = u+iv$ holomorph ist bzw. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_1 v + \partial_2 u = 0, \\ \partial_2 v = \partial_1 u, \end{aligned} \tag{5.25}$$

erfüllt sind. v ist bis auf eine additive Konstante eindeutig erfüllt.

Nun stellt sich die Frage, ob (5.21), d.h.

$$\sup_{t>0} \| u(.,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty$$

für ein $1 \le p \le \infty$ auch

$$\sup_{t>0} \| v(.,t) \|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty$$

für geeignetes v. Für $1 < p < \infty$ wird dies durch den Satz von M. Riesz positiv beantwortet, siehe unten Korollar 5.5.

Mit (5.25) sehen wir, daß v zu u genau dann konjugiert harmonisch ist, falls (v, u) der Gradient einer harmonischen Funktion ist. Für $n \ge 1$ führt dies zu den verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n+1} \partial_j u_j = 0,$$

$$\partial_j u_k = \partial_k u_j \quad j, k = 1, \ldots, n+1.$$

Die zweite Gleichung besagt, daß $(u_1, \ldots u_{n+1})$ lokal bzw. auf einfach zusammenhängenden Gebieten der Gradient eine Funktion $u_k = \partial_k H$ ist, und mit der ersten Gleichung folgt, daß H harmonisch ist. Dabei entspricht $u = u_{n+1} = \partial_{n+1} H$.

Nach (5.8) ist der Poisson-Kern $P = 2\partial_{n+1}\Gamma$ Ableitung der harmonischen Funktion 2Γ. Daher kommen wir zu folgender Definition.

Definition 5.1 *Die konjugierten Poisson-Kerne sind definiert durch*

$$Q_t^j(x) := \frac{1}{\pi\omega_{n-1}} \frac{x_j}{|(x,t)|^{n+1}} = 2\partial_j \Gamma(x,t) \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, (x,t) \neq (0,0). \tag{5.26}$$

□

Wir sehen

$$Q_\varepsilon^j(x) = \varepsilon^{-n}\, Q_1^j(x/\varepsilon), \tag{5.27}$$

und

$$Q_t^j \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap C_*^0(\mathbb{R}^n) \quad \forall 1 < q \leq \infty. \tag{5.28}$$

Mit (4.26) sehen wir, daß die konjugierten Poisson-Kerne die Kerne der Riesz-Transformation fortsetzen, genauer

$$Q_0^j(x) = R_j(x) = \frac{1}{\pi\omega_{n-1}} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \quad x \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \tag{5.29}$$

In der folgenden Proposition sehen wir, daß die konjugierten Poisson-Kerne die Riesz-Transformation des Poisson-Kerns ist.

Proposition 5.5 *Es gilt*

$$Q_t^j = R_j P_t, \tag{5.30}$$

$$\widehat{Q_t^j}(y) = -i\frac{y_j}{|y|}\exp(-2\pi|y|t). \tag{5.31}$$

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ *, gilt*

$$Q_t^j * f = R_j(P_t * f) = P_t * (R_j f), \tag{5.32}$$

und für $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$Q_t^j * \mu = R_j(P_t * \mu). \tag{5.33}$$

Beweis:
Für $\varepsilon > 0$ ist $\Big((x,t) \mapsto Q_{t+\varepsilon}^j(x)\Big)$ stetig, beschränkt und harmonisch auf $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$. Mit Satz 5.3 folgt

$$Q_{t+\varepsilon}^j = P_t * Q_\varepsilon^j \quad \text{in } \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}. \tag{5.34}$$

Setzen wir

$$\varphi := Q_1^j - R_{j,1},$$

wobei $R_{j,\varepsilon} = \chi_{\mathbb{R}^n - B_\varepsilon^n(0)} R_j$, und $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, so sehen wir mit der Homogenität von R_j und (5.27)

$$\varphi_\varepsilon = Q_\varepsilon^j - R_{j,\varepsilon}.$$

Mit (5.34) gilt

$$Q_t^j - R_j P_t \leftarrow Q_{t+\varepsilon}^j \; - R_{j,\varepsilon} P_t = P_t * Q_\varepsilon^j - P_t * R_{j,\varepsilon} = P_t * \varphi_\varepsilon \tag{5.35}$$

mit Konvergenz in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < \infty$, bzw. punktweise fast überall mit Satz 3.2.

Für $|y| > 1$ gilt

$$|\pi\omega_{n-1}\varphi(y)| = \Big|\frac{y_j}{|(y,1)|^{n+1}} - \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\Big| \leq \Big|\frac{|(y,1)|^{n+1} - |y|^{n+1}}{|(y,1)|^{n+1}|y|^n}\Big| \leq$$

$$\leq \frac{(1+|y|)^{n+1} - |y|^{n+1}}{|(y,1)|^{n+1}|y|^n} \leq C_n|(1,y)|^{-n-1}$$

und für $|y| \leq 1$ ist φ beschränkt. Daraus folgt $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mit Standardfaltungsabschätzung bzw. Lemma 2.3 folgt

$$P_t * \varphi_\varepsilon \to P_t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 0 \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n)$$

für $1 \leq p < \infty$, da $\varphi(y) = -\varphi(-y)$, und aus (5.35) folgt (5.30). Mit Satz 4.3 (4.27) und (5.9) erhalten wir, da $P_t \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{Q_t^j}(y) = \widehat{R_j P_t}(y) = m_{R_j}(y)\hat{P}_t(y) = -i\frac{y_j}{|y|}\exp(-2\pi|y|t),$$

also (5.31).

Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $P_t * f, Q_t^j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit (5.6), (5.28), und wir erhalten mit Proposition 1.3, (4.27) und (5.31)

$$\widehat{Q_t^j * f} = \widehat{Q_t^j}\hat{f} = m_{R_j}\hat{P}_t\hat{f} = m_{R_j}\widehat{P_t * f} = \mathcal{F}(R_j(P_t * f))$$

und

$$\widehat{Q_t^j * f} = m_{R_j}\widehat{P}_t\hat{f} = \hat{P}_t\widehat{R_j f} = \mathcal{F}(P_t * (R_j f)),$$

also (5.32) für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$, folgt (5.32) durch Approximation mit $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)-$Funktionen und der Stetigkeit von R_j auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, siehe Satz 4.3, da $Q_t^j,\ P_t \in L^q(\mathbb{R}^n)$ für $1 < q \leq \infty$ mit (5.6) und (5.28).

Für $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ gilt $P_t * \mu, Q_t^j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit (5.6), (5.28), und wir erhalten wie oben aus Proposition 1.3, (4.27) und (5.31)

$$\widehat{Q_t^j * \mu} = \widehat{Q_r^j}\hat{\mu} = m_{R_j}\widehat{P}_t\hat{\mu} = m_{R_j}\widehat{P_t * \mu} = \mathcal{F}(R_j(P_t * \mu)),$$

also (5.33).

///

Kombinieren wir dies mit Lemma 3.1, so erhalten wir

Proposition 5.6 Q_t^j *ist vom schwachen Typ* $(1,1)$ *und vom starken Typ* (p,p) *für* $1 < p < \infty$ *, genauer*

$$\mathcal{L}^n(|Q_t^j * f| > \alpha) \leq C_n \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} \alpha^{-1} \quad \forall \alpha > 0,\ t > 0, \tag{5.36}$$

$$\parallel Q_t^j * f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t > 0, 1 < p < \infty. \tag{5.37}$$

Beweis:
Es folgt aus der vorigen Proposition 5.5 mit Satz 4.3, Proposition 1.2 und (5.5), (5.10)

$$\mathcal{L}^n(|Q_t^j * f| > \alpha) = \mathcal{L}^n(|R_j(P_t * f)| > \alpha) \leq C_n \parallel P_t * f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} \alpha^{-1} \leq$$

$$\leq C_n \parallel P_t \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} \alpha^{-1} = C_n \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} \alpha^{-1}$$

und

$$\parallel Q_t^j * f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \parallel R_j(P_t * f) \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \parallel P_t * f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq C_{n,p} \parallel P_t \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C_{n,p} \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

///

Nun können wir die verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Gleichungen lösen.

Satz 5.4 *u sei harmonisch auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$ und erfülle für ein $1 \leq p < \infty$*

$$\sup_{t>0} \parallel u(.,t) \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{5.38}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung der verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n+1} \partial_j u_j = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ \partial_j u_k = \partial_k u_j \quad \text{in } \mathbb{R}_+^{n+1}, j,k = 1,\ldots,n+1, \end{gathered} \tag{5.39}$$

mit $u_{n+1} = u$, und für ein $p \leq q < \infty, q \neq 1$, tatsächlich für alle $p \leq q \leq \infty, q \neq 1$,

$$u_j(.,t) \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall t > 0, j = 1,\ldots,n, \tag{5.40}$$

und diese ist gegeben durch

$$u_j(.,t) = R_j u(.,t). \tag{5.41}$$

Mit Satz 5.3 ist u das Poisson-Integral

$$u(.,t) = P_t * f$$

einer Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < \infty$ bzw.

$$u(.,t) = P_t * \mu$$

eines endlichen Borel-Maßes $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ für $p = 1$.
Dann gilt

$$u_j(.,t) = Q_t^j * f \quad \text{für } 1 < p < \infty, \tag{5.42}$$

bzw.

$$u_j(.,t) = Q_t^j * \mu \quad \text{für } p = 1. \tag{5.43}$$

Für $1 < p < \infty$ gilt weiter

$$\sup_{t>0} \parallel u_j(.,t) \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad j = 1,\ldots,n \tag{5.44}$$

$$u(.,t), u_j(..,t) \to f, R_j f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ für } t \to 0, \quad j = 1,\ldots n. \tag{5.45}$$

Für $p = 1$ *gilt*

$$\sup_{t>0} \| u_j(.,t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty, \tag{5.46}$$

genau dann, wenn $\mu_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *existiert mit*

$$\hat{\mu}_j = m_{R_j} \hat{\mu}. \tag{5.47}$$

Gilt dies für alle $j = 1, \ldots, n$ *, so existiert* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit* $R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\begin{gathered} \mu = f\mathcal{L}^n, \mu_j = (R_j f)\mathcal{L}^n, \\ u(.,t) \to f \quad \mathit{in}\ L^1(\mathbb{R}^n) \quad \mathit{für}\ t \to 0, \\ u_j(.,t) \to R_j f \quad \mathit{in}\ L^1(\mathbb{R}^n)\ \mathit{für}\ t \to 0, \\ u_j(.,t) = P_t * R_j f, \end{gathered} \tag{5.48}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \sup_{j=1}^{n+1} |u_j(.,t)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq C_n \sup_{t>0} \sup_{j=1}^{n+1} \| u_j(.,t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \sup_{j=1}^{n} \| f, R_j f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{5.49}$$

Beweis:
Zur Existenz erhalten wir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $u(.,t) = P_t * f$ bzw. $u(.,t) = P_t * \mu$ mit Satz 5.3 und definieren u_j in (5.41) oder mit (5.32), (5.33) äquivalent in (5.42), (5.43). Mit (5.28) ist u_j wohldefiniert und

$$u_j(.,t) \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall t > 0, p < q \leq \infty, j = 1, \ldots, n.$$

Mit Proposition 5.5 erhalten wir außerdem $u_j(.,t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < \infty$. Damit erfüllt u_j (5.40) für alle angegebenen q .

Mit (5.26) kann u_j unter dem Integral differenziert werden, und wir erhalten

$$\partial_k u_j(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} 2\partial_{jk}\Gamma(x-y,t) f(y) \, \mathrm{d}y$$

bzw.

$$\partial_k u_j(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} 2\partial_{jk}\Gamma(x-y,t) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Da Γ harmonisch ist, folgt (5.39).

Nun sei umgekehrt u_j eine Lösung von (5.39) mit (5.40) und $u_{n+1} = u$. Subtrahieren wir unsere bereits konstruierte Lösung, so können wir $u_{n+1} = 0$ annehmen und müssen

$$u_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

zeigen. Aus (5.39) existiert eine harmonische Funktion $H \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ mit $\nabla_{x,t} H = (u_1, \ldots, u_{n+1})$. Da $u_{n+1} = 0$, ist H unabhängig von t . Somit ist $H \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $\nabla H = (u_1, \ldots, u_n) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \leq q < \infty, q \neq 1$.

Insbesondere sind $u_j \in L^q(\mathbb{R}^n)$ harmonisch. Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$|u_j(x)| \leq \fint_{B^n_R(x)} |u_j| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \Big(\fint_{B^n_R(x)} |u_j|^q \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \Big)^{1/q} \leq C_n R^{-n/q} \parallel u_j \parallel_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für } R \to \infty,$$

da $q < \infty$. Dies ergibt $u_j = 0$, und die Eindeutigkeit ist bewiesen.

Für $1 < p < \infty$ folgt (5.44) aus (5.37) und (5.42). Weiter folgt (5.45) aus (5.41), der Stetigkeit von R_j auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ und Satz 5.1.

Gilt (5.46) im Fall $p = 1$, so sehen wir mit Satz 5.3

$$u_j(.,t) = P_t * \mu_j$$

für $\mu_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1}), \mu_{n+1} = \mu$. Mit (5.41) und $u(.,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für $t > 0$ folgt

$$\widehat{P}_t \hat{\mu}_j = \widehat{P_t * \mu_j} = \widehat{u_j(.,t)} = \widehat{R_j u(.,t)} = m_{R_j} \widehat{u(.,t)} = m_{R_j} \widehat{P_t * \mu} = m_{R_j} \widehat{P}_t \hat{\mu},$$

also

$$\hat{\mu}_j = m_{R_j} \hat{\mu},$$

da $\widehat{P}_t \neq 0$ mit (5.9).

Gilt umgekehrt (5.47), so sehen wir mit (5.41) und $u(.,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für $t > 0$

$$\widehat{u_j(.,t)} = \widehat{R_j u(.,t)} = m_{R_j} \widehat{u(.,t)} = m_{R_j} \widehat{P_t * \mu} = \widehat{P}_t m_{R_j} \hat{\mu} = \widehat{P}_t \hat{\mu}_j = \widehat{P_t * \mu_j},$$

also

$$u_j(.,t) = P_t * \mu_j,$$

und (5.46) folgt aus Satz 5.1 (5.13).

Die Konklusionen (5.48), (5.49) brauchen mehr Vorbereitung und werden unten bewiesen.

//

Zuerst geben wir für $n = 1$ den folgenden Satz von M. Riesz als Korollar.

Korollar 5.5 (M. Riesz) *Es sei u harmonisch in $\mathbb{R}^2_+$ und erfülle*

$$\sup_{y>0} \parallel u(.,y) \parallel_{L^p(\mathbb{R})} < \infty$$

für ein $1 < p < \infty$, also $u(.,y) = P_y * f$ für ein $f \in L^p(\mathbb{R})$ mit Satz 5.3.

Dann ist

$$v_y = Q_y * f = P_y * Hf = H(P_y * f),$$

d.h.

$$v(x,y) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\tau}{\tau^2 + y^2} f(x - \tau) \, \mathrm{d}\tau$$

zu u konjugiert harmonisch und

$$\parallel v(.,y) \parallel_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \parallel f \parallel_{L^p(\mathbb{R})} .$$

Beweis:
Mit Satz 5.4 ist v konjugiert harmonisch zu u, und die Abschätzung folgt aus Proposition 5.6

///

Zum Beweis von (5.48), (5.49) in Satz 5.4 für $p = 1$ unter der Annahme (5.46) brauchen wir folgende Propositionen.

Proposition 5.7 *Es sei* $F = (u_1, \dots, u_{n+1}) : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{(n+1)\times m}$ *eine vektorwertige Lösung der verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Gleichungen (5.39) in einer offenen Menge* $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dann ist $|F|^q$ *für* $q \geq (n-1)/n$ *subharmonisch. Genauer gilt*

$$c_q |F|^{q-2} |\nabla F|^2 \leq \Delta |F|^q \leq C_q |F|^{q-2} |\nabla F|^2 \quad \text{in } [F \neq 0] \tag{5.50}$$

mit $0 \leq c_q \leq C_q < \infty, c_q > 0$ *für* $q > (n-1)/n$.

Für $q \geq 2$ *können wir*

$$C_q = q(q-1), c_q = q,$$

und für $(n-1)/n \leq q \leq 2$

$$C_q = q, c_q = q\Big(1 + (q-2)\frac{n}{n+1}\Big)$$

wählen.

Beweis:
Im Beweis von Satz 5.4 haben wir bereits gesehen, daß lokal eine harmonische Funktion H mit $\nabla H = F$ existiert. Damit sind die u_j harmonisch und $F, u_j \in C^\infty_{loc}(U)$. Ist $F(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in U$, so betrachten wir o.B.d.A. $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ und $F_\varepsilon := F + \varepsilon(Q^j_t, P_t)e_1$. F_ε löst (5.39) in $U \cap \mathbb{R}^n_+$ und $F_\varepsilon(x_0) \neq 0$. Da $F_\varepsilon \to F$ und die Behauptung lokal ist, können wir $F \neq 0$ auf U annehmen. Insbesondere folgt $|F|^q \in C^\infty_{loc}(U)$.

Wir rechnen

$$\partial_k |F|^q = q|F|^{q-2} \sum_{j=1}^{n+1} \langle u_j, \partial_k u_j \rangle = q|F|^{q-2} \langle F, \partial_k F \rangle,$$

$$\partial_{kk} |F|^q = q|F|^{q-2} \sum_{j=1}^{n+1} \langle u_j, \partial_{kk} u_j \rangle + q|F|^{q-2} \sum_{j=1}^{n+1} \langle \partial_k u_j, \partial_k u_j \rangle + q(q-2)|F|^{q-4} |\langle F, \partial_k F \rangle|^2.$$

Da u_j harmonisch sind, folgt

$$\Delta |F|^q = q|F|^{q-4} \Big(|F|^2 |\nabla F|^2 + (q-2) |\langle F, \nabla F \rangle|^2 \Big). \tag{5.51}$$

Für $q \geq 2$ folgt sofort

$$\Delta |F|^q \geq q|F|^{q-2} |\nabla F|^2$$

und $|F|^q$ ist subharmonisch. Weiter folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle F, \nabla F \rangle|^2 \leq |F|^2 |\nabla F|^2,$$

also

$$\Delta|F|^q \leq q(q-1)|F|^{q-2}|\nabla F|^2.$$

Für $q \leq 2$ folgt sofort

$$\Delta|F|^q \leq q|F|^{q-2}|\nabla F|^2.$$

Weiter zeigen wir die verbesserte Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big|\sum_{j=1}^{n+1}\langle u_j, \partial_k u_j\rangle\Big|^2 \leq \frac{n}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}|u_j|^2\sum_{j,k=1}^{n+1}|\partial_k u_j|^2. \tag{5.52}$$

Ist diese Ungleichung bewiesen, so ergibt dies

$$|\langle F, \nabla F\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\Big|\sum_{j=1}^{n+1}\langle u_j, \partial_k u_j\rangle\Big|^2 \leq \frac{n}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}|u_j|^2\sum_{j,k=1}^{n+1}|\partial_k u_j|^2 = \frac{n}{n+1}|F|^2\ |\nabla F|^2,$$

und mit (5.51) folgt

$$\Delta|F|^q = q|F|^{q-4}\Big(|F|^2|\nabla F|^2 + (q-2)|\langle F, \nabla F\rangle|^2\Big) \geq$$

$$\geq q\Big(1 + (q-2)\frac{n}{n+1}\Big)|F|^{q-2}|\nabla F|^2 \geq 0,$$

falls $q \geq (n-1)/n$ wie angenommen.

Mit der verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Gleichung sehen wir, daß die Matrizen $(\partial_k u_j^i)_{k,j=1,\dots,n+1}$ symmetrisch und spurfrei sind. Damit folgt (5.52) aus der nächsten elementaren Proposition und der darauffolgenden Bemerkung.

///

Proposition 5.8 *Für* $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ *symmetrisch und spurfrei gilt*

$$\lambda(A) = \sup|spec(A)| = \sup_{|x|\leq 1}|Ax| \leq \sqrt{\frac{n}{n+1}}\parallel A \parallel_2,$$

wobei $|x|^2 = \sum_{j=1}^{n+1}|x_j|^2$ *und* $\parallel A \parallel_2^2 = \sum_{j,k=1}^{n+1}|a_{jk}|^2$ *mit* $A = (a_{jk})$.

Beweis:
Da $\lambda(A)$ und $\parallel A \parallel_2$ invariant unter orthogonalen Transformationen sind, können wir $A = diag(\lambda_1, \dots \lambda_{n+1})$ als diagonal mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots \lambda_{n+1}$, entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt, annehmen.

Nach Voraussetzung gilt $0 = tr(A) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j$. Für $1 \leq k \leq n+1$ folgt $\lambda_k = -\sum_{j\neq k} \lambda_j$, und mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\lambda_k^2 \leq n \cdot \sum_{j\neq k}\lambda_j^2$$

und

$$\lambda_k^2 \leq \frac{n}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j^2, \quad k = 1, \dots, n+1,$$

also die Behauptung.

$///$

Bemerkung:
Für symmetrische und spurfreie $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ und $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^{n+1}$ sehen wir

$$\Big|\sum_{i=1}^m A_i x_i\Big| \le \sum_{i=1}^m |A_i x_i| \le \sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{n}{n+1}} \parallel A_i \parallel_2 |x_i| \le$$
$$\le \left(\frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^m \parallel A_i \parallel_2^2 \cdot \sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

□

Proposition 5.9 *$F = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ seien eine Lösung von (5.39) in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ mit*

$$\sup_{t>0} \parallel F(.,t) \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{5.53}$$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |F(x,t)| \, \mathrm{d}x \le C_n \sup_{t>0} \parallel F(.,t) \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{5.54}$$

Beweis:
Für $(n-1)/n \le q < 1, \varepsilon > 0$, setzen wir

$$g_\varepsilon(x) := |F(x,\varepsilon)|^q \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$v_\varepsilon(x,t) := (P_t * g_\varepsilon)(x) \ge 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Für $p = 1/q > 1$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_\varepsilon|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,\varepsilon)| \, \mathrm{d}x \le \sup_{t>0} \parallel F(.,t) \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

und wir erhalten für eine Teilfolge $\varepsilon_m \to 0$

$$g_{\varepsilon_m} \to g \quad \text{schwach in } L^p(\mathbb{R}^n),$$

mit

$$\parallel g \parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \sup_{t>0} \parallel F(.,t) \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{5.55}$$

Setzen wir $v(x,t) = (P_t * g)(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, so sehen wir mit den Cauchy-Abschätzungen, da v_ε harmonisch sind, dass

$$v_{\varepsilon_m} \to v \text{ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R}^{n+1}_+. \tag{5.56}$$

Mit Satz 5.3 und (5.53) sind u_j Poisson-Integrale

$$u_j(.,t) = P_t * \mu_j$$

von endlichen Maßen $\mu_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Für $|x| \geq 2R \geq 1, t > 0$, folgt

$$|u_j(x,t+\varepsilon)| \leq C_n \int\limits_{B_R^n(0)} \frac{1}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}|\mu_j|(y) + C_n \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_R^n(0)} \varepsilon^{-n} \, \mathrm{d}|\mu_j| \leq$$

$$\leq C_n R^{-n} \parallel \mu_j \parallel + C_n \varepsilon^{-n} |\mu_j|(R^n - B_R^n(0)),$$

also

$$\lim_{|x|\to\infty} \sup_{t>0} |u_j(x,t+\varepsilon)| = 0. \tag{5.57}$$

Mit Proposition 5.2 gilt

$$\parallel u_j(.,t) \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-n}.$$

Zusammen folgt

$$\lim_{|(x,t)|\to\infty} |F(x,t+\varepsilon)|^q = 0. \tag{5.58}$$

Da $|F|^q$ mit Proposition 5.7 subharmonisch ist, $v_\varepsilon \geq 0$ harmonisch ist und $v_\varepsilon(x,0) \geq |F(x,\varepsilon)|^q$ folgt mit (5.58) zuerst $v_\varepsilon + \delta \geq |F(.,+\varepsilon)|^q \quad \forall \delta > 0$ und mit (5.56) für $\delta \to 0, \varepsilon_m \to 0$

$$v \geq |F|^q \quad \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Mit Satz 5.1 (5.14) erhalten wir

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |F(x,t)| \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |v(x,t)|^p \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Mg|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq C_p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_p \sup_{t>0} \parallel F(.,t) \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

wobei wir (5.55) und Satz 2.5 verwendet haben. Dies ist (5.54), und die Proposition ist bewiesen.

///

Abschluß des Beweises von Satz 5.4:
Aus (5.46) folgt mit Proposition 5.9 sofort die erste Abschätzung in (5.49). Wir setzen $g(x) := \sup_{t>0} \sup_{j=1}^{n+1} |u_j(x,t)|$ und sehen $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wie schon bemerkt, folgt aus (5.46) mit Satz 5.3

$$u_j(.,t) = P_t * \mu_j \tag{5.59}$$

für ein $\mu_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+1}), \mu_{n+1} = \mu$. Mit Satz 5.2 folgt

$$u_j(.,t) \to \mu_j \quad \text{schwach}^* \text{ in } C^0_*(\mathbb{R}^n)^*.$$

Da $|u_j(.,t)| \leq g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, folgt

$$|\mu_j|(U) \leq \int\limits_U g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}.$$

Damit ist μ_j absolutstetig bezüglich $\mathcal{L}^n$, also $\mu_j = f_j\mathcal{L}^n,\ f_j \in L^1(\mathbb{R}^n), f := f_{n+1}$. Dies ergibt $u_j(.,t) = P_t * f_j$ und mit Satz 5.1 (5.16) folgt $u_j(.,t) \to f_j$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ für $t \to 0$. Da die Riesz-Transformation mit Satz 4.3 vom schwachen Typ $(1,1)$ ist, folgt mit (5.41)

$$u_j(.,t) = R_j u(.,t) \to R_j f$$

im Maß, also $R_j f = f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und (5.48) ist vollständig bewiesen.

Schließlich folgt aus (5.59) und Satz 5.2 (5.19) zusammmen mit (5.48)

$$\sup_{t>0} \| u_j(.,t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| \mu_j \| = \| R_j f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

also die zweite Ungleichung in (5.49).

///

Aus Satz 5.4 folgt aus der Beschränktheit der L^1-Normen der $u_j(,.t)$, daß die Maximalfunktion $\sup_{t>0}\sup_j |u_j(.,t)|$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Satz 5.6 *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ für } j = 1,\ldots,n, \tag{5.60}$$

$$\sup_{t>0}\sup_{j=1}^{n} \| Q_t^j * f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty, \tag{5.61}$$

$$\sup_{t>0} |P_t * f| \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{5.62}$$

In diesem Fall gilt

$$\| \sup_{t>0}\sup_{j=1}^{n} |P_t * f, Q_t^j * f| \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \approx \| \sup_{t>0} |P_t * f| \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \approx \tag{5.63}$$

$$\approx \sup_{t>0}\sup_{j=1}^{n} \| P_t * f, Q_t^j * f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \approx \sup_{j=1}^{n} \| f, R_j f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

mit Konstanten, die nur von n abhängen.

Beweis:

Aus Satz 5.4 folgt sofort (5.61) $\Rightarrow$ (5.60). Umgekehrt erhalten wir aus (5.60) mit Satz 4.1 (4.16) für $K = R_j$, daß $\widehat{R_j f} = m_{R_j}\hat{f}$ und wieder folgt mit Satz 5.4

$$\| \sup_{t>0}\sup_{j=1}^{n} |P_t * f, Q_t^j * f| \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \sup_{t>0}\sup_{j=1}^{n} \| P_t * f, Q_t^j * f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq C_n \sup_{j=1}^{n} \| f, R_j f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

also (5.61). Insbesondere folgt (5.62) aus (5.60) bzw. (5.61). Weiter gilt klarerweise

$$\sup_{t>0}\sup_{j=1}^{n} \| P_t * f, Q_t^j * f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| \sup_{t>0}\sup_{j=1}^{n} |P_t * f, Q_t^j * f| \|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

und, da $Q_t^j * f = P_t * R_j f$, folgt aus Satz 5.1 (5.16)

$$\sup_{j=1}^{n} \| f, R_j f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{t>0}\sup_{j=1}^{n} \| P_t * f, Q_t^j * f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Daher verbleibt es zu zeigen, daß

$$\sup_{t>0} \sup_{j=1}^{n} \| Q_t^j * f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \| \sup_{t>0} |P_t * f| \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{5.64}$$

Zum Beweis von (5.64) benötigen wir einige Propositionen.

//

Zuerst führen wir die nicht-tangentialen Maximalfunktionen ein.

Definition 5.2 *Für eine Funktion u auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$ definieren wir die nicht-tangentialen Maximalfunktionen durch*

$$\mathcal{M}_0 u(x) := \sup_{t>0} |u(x,t)|$$

und für $a > 0$

$$\mathcal{M}_a u(x) := \sup_{|y-x|<at} |u(y,t)| = \sup_{\Gamma_a(x)} |u(y,t)| \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\Gamma_a(x)$ der Kegel

$$\Gamma_a(x) := \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid |x-y| < at\}$$

ist.

□

Proposition 5.10 *Für u harmonisch in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ gilt*

$$\| \mathcal{M}_a u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p,a} \| \mathcal{M}_0 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall a \geq 0, 0 < p \leq \infty.$$

Beweis:
Mit lokalen Maximumabschätzungen für elliptische Differentialoperatoren in Nicht-Divergenzform, siehe [GT] Theorem 9.20 oder Satz A.1, erhalten wir

$$|u(y,t)|^q \leq C_{n,q} \fint_{B_t^{n+1}(y,t)} |u|^q \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} \leq$$

$$\leq C_{n,q} \fint_{B_t^n(y)} |\mathcal{M}_0 u|^q \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall q > 0, \ y \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

Für $|x-y| < at$ folgt

$$|u(y,t)|^q \leq C_{n,q,a} \fint_{B_{t(a+1)}^n(x)} |\mathcal{M}_0 u|^q \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

also

$$(\mathcal{M}_a u)(x)^q \leq C_{n,q,a} M((\mathcal{M}_0 u)^q)(x),$$

wobei M die Maximalfunktion in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Für $0 < q = p/2 < p < \infty$ erhalten wir mit Satz 2.5

$$\| \mathcal{M}_a u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,q,a} \Big\| M\Big((\mathcal{M}_0 u)^q \Big) \Big\|^{1/q}_{L^{p/q}(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le C_{n,p,a} \| (\mathcal{M}_0 u)^q \|^{1/q}_{L^{p/q}(\mathbb{R}^n)} = C_{n,p,a} \| \mathcal{M}_0 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Für $p = \infty$ wählen wir $q = 1$ und erhalten mit Satz 2.5

$$\| \mathcal{M}_a u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,a} \| M(\mathcal{M}_0 u) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,a} \| \mathcal{M}_0 u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} .$$

///

Als nächstes führen wir das sogenannte Flächenintegral ein.

Definition 5.3 *Für* $u \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+), a > 0,$ *definieren wir das Flächenintegral von* u *durch*

$$(S_a u)(x) := \Big(\int\limits_{\Gamma_a(x)} t^{1-n} |\nabla u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \Big)^{1/2} .$$

□

Die folgende Proposition stellt einfache Eigenschaften des Flächenintegrals zusammen.

Proposition 5.11 *Für* u *harmonisch in* $\Gamma_b(x), x \in \mathbb{R}^n, 0 < a < b$ *gilt*

$$t^k |D^k u(y,t)| \le C_{n,k,a,b} \mathcal{M}_b u(x) \quad \forall (y,t) \in \Gamma_a(x), k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.65}$$

$$t^k |D^k u(y,t)| \le C_{n,k,a,b} \; S_b u(x) \quad \forall (y,t) \in \Gamma_a(x), k \in \mathbb{N}, \tag{5.66}$$

$$\int\limits_{\Gamma_a(x)} t^{2k-n-1} |D^k u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \le C_{n,k,a,b} \; S_b u(x)^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{5.67}$$

und, falls

$$\begin{gathered} \nabla u(.,t) \to 0 \quad \textit{punktweise in } \mathbb{R}^n \textit{ für } t \to \infty, k = 1, \\ \sup |\nabla u(.,t)| \to 0 \quad \textit{für } t \to \infty, k \ge 2, \end{gathered} \tag{5.68}$$

so gilt

$$\sup_{\omega \in \Gamma_a(0) \cap B_1^{n+1}(0)} \int\limits_0^\infty r |\nabla u(x + r\omega)|^2 \, \mathrm{d}r \le C_{n,k,a,b} \int\limits_{\Gamma_b(x)} t^{2k-n-1} |\partial_t^k u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{5.69}$$

und

$$S_a u(x)^2 \le C_{n,k,a,b} \int\limits_{\Gamma_b(x)} t^{2k-n-1} |\partial_t^k u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.70}$$

Beweis:
Wir wählen $0 < \delta = \delta(a,b) < 1/2$ mit

$$\frac{a+\delta}{1-\delta} < b.$$

Dann gilt für $(y,t) \in \Gamma_a(x), (z,s) \in B_{\delta t}(y,t)$

$$t/2 < (1-\delta)t < s < (1+\delta)t < (3/2)t,$$

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z| < (a+\delta)t \leq \frac{a+\delta}{1-\delta}\, s < bs,$$

also

$$B_{\delta t}(y,t) \subseteq \Gamma_b(x) \cap \{(1-\delta)t < x_{n+1} < (1+\delta)t\}. \tag{5.71}$$

Mit den Cauchy-Ungleichungen gilt

$$t^k |D^k u(y,t)| \leq C_{n,k,\delta} \sup_{B_{\delta t}(y,t)} |u| \leq C_{n,k,a,b} \mathcal{M}_b u(x) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0,$$

also (5.65).

Genauso folgt mit den Cauchy-Ungleichungen und dem Mittelwertsatz

$$t^{k-1}|D^k u(y,t)| \leq C_{n,k,\delta} \sup_{B_{\delta t/2}(y,t)} |\nabla u| \leq C_{n,k,a,b} \fint_{B_{\delta t}(y,t)} |\nabla u| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} \leq \tag{5.72}$$

$$\leq C_{n,k,a,b} \Bigg(t^{-2} \int\limits_{B_{\delta t}(y,t)} s^{1-n} |\nabla u(z,s)|^2 \, \mathrm{d}(z,s) \Bigg)^{1/2} \leq C_{n,k,a,b} t^{-1} S_b u(x) \quad \text{für } k \in \mathbb{N},$$

also (5.66).

Andererseits folgt mit (5.72)

$$\int\limits_{\Gamma_a(x)} t^{2k-n-1} |D^k u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \leq C_{n,k,a,b} \int\limits_{\Gamma_a(x)} \int\limits_{B_{\delta t}(y,t)} s^{-2n} |\nabla u(z,s)|^2 \, \mathrm{d}(z,s) \, \mathrm{d}(y,t) \leq$$

$$\leq C_{n,k,a,b} \int\limits_{\Gamma_b(x)} \int\limits_{B_{2\delta s}(z,s) \cap \Gamma_a(x)} s^{-2n} |\nabla u(z,s)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \, \mathrm{d}(z,s) \leq$$

$$\leq C_{n,k,a,b} \int\limits_{\Gamma_b(x)} s^{1-n} |\nabla u(z,s)|^2 \, \mathrm{d}(z,s) = C_{n,k,a,b}\, S_b u(x)^2,$$

also (5.67).

Zum Beweis von (5.69) nehmen wir $x = 0$ an. Aus (5.68) folgt mit (5.72)

$$\lim_{t \to \infty} t^{j-1} D^j u(y,t) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, k.$$

Partielle Integration ergibt

$$\nabla u(y,s) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int\limits_s^\sigma (t-s)^{k-1}\, \nabla \partial_t^k u(y,t) \, \mathrm{d}t \quad \forall (y,s) \in \Gamma_a(0). \tag{5.73}$$

Mit den Cauchy-Ungleichungen und dem Mittelwertsatz erhalten wir wie in (5.72)

$$|\nabla \partial_t^k u(y,t)| \le C_{n,k,\delta} \Big(t^{-3-n} \int\limits_{B_{\delta t}(y,t)} |\partial_t^k u|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} \Big)^{1/2}.$$

Setzen wir

$$M_t := \Gamma_b(0) \cap \{(1-\delta)t < x_{n+1} < (1+\delta)t\}, \tag{5.74}$$

so ergibt sich mit (5.71)

$$|\nabla \partial_t^k u(y,t)| \le C_{n,k,a,b} \, t^{-(n+3)/2} \Big(\int\limits_{M_t} |\partial_t^k u|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n+1} \Big)^{1/2} =$$

$$=: C_{n,k,a,b} \, t^{-(n+3)/2} I_t^{1/2} \quad \forall (y,t) \in \Gamma_a(0). \tag{5.75}$$

Für $\omega \in \Gamma_a(0) \cap \partial B_1^{n+1}(0), r > 0$ folgt $(y,s) := r\omega \in \Gamma_a(0)$,

$$(1+a^2)^{-1/2} r \le s = r\omega e_{n+1} \le r,$$

und mit (5.73) und (5.75)

$$|\nabla u(r\omega)| \le C_{n,k,a,b} \int\limits_{(1+a^2)^{-1/2}r}^{\infty} t^{k-(n+5)/2} I_t^{1/2} \, \mathrm{d}t \quad \forall \omega \in \Gamma_a(0) \cap \partial B_1^{n+1}(0), r > 0.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$r |\nabla u(r\omega)|^2 \le C_{n,k,a,b} \, r \int\limits_{(1+a^2)^{-1/2}r}^{\infty} t^{2k-n-3} I_t \, \mathrm{d}t \int\limits_{(1+a^2)^{-1/2}r}^{\infty} t^{-2} \, \mathrm{d}t \le$$

$$\le C_{n,k,a,b} \int\limits_{(1+a^2)^{-1/2}r}^{\infty} t^{2k-n-3} I_t \, \mathrm{d}t \quad \forall \omega \in \Gamma_a(0) \cap \partial B_1^{n+1}(0), r > 0.$$

Dies ergibt

$$\int\limits_0^\infty r |\nabla u(r\omega)|^2 \, \mathrm{d}r \le C_{n,k,a,b} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{(1+a^2)^{1/2}t} t^{2k-n-3} I_t \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t \le \tag{5.76}$$

$$\le C_{n,k,a,b} \int\limits_0^\infty t^{2k-n-2} I_t \, \mathrm{d}t \quad \forall \omega \in \Gamma_a(0) \cap \partial B_1^{n+1}(0).$$

Für die rechte Seite erhalten wir mit (5.74) und (5.75)

$$\int\limits_0^\infty t^{2k-n-2} I_t \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\max(|y|/b,(1-\delta)t)}^{(1+\delta)t} t^{2k-n-2} |\partial_{n+1}^k u(y,s)|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\Gamma_b(0)} \int_{(1+\delta)^{-1}s}^{(1-\delta)^{-1}s} t^{2k-n-2} |\partial_{n+1}^k u(y,s)|^2 \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}(y,s) \leq$$

$$\leq C_{k,n,\delta} \int_{\Gamma_b(0)} s^{2k-n-1} |\partial_{n+1}^k u(y,s)|^2 \ \mathrm{d}(y,s),$$

und (5.69) folgt mit (5.76).

Integrieren wir die linke Seite von (5.76) über $\Gamma_a(0) \cap \partial B_1^{n+1}(0)$, so ergibt sich

$$\int_{\Gamma_a(0) \cap \partial B_1^{n+1}(0)} \int_0^\infty r |\nabla u(r\omega)|^2 \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}area_{\partial B_1^{n+1}(0)}(\omega) = \int_{\Gamma_a(0)} |(y,t)|^{1-n} \ |\nabla u(y,t)|^2 \ \mathrm{d}(y,t) \geq$$

$$\geq c_0(n,a) \int_{\Gamma_a(0)} t^{1-n} |\nabla u(y,t)|^2 \ \mathrm{d}(y,t) = c_0(n,a) S_a u(0)^2,$$

da

$$|(y,t)| \leq (1+a^2)^{1/2} t \quad \forall (y,t) \in \Gamma_a(0).$$

Damit folgt (5.70) aus (5.69).

///

Proposition 5.12 *Für* u *harmonisch in* $\Gamma_a(x), x \in \mathbb{R}^n, 0 < a, u_\varepsilon(y,t) := u(y, t+\varepsilon)$ *gilt*

$$S_a u(x) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} S_a u_\varepsilon(x) \tag{5.77}$$

und

$$S_a u_\varepsilon(x) \leq C_{n,a} S_a u(x). \tag{5.78}$$

Beweis:

Mit der Definition 5.3 von $S_a u(x)$ sehen wir mit dem Lemma von Fatou

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} S_a u_\varepsilon(x)^2 \geq \int_{|y-x|<at} \liminf_{\varepsilon \to 0} t^{1-n} |\nabla u(y, t+\varepsilon)|^2 \ \mathrm{d}(y,t) =$$

$$= \int_{|y-x|<at} t^{1-n} |\nabla u(y,t)|^2 \ \mathrm{d}(y,t) = S_a u(x)^2,$$

also (5.77).

Umgekehrt rechnen wir

$$S_a u_\varepsilon(x)^2 = \int_{|y-x|<at} t^{1-n} |\nabla u(y,t+\varepsilon)|^2 \ \mathrm{d}(y,t) =$$

$$= \int_{|y-x|<at, t \geq \varepsilon} t^{1-n} |\nabla u(y,t+\varepsilon)|^2 \ \mathrm{d}(y,t) + \int_{|y-x|<at, t<\varepsilon} t^{1-n} |\nabla u(y,t+\varepsilon)|^2 \ \mathrm{d}(y,t).$$

Für $|y-x| < at, t < \varepsilon$ sehen wir $|y-x| < (a/2)(t+\varepsilon)$, also $(y, t+\varepsilon) \in \Gamma_{a/2}(x)$ und mit (5.66) erhalten wir

$$|\nabla u(y, t+\varepsilon)| \leq C_{n,a} S_a u(x)/(t+\varepsilon) \leq C_{n,a} S_a u(x)/\varepsilon \quad \text{für } |y-x| < at, t < \varepsilon.$$

Dies ergibt

$$S_a u_\varepsilon(x)^2 \leq$$

$$\leq 2^{n-1} \int\limits_{|y-x|<at} (t+\varepsilon)^{1-n} |\nabla u(y, t+\varepsilon)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) + \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{B_{at}(x)} t^{1-n} C_{n,a} S_a u(x)^2 \varepsilon^{-2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq 2^{n-1} S_a u(x)^2 + C_{n,a} S_a u(x)^2 \varepsilon^{-2} \int\limits_0^\varepsilon t \, \mathrm{d}t \leq C_{n,a} S_a u(x)^2,$$

also (5.78), und die Proposition ist bewiesen.

///

Für harmonische Funktionen sind die Integrale der $p-$ten Potenz der Maximalfunktionen und des Flächenintegrals vergleichbar.

Proposition 5.13 *Für u harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1}_+, 0 < p < 2, a > 0$, gilt*

$$\mathcal{M}_0 u \in L^p(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \begin{cases} S_a u \in L^p(\mathbb{R}^n), \\ u(0,t) \to 0 \quad \textit{für } t \to \infty, \end{cases} \tag{5.79}$$

und in diesem Fall gilt weiter

$$\| \mathcal{M}_0 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \| S_a u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{5.80}$$

mit Konstanten, die nur von n, p, a abhängen.

Bemerkung:

Die Proposition gilt für $0 < p < \infty$; wir benötigen sie aber nur für $p = 1$.

□

Beweis:

Zuerst betrachten wir $u \in C^\infty_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}), \lambda \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \delta > 0$ mit

$$|D^k u(x,t)| \leq C_k(u)(1+t)^{-n/2-k-\delta} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.81}$$

$$|D^k u(x,t)| \leq C_k(u)(1+t)^{-k} \lambda(x) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.82}$$

$$\lim_{|(x,t)| \to \infty} |u(x,t)| = 0. \tag{5.83}$$

(5.82) ergibt $\mathcal{M}_0 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, also $\mathcal{M}_a u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $a > 0$ mit Proposition 5.10. (5.81) und (5.83) ergeben

$$\lim_{|x| \to \infty} \mathcal{M}_a u(x) = 0 \quad \forall a > 0. \tag{5.84}$$

Für $0 < \alpha < \infty$ betrachten wir $A := [\mathcal{M}_{2a}u \leq \alpha] \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $U := \mathbb{R}^n - A$ offen mit $\mathcal{L}^n(U) < \infty$ und $\Omega := \cup_{x \in A}\Gamma_a(x)$. Wir rechnen

$$\int\limits_A |S_a u|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_A \int\limits_{\Gamma_a(x)} t^{1-n}|\nabla u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_\Omega t^{1-n}|\nabla u(y,t)|^2 \mathcal{L}^n(A \cap B_{at}(y)) \, \mathrm{d}(y,t) \leq C_{n,a} \int\limits_\Omega t|\nabla u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t). \tag{5.85}$$

Setzen wir $\varphi(y) := a^{-1}d(y,A)$, so sehen wir $Lip\ \varphi \leq a^{-1}$ und

$$\Omega = \cup_{x \in A}\Gamma_a(x) = \{(y,t) \mid t > \varphi(y)\}.$$

Da u harmonisch ist, gilt $\Delta(|u|^2) = 2|\nabla u|^2$ und

$$\int\limits_\Omega t|\nabla u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\varphi(y)}^{\infty} t\Delta(|u|^2)(y,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}y$$

Dabei beachten wir für $0 \leq \sigma \leq 1$ mit (5.81) und (5.82)

$$t|\nabla u(y,t)|^2 + t|D^2(|u|^2)(y,t)| \leq C\Big(t|\nabla u(y,t)|^2 + t|u(y,t)||D^2u(y,t)|\Big) \leq$$

$$\leq C(u)t(1+t)^{-2-(1-\sigma)(n/2+\delta)}\lambda(y)^{1+\sigma}, \tag{5.86}$$

also für $p \leq 1 + \sigma < 2$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^\infty \Big(t|\nabla u(y,t)|^2 + t|D^2(|u|^2)(y,t)|\Big) \, \mathrm{d}t < \infty,$$

und alle auftretenden Integrale sind integrierbar. Weiter sehen wir mit (5.81)

$$\begin{gathered}
\Big|t\partial_i|u|^2(y,t)\Big| \leq C(u)(1+t)^{-n-2\delta}, \\
\Big|\partial_i\Big(t\partial_i|u|^2(y,t)\Big)\Big| \leq C(u)(1+t)^{-n-2\delta-1}, \\
|t\partial_t|u|^2(y,t)| + |u(y,t)|^2 \leq C(u)(1+t)^{-n-2\delta} \to 0 \quad \text{für } t \to \infty.
\end{gathered}$$

Daher können wir unter dem Integral differenzieren und erhalten

$$\int\limits_{\varphi(y)}^{\infty} t\Delta(|u|^2)(y,t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{i=1}^n \Bigg(\partial_i\Big(\int\limits_{\varphi(y)}^{\infty} t\partial_i|u|^2(y,t) \, \mathrm{d}t\Big) + \varphi(y)\partial_i|u|^2(y,\varphi(y))\partial_i\varphi(y)\Bigg) +$$

$$+ [t\partial_t|u|^2(y,t)]_{\varphi(y)}^{\infty} - \int\limits_{\varphi(y)}^{\infty} \partial_t|u|^2(y,t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\partial_i \Big(\int\limits_{\varphi(y)}^{\infty} t \partial_i |u|^2(y,t) \ \mathrm{d}t \Big) + \varphi(y) \partial_i |u|^2(y, \varphi(y)) \partial_i \varphi(y) \Big) +$$

$$+ |u(y, \varphi(y))|^2 - \varphi(y) \partial_t |u|^2(y, \varphi(y)).$$

Da mit (5.82)

$$\Big| \varphi(y) \partial_i \varphi(y) \partial_i |u|^2(y, \varphi(y)) \Big| + |u(y, \varphi(y)|^2 + \Big| \varphi(y) \partial_t |u|^2(y, \varphi(y)) \Big| \leq C_{n,a}(u) \lambda(y)^2,$$

sehen wir, daß die Summanden des zweiten Terms und die letzten beiden Terme über $y \in \mathbb{R}^n$ integrierbar sind. Mit den Summanden des zweiten Terms und (5.86) sind auch die Summanden des ersten Terms über $y \in \mathbb{R}^n$ integrierbar.

Mit (5.81) und (5.84) gilt für

$$0 < \sigma < 1 < (1 + \sigma)(n/2 + \delta),$$

daß

$$\int\limits_{0}^{\infty} \Big| t \partial_i |u|^2(y,t) \Big| \ \mathrm{d}t \leq \int\limits_{0}^{\infty} C(u)(1+t)^{-(1+\sigma)(n/2+\delta)} \ \mathrm{d}t \ \mathcal{M}_0 u(y)^{1-\sigma} \to 0 \quad \text{für } y \to \infty,$$

und wir sehen

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_i \Big(\int\limits_{\varphi(y)}^{\infty} t \partial_i |u|^2(y,t) \ \mathrm{d}t \Big) \ \mathrm{d}y = 0.$$

Zusammen erhalten wir

$$2 \int\limits_{\Omega} t |\nabla u(y,t)|^2 \ \mathrm{d}(y,t) = 2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\varphi(y)}^{\infty} t |\nabla u(y,t)|^2 \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|u(y, \varphi(y)|^2 + \varphi(y) \partial_i \varphi(y) \partial_i |u|^2(y, \varphi(y)) - \varphi(y) \partial_t |u|^2(y, \varphi(y)) \Big) \ \mathrm{d}y. \tag{5.87}$$

Für $y \in [\mathcal{M}_{2a} u > \alpha] = U$ existiert ein $x \in A$ mit

$$0 < |x - y| = d(y, A) = a \varphi(y).$$

Daraus folgt $(y, \varphi(y)) \in \overline{\Gamma_a(x)}$ und mit (5.65), dass

$$\Big| |u(y, \varphi(y)|^2 + \varphi(y) \partial_i \varphi(y) \partial_i |u|^2(y, \varphi(y)) - \varphi(y) \partial_t |u|^2(y, \varphi(y)) \Big| \leq$$

$$\leq C_{n,a} \mathcal{M}_{2a} u(x)^2 \leq C_{n,a} \alpha^2, \tag{5.88}$$

da $A = [\mathcal{M}_{2a} u \leq \alpha]$. Da offensichtlich $(y, \varphi(y)) \in \Gamma_a(y)$, gilt mit (5.65) genauso

$$\Big| |u(y, \varphi(y)|^2 + \varphi(y) \partial_i \varphi(y) \partial_i |u|^2(y, \varphi(y)) - \varphi(y) \partial_t |u|^2(y, \varphi(y)) \Big| \leq C_{n,a} \mathcal{M}_{2a} u(y)^2.$$

Zusammen mit (5.85) und (5.87) ergibt dies

$$\int_{[\mathcal{M}_{2a}u\le\alpha]} |S_a u|^2 \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \le C_{n,a} \int_{[\mathcal{M}_{2a}u\le\alpha]} |\mathcal{M}_{2a}u|^2 \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n + C_{n,a}\alpha^2\mathcal{L}^n(\mathcal{M}_{2a}u > \alpha)$$

und

$$\mathcal{L}^n(S_a u > \alpha) \le \alpha^{-2} \int_{[\mathcal{M}_{2a}u\le\alpha]} |S_a u|^2 \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n + \mathcal{L}^n(\mathcal{M}_{2a}u > \alpha) \le$$

$$\le C_{n,a}\alpha^{-2} \int_{[\mathcal{M}_{2a}u\le\alpha]} |\mathcal{M}_{2a}u|^2 \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n + C_{n,a}\mathcal{L}^n(\mathcal{M}_{2a}u > \alpha).$$

Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S_a u|^p \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = p \int_0^\infty \alpha^{p-1}\mathcal{L}^n(S_a u > \alpha) \ \mathrm{d}\alpha \le$$

$$\le C_{n,a}p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathcal{M}_{2a}u}^\infty \alpha^{p-3} \ \mathrm{d}\alpha \ |\mathcal{M}_{2a}u|^2 \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n + C_{n,a} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{2a}u|^p \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \le C_{n,p,a} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{2a}u|^p \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

da $p < 2$, und mit Proposition 5.10

$$\| S_a u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,p,a} \| \mathcal{M}_0 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \tag{5.89}$$

Nun betrachten wir $A := [S_{2a}u \le \alpha] \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $U := \mathbb{R}^n - A$ offen mit $\mathcal{L}^n(U) < \infty$, da $S_{2a}u$ mit dem Lemma von Fatou unterhalbstetig ist und $\mathcal{M}_0 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit (5.82), also $S_{2a}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit (5.89). Wie in (5.85) rechnen wir

$$\int_A |S_a u|^2 \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_A \int_{\Gamma_a(x)} t^{1-n}|\nabla u(y,t)|^2 \ \mathrm{d}(y,t) \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega t^{1-n}|\nabla u(y,t)|^2\mathcal{L}^n(A\cap B_{at}(y)) \ \mathrm{d}(y,t). \tag{5.90}$$

Weiter betrachen wir die Menge mit nach unten beschränkten Dichtequotienten, genauer

$$A_0 := \{ \ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varrho > 0 : \mathcal{L}^n(A \cap B_\varrho(x)) \ge \frac{1}{2}\mathcal{L}^n(B_\varrho(x)) \ \}.$$

A_0 ist abgeschlossen, und weiter ist $A_0 \subseteq A$, da A abgeschlossen ist. Damit ist $U_0 := \mathbb{R}^n - A_0 \supseteq U$ offen und weiter $U_0 = [M\chi_U > 1/2]$, also mit Proposition 2.5

$$\mathcal{L}^n(U_0) = \mathcal{L}^n(M\chi_U > 1/2) \le C_n \| \chi_U \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = C_n\mathcal{L}^n(S_{2a}u > \alpha) < \infty. \tag{5.91}$$

Wie oben sei $\varphi(y) := a^{-1}d(y, A_0)$ mit $Lip\ \varphi \le a^{-1}$ und

$$\Omega_0 = \cup_{x\in A_0}\Gamma_a(x) = \{(y,t) \mid t > \varphi(y)\}.$$

Wie in (5.85) erhalten wir mit (5.90), dass

$$\int_A |S_a u|^2 \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \ge c_{0,n,a} \int_{\Omega_0} t|\nabla u(y,t)|^2 \ \mathrm{d}(y,t)$$

mit $c_{0,n,a} > 0$, und wie in (5.87), dass

$$C_{n,a} \int\limits_A |S_{2a}u|^2 \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \geq$$

$$\geq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|u(y,\varphi(y)|^2 + \varphi(y)\partial_i\varphi(y)\partial_i|u|^2(y,\varphi(y)) - \varphi(y)\partial_t|u|^2(y,\varphi(y)) \Big) \; \mathrm{d}y. \tag{5.92}$$

Der erste Term ist nicht-negativ. Für den zweiten und dritten Term folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big| \varphi(y)\partial_i\varphi(y)\partial_i|u|^2(y,\varphi(y)) - \varphi(y)\partial_t|u|^2(y,\varphi(y)) \Big| \; \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(y,\varphi(y)|^2 \; \mathrm{d}y + C_{n,a} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big|\varphi(y)\nabla\varphi(y)|^2 \; \mathrm{d}y, \tag{5.93}$$

da φ lipschitz ist.

Wie in (5.88) existiert für $y \in U_0$ ein $x \in A_0$ mit

$$0 < |x-y| = d(y, A_0) = a\varphi(y).$$

Daraus folgt $(y,\varphi(y)) \in \overline{\Gamma_a(x)}$ und mit (5.66), dass

$$|\varphi(y)\nabla u(y,\varphi(y))| \leq C_{n,a}S_{2a}u(x) \leq C_{n,a}\alpha,$$

da $A_0 \subseteq A = [S_{2a}u \leq \alpha]$. Da offensichtlich $(y,\varphi(y)) \in \Gamma_a(y)$, gilt mit (5.66) genauso

$$|\varphi(y)\nabla u(y,\varphi(y))| \leq C_{n,a}S_{2a}u(y).$$

Zusammen mit (5.92), (5.93), (5.91) und $A_0 \subseteq A$ ergibt dies

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(y,\varphi(y)|^2 \; \mathrm{d}y \leq C_{n,a} \int\limits_A |S_{2a}u|^2 \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n + C_{n,a}\alpha^2\mathcal{L}^n(U_0) \leq$$

$$\leq C_{n,a} \int\limits_A |S_{2a}u|^2 \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n + C_{n,a}\alpha^2\mathcal{L}^n(S_{2a} > \alpha) \quad \forall \alpha > 0.$$

Setzen wir

$$g(y) := |u(y,\varphi(y))| + \alpha\chi_{U_0}(y), g_0(y) := |u(y,\varphi(y))|,$$

so sehen wir, da $A = [S_{2a}u \leq \alpha]$,

$$\| \, g \, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \, \| \, y \mapsto u(y,\varphi(y)) \, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\alpha^2\mathcal{L}^n(U_0) \leq$$

$$\leq C_{n,a} \int\limits_{[S_{2a}u \leq \alpha]} |S_{2a}u|^2 \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n + C_{n,a}\alpha^2\mathcal{L}^n(S_{2a}u > \alpha). \tag{5.94}$$

Weiter setzen wir $v(.,t) := P_t * g, v_0(.,t) = P_t * g_0$ und sehen $v_0 \in C^0_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$.

Für $y \in A_0$ gilt $\varphi(y) = 0$ und

$$\liminf_{(z,s)\to(y,\varphi(y))} v(z,s) \geq \lim_{(z,s)\to(y,\varphi(y))} v_0(z,s) = v_0(y,\varphi(y)) = |u(y,\varphi(y))| \quad \forall y \in A_0. \tag{5.95}$$

Wie oben existiert für $y \in U_0$ ein $x \in A_0$ mit

$$0 < |x-y| = d(y,A_0) = a\varphi(y),$$

insbesondere $(y,\varphi(y)) \in \overline{\Gamma_a(x)}$. Wie in (5.71) sehen wir für $0 < \delta = \delta(a) < 1/2$ mit $(a+\delta)/(1-\delta) < 2a$, dass

$$B_{\delta\varphi(y)}(y,\varphi(y)) \subseteq \Gamma_{2a}(x) \cap \{(1-\delta)\varphi(y) < x_{n+1} < (1+\delta)\varphi(y)\}. \tag{5.96}$$

Mit (5.66) folgt

$$|\varphi(y)\nabla u(z,s)| \leq 2|s\nabla u(z,s)| \leq C_{n,a} S_{2a}u(x) \leq C_{n,a}\alpha \quad \forall (z,s) \in B_{\delta\varphi(y)}(y,\varphi(y)),$$

da $A_0 \subseteq A = [S_{2a}u \leq \alpha]$, und mit dem Mittelwertsatz

$$|u(y,\varphi(y)) - u(z,s)| \leq C_{n,a}\alpha \quad \forall (z,s) \in B_{\delta\varphi(y)}(y,\varphi(y)).$$

Nun sehen wir für $z \in B_{\tau\varphi(y)}(y), \tau > 0$, dass

$$|(y,\varphi(y)) - (z,\varphi(z))| \leq (1+a^{-1})|y-z| \leq \tau(1+a^{-1})\varphi(y),$$

also $(z,\varphi(z)) \in B_{\delta\varphi(y)}(y,\varphi(y))$ für $\tau = \tau(a) < (1+a^{-1})^{-1}\delta(a)$, und

$$|u(y,\varphi(y)) - u(z,\varphi(z))| \leq C_{n,a}\alpha \quad \forall z \in B_{\tau\varphi(y)}(y).$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} |u(y,\varphi(y))| &\leq \fint_{B_{\tau\varphi(y)}(y)} |u(z,\varphi(z))| \,\mathrm{d}z + C_{n,a}\alpha \leq \\ &\leq C_{n,a}\varphi(y)^{-n} \int_{B_{\tau\varphi(y)}(y)} |u(z,\varphi(z))| \,\mathrm{d}z + C_{n,a}\alpha \quad \forall y \in U_0. \end{aligned} \tag{5.97}$$

Für $y \in U_0$ gilt $d(y,A_0) = a\varphi(y) > 0$, also $B_{a\varphi(y)}(y) \subseteq U_0$ und

$$P_{\varphi(y)}(y-z) = \frac{1}{\pi\omega_{n-1}} \frac{\varphi(y)}{|(y-z,\varphi(y))|^{n+1}} \geq c_{0,n,a}\varphi(y)^{-n} \quad \forall z \in B_{a\varphi(y)}(y) \cup B_{\tau\varphi(y)}(y)$$

mit (5.4) und $c_{0,n,a} > 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} v(y,\varphi(y)) &\geq \int_{B_{\tau\varphi(y)}(y)} P_{\varphi(y)}(y-z)|u(z,\varphi(z))| \,\mathrm{d}z + \alpha \int_{B_{a\varphi(y)}(y)} P_{\varphi(y)}(y-z) \,\mathrm{d}z \geq \\ &\geq c_{0,n,a}\varphi(y)^{-n} \int_{B_{\tau\varphi(y)}(y)} |u(z,\varphi(z))| \,\mathrm{d}z + c_{0,n,a}\alpha\varphi(y)^{-n}\mathcal{L}^n(B_{a\varphi(y)}(y)) \geq \end{aligned}$$

$$\geq c_{0,n,a}\varphi(y)^{-n} \int\limits_{B_{\tau\varphi(y)}(y)} |u(z,\varphi(z))| \,\mathrm{d}z + c_{0,n,a}\alpha \quad \forall y \in U_0.$$

Mit (5.95) und (5.97) ergibt sich

$$|u(y,\varphi(y))| \leq C_{n,a} \liminf_{(z,s)\to(y,\varphi(y))} v(z,s) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Da $v \geq 0$, folgt mit (5.83) mit dem Maximumprinzip wie in Proposition 5.9

$$|u| \leq C_{n,a} v \quad \text{in } \Omega_0.$$

Da $\varphi = 0$ in A_0 , gilt $\mathcal{M}_0 u \leq C_{n,a}\mathcal{M}_0 v$ in A_0 , und mit (5.14) und Satz 2.5 folgt

$$\Big(\int\limits_{A_0} |\mathcal{M}_0 u|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n\Big)^{1/2} \leq C_{n,a} \parallel \mathcal{M}_0 v \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,a} \parallel Mg \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,a} \parallel g \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Zusammen mit (5.94) ergibt dies

$$\int\limits_{A_0} |\mathcal{M}_0 u|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_{n,a} \int\limits_{[S_{2a}u\leq\alpha]} |S_{2a}u|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n + C_{n,a}\alpha^2 \mathcal{L}^n(S_{2a}u > \alpha)$$

und mit (5.91), dass

$$\mathcal{L}^n(\mathcal{M}_0 u > \alpha) \leq \alpha^{-2} \int\limits_{A_0} |\mathcal{M}_0 u|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n + \mathcal{L}^n(U_0) \leq$$

$$\leq C_{n,a}\alpha^{-2} \int\limits_{[S_{2a}u\leq\alpha]} |S_{2a}u|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n + C_{n,a}\mathcal{L}^n(S_{2a}u > \alpha).$$

Daraus folgt wie oben

$$\parallel \mathcal{M}_0 u \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p,a} \parallel S_{2a}u \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \tag{5.98}$$

Für allgemeines u setzen wir $u_\varepsilon := u(.,.+\varepsilon) \in C^\infty_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Zuerst sei $\mathcal{M}_0 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Mit lokalen Maximumabschätzungen für elliptische Differentialoperatoren in Nicht-Divergenzform, siehe [GT] Theorem 9.20 oder Satz A.1, sehen wir wie in Proposition 5.2

$$\parallel u(.,t) \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} t^{-n/p} \parallel \mathcal{M}_0 u \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.99}$$

insbesondere $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ und $u(0,t) \to 0$ für $t \to \infty$. Da $0 < p < 2$, folgt (5.81) für u_ε mit den Cauchy-Abschätzungen. Mit (5.65) folgt

$$(1+t)^k |D^k u_\varepsilon(x,t)| \leq C_{k,\varepsilon}(\varepsilon/2+t)^k |D^k u_{\varepsilon/2}(x,\varepsilon/2+t)| \leq C_{n,k,a,\varepsilon}\mathcal{M}_a u_{\varepsilon/2}(x)$$

für $a > 0$, also (5.82) für u_ε mit $\lambda := \mathcal{M}_a u_{\varepsilon/2} \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Proposition 5.10. Mit Proposition 5.3 gilt $u_\varepsilon(.,t) = u_{\varepsilon/2}(.,t+\varepsilon/2) = P_{t+\varepsilon/2} * u_{\varepsilon/2}(.,0)$, also

$$|u_\varepsilon| \leq \tau + \tau^{-1} P_{t+\varepsilon/2} * |u_{\varepsilon/2}(.,0)|^2.$$

Da $|u_{\varepsilon/2}(.,0)|^2 \leq \mathcal{M}_0 u^2_{\varepsilon/2} \in L^{p/2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$, folgt

$$\limsup_{|x|\to\infty} \sup_{t>0} |u_\varepsilon(x,t)| \leq \tau \quad \forall \tau > 0$$

wie in (5.57). Zusammen mit (5.99) folgt (5.83). Aus (5.89) und (5.98) folgt damit

$$\| S_a u_\varepsilon \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p,a} \| \mathcal{M}_0 u_\varepsilon \|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\| \mathcal{M}_0 u_\varepsilon \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p,a} \| S_a u_\varepsilon \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Mit Proposition 5.12 und, da klarerweise gilt $\mathcal{M}_0 u_\varepsilon \nearrow \mathcal{M}_0 u$, folgt nun (5.80) mit dem Lemma von Fatou und dem Satz von Beppo-Levi. Damit ist die Proposition ist bewiesen, falls $\mathcal{M}_0 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Nun gelte umgekehrt $S_a u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $u(0,t) \to 0$ für $t \to \infty$. Insbesondere existiert mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $S_a u(x_0) < \infty$. Dann folgt aus Proposition 5.11 (5.66)

$$Du(.,t) \to 0 \quad \text{gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R}^n, t \to \infty, \tag{5.100}$$

insbesondere

$$u(.,t) \to 0 \quad \text{gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R}^n, t \to \infty, \tag{5.101}$$

da $u(0,t) \to 0$. Für $0 < \varepsilon < R < \infty$ setzen wir $u_{\varepsilon,R} := u_\varepsilon - u_R$ und erhalten mit Proposition 5.11 (5.69) für $\omega = e_{n+1}, k = 1$, da (5.68) für u und $k = 1$ aus (5.100) folgt,

$$|u_{\varepsilon,R}(x,t)| \leq \int_{t+\varepsilon}^{t+R} |\partial_{n+1} u(x,s)| \, \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty s|\partial_{n+1} u(x,s)|^2 \, \mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_\varepsilon^R s^{-1} \, \mathrm{d}s \right)^{1/2} \leq C_{n,a,\varepsilon,R} \, S_a u(x).$$

Da $S_a u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, folgt $\mathcal{M}_0 u_{\varepsilon,R} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und aus dem eben Bewiesenen und (5.78)

$$\| \mathcal{M}_0 u_{\varepsilon,R} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p,a} \| S_a u_{\varepsilon,R} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq C_{n,p,a} \Big(\| S_a u_\varepsilon \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \| S_a u_R \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big) \leq C_{n,p,a} \| S_a u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Aus (5.101) folgt für Teilfolgen $\varepsilon_j \to 0, R_j \to \infty$, daß $u_{\varepsilon_j,R_j} \to u$ punktweise auf $\mathbb{R}^{n+1}_+$ und

$$\mathcal{M}_0 u \leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{M}_0 u_{\varepsilon_j,R_j}.$$

Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\| \mathcal{M}_0 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j\to\infty} \| \mathcal{M}_0 u_{\varepsilon_j,R_j} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p,a} \| S_a u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

und die Proposition ist vollständig bewiesen.

///

Abschluß des Beweises von Satz 5.6:
Wir müssen (5.64), d.h.

$$\sup_{t>0} \sup_{j=1}^{n} \| Q_t^j * f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \| \sup_{t>0} |P_t * f| \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für } f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

verifizieren.

Mit den Sätzen 5.1 und Satz 5.4 sind $u(.,t) := u_{n+1}(.,t) := P_t * f, u_j := Q_t^j * f$ harmonisch auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$ und lösen die verallgemeinerten Cauchy-Riemann Gleichungen (5.39), insbesondere gilt

$$\partial_{n+1} u_j = \partial_j u \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^{n+1}, j = 1, \ldots, n. \tag{5.102}$$

Mit $|P_t|, |Q_t^j| \leq C_n t^{-n}$ aus Proposition 5.1, Definition 5.1 und mit den Cauchy-Abschätzungen erhalten wir

$$|u_j(y,t)|, t|\nabla u_j(y,t)| \leq C_n \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-n} \quad \forall (y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}. \tag{5.103}$$

Daraus folgt mit Proposition 5.11 (5.70) und (5.102)

$$S_1 u_j(x)^2 \leq C_n \int\limits_{\Gamma_2(x)} t^{1-n} |\partial_t u_j(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) =$$

$$= C_n \int\limits_{\Gamma_2(x)} t^{1-n} |\partial_j u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \leq C_n S_2 u(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und mit Proposition 5.13

$$\| \mathcal{M}_0 u_j \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \| S_1 u_j \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \| S_2 u \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \| \mathcal{M}_0 u \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Dies ergibt (5.64), und der Satz ist vollständig bewiesen.

///

Folgende Paarung werden wir im Beweis der $\mathcal{H}^1 - \mathrm{BMO}-$Dualität verwenden. Wir beginnen mit einer Definition.

Definition 5.4 *Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir das Zelt über U durch*

$$T(U) := \mathbb{R}_+^{n+1} - \cup_{x \in \mathbb{R}^n - U} \Gamma_1(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \mathrm{d}(y, \mathbb{R}^n - U) \geq t\}.$$

Für ein endliches Borel-Maß $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ definieren wir die Carleson Funktion $\mathcal{C}\mu$

$$(\mathcal{C}\mu)(x) := \sup_{\varrho > 0} \frac{|\mu|(T(B_\varrho^n(x)))}{\omega_n \varrho^n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

μ heißt Carleson-Maß, falls $\mathcal{C}\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, und

$$\| \mu \|_{\mathcal{C}} := \| \mathcal{C}\mu \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

heißt die Carleson-Norm von μ.

$\square$

Bemerkungen:

1. Das Zelt eines Balles $B_\varrho(x)$ ist gegeben durch

$$T(B^n_\varrho(x)) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y-x| \le \varrho - t\} \subseteq B^n_\varrho(x) \times]0,\varrho].$$

2. Ist $B^n_{2\varrho}(x) \subseteq U$, so ist

$$B^n_\varrho(x) \times]0,\varrho[\subseteq T(U).$$

3. Die Carleson-Funktion kann auch mit Zylindern definiert werden

$$(\mathcal{C}^*\mu)(x) := \sup_{\varrho>0} \frac{|\mu|(B^n_\varrho(x) \times]0,\varrho[)}{\omega_n \varrho^n}.$$

   Klarerweise gilt

$$\mathcal{C}\mu \le \mathcal{C}^*\mu \le 2^n \mathcal{C}\mu.$$

4. Die Carleson-Funktion ist unterhalbstetig, insbesondere borelmessbar.

$\square$

Proposition 5.14 *Für* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen gilt*

$$|\mu|(T(U)) \le C_n \int_U \mathcal{C}\mu \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Beweis:
Für $U \neq \mathbb{R}^n$ betrachten wir mit Lemma 2.1 eine Whitney-Zerlegung von $U = \cup_{k=1}^\infty Q_k, F = \mathbb{R}^n - U$, in Würfel mit paarweise disjunktem Inneren und

$$diam\ Q_k \le d(Q_k, F) \le 4\ diam\ Q_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.104}$$

Es sei B_k der Ball mit gleichem Zentrum wie Q_k und $diam\ B_k = 11\ diam\ Q_k$. Dann gilt für $x \in Q_k$ mit (5.104)

$$\mathrm{d}(x, \mathbb{R}^n - B_k) \ge \frac{1}{2}(diam B_k - diam\ Q_k) \ge 5\ diam\ Q_k \ge$$
$$\ge d(Q_k, F) + diam\ Q_k \ge d(x, F) \tag{5.105}$$

und

$$|\mu|(T(B_k)) \le C_n\ (\mathcal{C}\mu)(x)\ \mathcal{L}^n(B_k),$$

also

$$|\mu|(T(B_k)) \le C_n \int_{Q_k} \mathcal{C}\mu \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n. \tag{5.106}$$

Für $(x,t) \in T(U)$ gilt

$$d(x, F) \ge t, \tag{5.107}$$

und $x \in Q_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus (5.105) und (5.107)

$$d(x, R^n - B_k) \geq d(x, F) \geq t,$$

also $(x,t) \in T(B_k)$ und

$$T(U) \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} T(B_k). \tag{5.108}$$

Aus (5.106) und (5.108) folgt

$$|\mu|(T(U)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mu|(T(B_k)) \leq C_n \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} \mathcal{C}\mu \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = C_n \int_U \mathcal{C}\mu \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

///

Nun kommen wir zur angekündigten Paarung.

Proposition 5.15 *Es sei F borelmeßbar auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$ und $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |F| \ \mathrm{d}|\mu| \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_1 F)(\mathcal{C}\mu) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Ist insbesondere $\mathcal{M}_1 F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und μ ein Carleson-Maß, so ist $F \in L^1(\mu)$ und

$$\Big| \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F \ \mathrm{d}\mu \Big| \leq C_n \parallel (\mathcal{M}_1 F) \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} \parallel \mu \parallel_{\mathcal{C}} .$$

Beweis:
Es seien $F, \mu \geq 0$. Wir betrachten $\alpha > 0$, und setzen $U := \{\mathcal{M}_1 F > \alpha\}$. Aus der Definition der nicht-tangentialen Maximalfunktion folgt, daß U offen ist, und $\mathcal{M}_1 F$ ist insbesondere borelmeßbar. Für $(y,t) \notin T(U)$ gilt $d(y, \mathbb{R}^n - U) < t$, also existiert ein $x \in \mathbb{R}^n - U$ mit $|x - y| < t$ und $(\mathcal{M}_1 F)(x) \leq \alpha$. Daraus folgt

$$\alpha \geq \mathcal{M}_1 F(x) = \sup_{|x-z|<\tau} F(z, \tau) \geq F(y,t).$$

Daraus folgt $\mathbb{R}_+^{n+1} - T(U) \subseteq [F \leq \alpha]$ bzw.

$$[F > \alpha] \subseteq T(\mathcal{M}_1 F > \alpha) \quad \forall \alpha > 0.$$

Mit Proposition 5.14 folgt

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F \ \mathrm{d}\mu = \int_0^{\infty} \mu(F > \alpha) \ \mathrm{d}\alpha \leq \int_0^{\infty} \mu(T(\mathcal{M}_1 F > \alpha)) \ \mathrm{d}\alpha \leq$$

$$\leq C_n \int_0^{\infty} \int_{[\mathcal{M}_1 F > \alpha]} \mathcal{C}\mu \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \ \mathrm{d}\alpha = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\mathcal{M}_1 F} \mathcal{C}\mu \ \mathrm{d}\alpha \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = C_n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_1 F)(\mathcal{C}\mu) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

///

Zum Abschluß dieses Paragraphen beweisen wir noch eine Identität, die wir auch bei der $\mathcal{H}^1$ – BMO–Dualität verwenden werden.

Proposition 5.16 *Es seien* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *und* $u(.,t) = P_t * f, v(.,t) = P_t * g$ *die zugehörigen Poisson-Integrale. Dann gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} fg \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} t \ \nabla_{x,t} u(x,t) \nabla_{x,t} v(x,t) \ \mathrm{d}(x,t).$$

Beweis:
Mit Polarisierung genügt es,

$$\| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} t \ |\nabla u(x,t)|^2 \ \mathrm{d}(x,t)$$

zu zeigen. Mit (5.1) sehen wir

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \exp(2\pi i \langle y, x \rangle) \exp(-2\pi |y| t) \ \mathrm{d}y$$

und

$$\partial_j u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 2\pi i y_j \hat{f}(y) \exp(2\pi i \langle y, x \rangle) \exp(-2\pi |y| t) \ \mathrm{d}y$$

$$\partial_t u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} -2\pi |y| \hat{f}(y) \exp(2\pi i \langle y, x \rangle) \exp(-2\pi |y| t) \ \mathrm{d}y.$$

Mit dem Satz von Plancherel folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 \ \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 8\pi^2 |y|^2 |\hat{f}(y)|^2 \exp(-4\pi |y| t) \ \mathrm{d}y$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\nabla u(x,t)|^2 t \ \mathrm{d}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 8\pi^2 |y|^2 |\hat{f}(y)|^2 \int\limits_0^\infty t \exp(-4\pi |y| t) \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 \int\limits_0^\infty t e^{-t} \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \| \hat{f} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{2} \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

///

Teil III
Hardy- und BMO-Räume

6 BMO($\mathbb{R}^n$)

Definition 6.1 *$g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ heißt von beschränkter mittlerer Oszillation, falls*

$$\| g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n \ Ball} \fint_B |g - g_B| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n, \tag{6.1}$$

mit $g_B := \fint_B g \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$, endlich ist.

Den Raum aller Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation bezeichnen wir mit BMO($\mathbb{R}^n$) *. Dabei identifizieren wir Funktionen, die sich nur um eine Konstante unterscheiden.*

□

Bemerkungen:

1. Mit der Identifikation von Funktionen bis auf Konstanten ist $\| \ . \ \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ eine Norm und BMO($\mathbb{R}^n$) ein Banachraum.

2. Für eine Familie $\{g^B\}_B$ von Funktionen auf beliebigen Bällen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft
$$g^{B^*} - g^B \equiv const \quad \text{auf } B, \text{falls } B \subseteq B^*,$$
existiert bis auf eine additive Konstante eine eindeutige Funktion g auf $\mathbb{R}^n$ mit
$$g - g^B \equiv const \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^n.$$
Da im folgenden verschiedene Konstruktionen lokal eindeutig bis auf Konstanten sind, ermöglicht dies den Übergang zu einer globalen Funktion.

3. Da für $c \in \mathbb{C}$
$$|g_B - c| = \Big|\fint_B g - c\Big| \leq \fint_B |g - c|,$$
genügt es zur Beschränktheit der Terme in (6.1)
$$\forall B \subseteq \mathbb{R}^n, \ \text{Ball} : \exists c_B \in \mathbb{C} : \fint_B |g - c_B| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \Lambda$$
für ein $\Lambda < \infty$ zu zeigen. Dann gilt
$$\| g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\Lambda. \tag{6.2}$$
Da für $2^{k-1} \leq R \leq 2^k$
$$\fint_{B_R} |g - c| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq 2^n \fint_{B_{2^k}} |g - c| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$
genügt es weiter in (6.1) Bälle mit Radien $2^k, k \in \mathbb{Z}$, zu betrachten.

4. Die BMO$-$Norm ist invariant unter Streckung, genauer für $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ist auch $h_\delta g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ und
$$\| g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \| h_\delta g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

5. Da $||g| - |g_B|| \leq |g - g_B|$, ist mit $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ auch $|g| \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ und mit (6.2)
$$\| |g| \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \| g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

6. Trivial ist jede Funktion $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ von beschränkter mittlerer Oszillation. Darüberhinaus ist $x \mapsto \log|x|$ in $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Da $\log \delta|x| - \log|x| = \log \delta$ konstant ist, genügt es mit der vorigen Bemerkung die Beschränktheit der Terme in (6.1) für Bälle mit Radius 1 zu zeigen. Nun gilt
$$\int\limits_{B_1(x_0)} |\log|x|| \,\mathrm{d}x \leq C_n \quad \forall |x_0| \leq 2,$$
und
$$\int\limits_{B_1(x_0)} |\log|x| - \log|x_0|| \,\mathrm{d}x \leq C_n \quad \forall |x_0| \geq 2.$$
Betrachten wir $\min(m, \log(1/|x|)_+)/m$, strecken und approximieren glatt, so erhalten wir zu beliebigem $R, \varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit
$$\begin{gathered} \| \varphi \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \\ 0 \leq \varphi \leq 1, \varphi = 1 \text{ auf } B_R(0). \end{gathered} \tag{6.3}$$

7. Wegen der Identifikation bis auf Konstanten wird es im folgenden nützlich sein, für Bälle $B \subseteq \mathbb{R}^n$ die Räume
$$L_0^p(B) := \{ g \in L^p(B) \mid \int\limits_B g \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \} \cong L^p(B)/span\{1\}$$
und
$$L_0^1(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \int f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \}$$
zu betrachten.

□

Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation sind i.a. nicht lokal beschränkt, aber in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \ \forall 1 \leq p < \infty$, wie die folgende stärkere Abschätzung von John-Nirenberg zeigt.

Lemma 6.1 (John-Nirenberg) *Für $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n), g \not\equiv const$ gilt für alle Bälle $B \subseteq \mathbb{R}^n$*
$$\fint\limits_B \exp(\sigma_n |g - g_B| / \| g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}) \leq C_n \tag{6.4}$$
mit $0 < \sigma_n, C_n < \infty$. Insbesondere gilt
$$\fint\limits_B |g - g_B|^p \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n^p (m!)^{p/m} \| g \|^p_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall 1 \leq p < \infty, p \leq m \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Beweis:
Da $x^m \leq e^x m!$ folgt (6.5) aus (6.4). (6.4) genügt es für Würfel $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ zu zeigen. Wir können $\| g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = c_n > 0$ annehmen, also $\fint_Q |g - g_Q| \, d\mathcal{L}^n \leq C_n c_n = 1$ für $c_n = C_n^{-1} > 0$.

Wir führen eine Calderon-Zygmund-Zerlegung gemäß Satz 2.2 für $|g - g_Q| \in L^1(Q)$ und $s > 1 \geq \fint_Q |g - g_Q| \, d\mathcal{L}^n$ durch und erhalten eine Folge von Würfeln $Q_k^{(1)}$ mit paarweise disjunktem Inneren und

$$\begin{gathered} s < \fint_{Q_k^{(1)}} |g - g_Q| \, d\mathcal{L}^n \leq 2^n s \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ |g - g_Q| \leq s \quad \mathcal{L}^n - \text{fast überall in } Q - \cup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(1)}. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_k^{(1)}) \leq s^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k^{(1)}} |g - g_Q| \, d\mathcal{L}^n \leq s^{-1} \int_Q |g - g_Q| \, d\mathcal{L}^n \leq s^{-1} \mathcal{L}^n(Q),$$

und

$$|g_{Q_k^{(1)}} - g_Q| = \left| \fint_{Q_k^{(1)}} g - g_Q \right| \leq 2^n s \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da $\fint_{Q_k^{(1)}} |g - g_{Q_k^{(1)}}| \, d\mathcal{L}^n \leq 1 < s$, können wir für jeden der Würfel $Q_k^{(1)}$ eine Calderon-Zygmund-Zerlegung durchführen und erhalten induktiv wie oben Folgen von Würfeln $Q_k^{(j)}, j \geq 2$, mit paarweise disjunktem Inneren und

$$|g - g_{Q_l^{(j-1)}}| \leq s \qquad \mathcal{L}^n - \text{fast überall in } Q_l^{(j-1)} - \cup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(j)}, \tag{6.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_k^{(j)}) \leq s^{-j} \mathcal{L}^n(Q), \tag{6.8}$$

$$|g_{Q_k^{(j)}} - g_Q| \leq j 2^n s. \tag{6.9}$$

Nun beweisen wir induktiv

$$|g - g_Q| \leq (1 + (j-1)2^n)s \leq j 2^n s \quad \mathcal{L}^n - \text{fast überall in } Q - \cup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(j)}. \tag{6.10}$$

Für $j = 1$ folgt dies sofort aus (6.6).

Für $j \geq 2, x \in Q - \cup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(j-1)}$ folgt (6.10) per Induktionsannahme. Für $x \in Q_l^{(j-1)} - \cup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(j)}$ gilt mit (6.7) und (6.9)

$$|g(x) - g_Q| \leq |g(x) - g_{Q_l^{(j-1)}}| + |g_{Q_l^{(j-1]}} - g_Q| \leq s + (j-1)2^n s,$$

und (6.10) folgt.

Für $r > 2^n s$ wählen wir $j \in \mathbb{N}$ mit $j2^n s < r \leq (j+1)2^n s$ und erhalten mit (6.8) und (6.10)

$$\mathcal{L}^n(Q \cap [|g - g_Q| \geq r) \leq \mathcal{L}^n(\cup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(j)}) \leq s^{-j}\mathcal{L}^n(Q) \leq \exp(-r \log s/(2^n s)) s\mathcal{L}^n(Q).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_Q \exp(\sigma|g - g_Q|) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n &= \int_0^\infty \mathcal{L}^n(Q \cap [\exp(\sigma|g - g_Q|) \geq \tau]) \, \mathrm{d}\tau \leq \\ &\leq \exp(\sigma 2^n s) + \int_{\exp(\sigma 2^n s)}^\infty \exp(-\log \tau \log s/(\sigma 2^n s)) s \, \mathrm{d}\tau \leq \\ &\leq \exp(\sigma 2^n s) - \frac{\exp(\sigma 2^n s - \log s)}{\sigma 2^n s - \log s} \sigma 2^n s^2 \leq C_n, \end{aligned}$$

falls $\sigma 2^n s - \log s < 0$.

Da $\| g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = c_n > 0$, folgt (6.4).

///

Folgende Kompaktheit ergibt sich als einfache Folgerung.

Proposition 6.2 *Zu jeder in* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *beschränkten Folge* $g_m \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n), \| g_m \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda$ *existiert eine Teilfolge und ein* $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $g_m \to g$ *schwach in* $L^p_{0,loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ *, genauer*

$$\int_B f g_m \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int_B f g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall f \in L^q_0(B), 1 < q \leq \infty, B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Ball.} \tag{6.11}$$

Bemerkung:

Wenn wir unten $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ als Dualraum charakterisieren werden, sehen wir, daß die Konvergenz in (6.11) die schwach*-Konvergenz ist.

□

Beweis:

Nach dem John-Nirenberg-Lemma, Lemma 6.1, ist $g_m - g_{m,B} \in L^p(B), 1 \leq p < \infty, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Ball, beschränkt. Damit existiert eine Teilfolge und für alle $B_k(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Funktion $g_k^B(0)$ mit

$$g_m - g_{m,B_k(0)} \to g^{B_k(0)} \quad \text{schwach in } L^p(B_k(0)),$$

d.h.

$$\int_{B_k(0)} f(g_m - g_{m,B_k(0)}) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int_{B_k(0)} f g^{B_k(0)} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall f \in L^q(B_k(0)), 1 < q \leq \infty. \tag{6.12}$$

Für $k \leq l$ folgt

$$g^{B_l(0)} - g^{B_k(0)} \leftarrow (g_m - g_{m,B_l(0)}) - (g_m - g_{m,B_k(0)}) = g_{m,B_k(0)} - g_{m,B_l(0)},$$

also

$$g^{B_l(0)} - g^{B_k(0)} \equiv const$$

und mit Bemerkung 2 nach der Definition 6.1 existiert eine Funktion g auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$g - g^{B_k(0)} \equiv const \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mit (6.12) folgt für alle $f \in L^q_0(B), 1 < q \leq \infty, B \subseteq B_k(0), f \equiv 0$ in $B_k(0) - B$, dass

$$\int\limits_B f g_m \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{B_k(0)} f(g_m - g_{m,B_k(0)}) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int\limits_{B_k(0)} f g^{B_k(0)} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_B f g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

also (6.11).

Für $f \in L^q(B), 1 < q \leq \infty, B \subseteq B_k(0), f \equiv 0$ in $B_k(0) - B$ gilt $f - f_B \in L^q_0(B)$, und wir erhalten

$$\int\limits_B f(g_m - g_{m,B}) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_B (f - f_B)(g_m - g_{m,B}) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_B (f - f_B) g_m \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to$$

$$\to \int\limits_B (f - f_B) g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_B (f - f_B)(g - g_B) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_B f(g - g_B) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

also

$$g_m - g_{m,B} \to g - g_B \quad \text{schwach in } L^p(B), 1 \leq p < \infty, B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Ball.}$$

Für $p = 1$ ergibt Unterhalbstetigkeit

$$⨍_B |g - g_B| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \liminf_{m \to \infty} ⨍_B |g_m - g_{m,B}| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \Lambda,$$

also $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

///

Bemerkung:
Nehmen wir zusätzlich

$$g_m \to g \quad \text{punktweise } \mathcal{L}^n - \text{fast überall} \tag{6.13}$$

an, so erhalten wir für $|g_B| > R$, daß

$$\mathcal{L}^n([|g| \leq R] \cap B) \leq \mathcal{L}^n([|g - g_B| \geq |g_B| - R] \cap B) \leq$$

$$\leq \frac{1}{|g_B| - R} \int\limits_B |g - g_B| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \frac{\mathcal{L}^n(B) \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}}{|g_B| - R}.$$

Falls $|g_{m,B}| \to \infty$, so folgt $\mathcal{L}^n([|g_m| \leq R] \cap B) \to 0$ für alle $R < \infty$. Andererseits folgt mit (6.13), daß $\mathcal{L}^n([|g_m - g| \geq \varepsilon] \cap B) \to 0$ für alle $\varepsilon > 0$, also ein Widerspruch, und wir schließen

$$\limsup_{m \to \infty} |g_{m,B}| < \infty \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Ball.}$$

Mit dem John-Nirenberg-Lemma, Lemma 6.1, folgt, daß $g_m \in L^p(B), 1 \leq p < \infty$, beschränkt ist, und weiter mit dem Konvergenzsatz von Vitali und (6.13), daß

$$g_m \to g \quad \text{stark in } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ für alle } 1 \leq p < \infty.$$

$\square$

Für Integration von Funktionen mit beschränkter mittlerer Oszillation auf $\mathbb{R}^n$ haben wir folgende Proposition, die insbesondere zeigt, daß das Poisson-Integral einer BMO$-$Funktion existiert.

Proposition 6.3 *Für* $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(x) - g_{B_1(0)}|}{(1+|x|)^{n+\varepsilon}} \, \mathrm{d}x \leq C_{n,\varepsilon} \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$$

und für $R \geq 1$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B_R(0)} |g(x) - g_{B_1(0)}| \; |x|^{-n-\varepsilon} \, \mathrm{d}x \leq C_{n,\varepsilon} R^{-\varepsilon} (1 + \log R) \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B_R(0)} |g(x) - g_{B_R(0)}| \; |x|^{-n-\varepsilon} \, \mathrm{d}x \leq C_{n,\varepsilon} R^{-\varepsilon} \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

Beweis:
Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt mit der Definition von BMO

$$|g_{B_{2^k}(0)} - g_{B_{2^{k+1}}(0)}| = \Big| \fint\limits_{B_{2^k}(0)} (g(x) - g_{B_{2^{k+1}}(0)}) \, \mathrm{d}x \Big| \leq$$
$$\leq 2^n \fint\limits_{B_{2^{k+1}}(0)} |g - g_{B_{2^{k+1}}(0)}| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

Mit Induktion folgt

$$|g_{B_{2^k}(0)} - g_{B_1(0)}| \leq C_n k \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} . \tag{6.14}$$

Daraus folgt

$$\fint\limits_{B_{2^k}(0)} |g - g_{B_1(0)}| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n k \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B_{2^k}(0)} |g(x) - g_{B_1(0)}| \; |x|^{-n-\varepsilon} \, \mathrm{d}x \leq \sum_{j=k}^{\infty} \int\limits_{2^j \leq |x| < 2^{j+1}} |g(x) - g_{B_1(0)}| \; |x|^{-n-\varepsilon} \, \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq C_n \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \sum_{j=k}^{\infty} (j+1) 2^{-j\varepsilon} \leq C_{n,\varepsilon} 2^{-k\varepsilon} (1+k) \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)},$$

insbesondere folgt die zweite Abschätzung. Da

$$\int\limits_{B_1(0)} |g - g_{B_1(0)}| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)},$$

folgt die erste Abschätzung.

Schließlich gilt mit der zweiten Abschätzung

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B_R(0)} |g(x) - g_{B_R(0)}| \; |x|^{-n-\varepsilon} \; \mathrm{d}x$$

$$\leq R^{-\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_1(0)} |(h_R g)(x) - (h_R g)_{B_1(0)}| \; |x|^{-n-\varepsilon} \; \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq C_{n,\varepsilon} R^{-\varepsilon} \parallel h_R g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = C_{n,\varepsilon} R^{-\varepsilon} \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)},$$

also die dritte Abschätzung.

///

Als Konsequenz ergibt sich folgende einfache Konvergenzaussage.

Proposition 6.4 *Es sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-n-\varepsilon}$$

und eine in $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *beschränkte Folge* $g_m \to g$ *schwach in* $L^p_{0,loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$, *mit*

$$g_{m,B_1(0)} = g_{B_1(0)} = 0. \tag{6.15}$$

Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f g_m \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} f g \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Ist $f \in L^1_0(\mathbb{R}^n)$ *, so gilt dies auch ohne die Voraussetzung (6.15).*

Beweis:

Mit Proposition 6.3 sind die Integrale wohldefiniert. Aus (6.15) und $h := \chi_{B_1(0)} \in L^\infty(B_R(0)), R \geq 1$, folgt

$$-g_{m,B_R(0)} \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \int\limits_{B_R(0)} \chi_{B_1(0)}(g_m - g_{m,B_R(0)}) \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{B_R(0)} (h - h_{B_R(0)}) g_m \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to$$

$$\to \int\limits_{B_R(0)} (h - h_{B_R(0)}) g \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{B_R(0)} \chi_{B_1(0)}(g - g_{B_R(0)}) \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n = -g_{B_R(0)} \mathcal{L}^n(B_1(0)),$$

also $g_{m,B_R(0)} \to g_{B_R(0)}$. Dies ergibt $g_m - g_{m,B_R(0)} \to g - g_{B_R(0)}$ schwach in $L^p_0(B_R(0))$, dann schwach in $L^p(B_R(0))$, also $g_m \to g$ schwach in $L^p(B_R(0))$ und

$$\int\limits_{B_R(0)} f g_m \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int\limits_{B_R(0)} f g \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall R \geq 1, \tag{6.16}$$

da $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Mit Proposition 6.3 und (6.15) sehen wir

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_R(0)} f g_{(m)} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \Big| \leq C \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_R(0)} \frac{|g_{(m)}(x)|}{(1+|x|)^{n+\varepsilon}} \, \mathrm{d}x \Big| \leq$$

$$\leq C_n R^{-\varepsilon}(1+\log R) \parallel g_{(m)} \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

Mit (6.16) folgt

$$\limsup_{m\to\infty} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(g_m - g) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \Big| \leq C_n R^{-\varepsilon}(1+\log R) \sup_m (\parallel g_m \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}, \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}),$$

und die Proposition ist beweisen.

///

Für Faltungen von BMO−Funktionen ergibt sich.

Proposition 6.5 *Es sei* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit* $|\varphi(x)| \leq \Lambda(1+|x|)^{-n-\varepsilon}, \int \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 1, \varphi_t(x) := t^{-n}\varphi(x/t)$ *. Für* $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *ist die Faltung wohldefiniert mit* $\varphi_t * g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$|(\varphi_t * g)(x)| \leq C_{n,\varepsilon}\Lambda \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} + |g_{B_t(x)}|, \tag{6.17}$$

$$\parallel \varphi_t * g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,\varepsilon}\Lambda \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} . \tag{6.18}$$

Für eine in $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *beschränkte Folge* $g_m \to g$ *schwach in* $L^p_{0,loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$, *gilt*

$$\varphi_t * g_m \to \varphi_t * g \textit{ mod span}\{1\} \quad \begin{array}{l} \textit{punktweise in } \mathbb{R}^n, \\ \textit{stark in } L^p_{0,loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty, \\ \textit{schwach}^* \textit{ in } L^\infty_{0,loc}(\mathbb{R}^n). \end{array} \tag{6.19}$$

Beweis:
Da $\varphi_t * g = h_{t^{-1}}(\varphi * (h_t g))$ und die BMO−Norm invariant unter Streckung ist, genügt es $t = 1$ zu betrachten. Wegen der Translationsinvarianz genügt es Bälle mit Zentrum in 0 zu betrachten.

Da $\int \varphi = 1$, gilt für $|x| \leq R$ mit Proposition 6.3

$$|(\varphi * g)(x) - g_{B_1(0)}| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| \, |g(y) - g_{B_1(0)}| \, \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq C_{n,\varepsilon,R}\Lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(y) - g_{B_1(0)}|}{(1+|y|)^{n+\varepsilon}} \, \mathrm{d}y \leq C_{n,\varepsilon,R}\Lambda \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} . \tag{6.20}$$

Für $x = 0$ folgt sofort (6.17), und weiter folgt $\varphi * g \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Für $R \leq 1$ sehen wir

$$⨍\limits_{B_R(0)} |(\varphi * g) - g_{B_1(0)}| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_{n,\varepsilon}\Lambda \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} . \tag{6.21}$$

Für $R \geq 1$ sehen wir

$$\fint_{B_R(0)} |(\varphi * g) - g_{B_{2R}(0)}| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \int_{\mathbb{R}^n} \fint_{B_R(0)} |\varphi(x-y)| \, |g(y) - g_{B_{2R}(0)}| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{6.22}$$

Für $|y| \geq 2R, |x| \leq R$ gilt

$$|\varphi(x-y)| \leq 2^{n+\varepsilon} \Lambda (1+|y|)^{-n-\varepsilon},$$

also

$$\fint_{B_R(0)} |\varphi(x-y)| \, \mathrm{d}x \leq 2^{n+\varepsilon} \Lambda (1+|y|)^{-n-\varepsilon}.$$

Da $\fint_{B_R(0)} |\varphi| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \leq C_{n,\varepsilon} \Lambda$, folgt mit (6.22) und Proposition 6.3

$$\fint_{B_R(0)} |(\varphi * g) - g_{B_{2R}(0)}| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq C_{n,\varepsilon} \Lambda \int_{\mathbb{R}^n - B_{2R}(0)} \frac{|g(y) - g_{B_{2R}(0)}|}{(1+|y|)^{n+\varepsilon}} \, \mathrm{d}y + C_{n,\varepsilon} \Lambda \fint_{B_{2R}(0)} |g(y) - g_{B_{2R}(0)}| \, \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq C_{n,\varepsilon} \Lambda \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

Zusammen mit (6.21) folgt (6.18).

Nehmen wir o.B.d.A. $g_{m,B_1(0)} = g_{B_1(0)} = 0$ an, so folgt die punktweise Konvergenz $\varphi_t * g_m \to \varphi_t * g$ aus Proposition 6.4, da $|\varphi_t(x-y)| \leq C_{n,\varepsilon,t,|x|} (1+|y|)^{-n-\varepsilon}$. Beachten wir

$$|g_{B_t(0)} - g_{B_1(0)}| \leq C_n (1 + |\log t|) \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$$

wie in (6.14), so erhalten wir

$$|g_{m,B_t(0)}| \leq |g_{B_t(0)}| + C_n (1 + |\log t|)(\parallel g_m \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} + \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}),$$

und mit (6.20) ist $\varphi_t * g_m$ beschränkt in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dies ergibt $\varphi_t * g_m \to \varphi_t * g$ schwach* in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt die starke Konvergenz in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$.

///

In §3,4 sahen wir, daß gewisse singuläre Integrale stetig auf $L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty,$ sind. Nun sehen wir, daß diese singulären Integrale $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig nach $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ abbilden. Mit der $\mathcal{H}^1-$BMO$-$Dualität werden wir im nächsten Paragraphen sehen, daß diese singulären Integrale stetig auf $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ sind.

Lemma 6.6 *Es sei* $K \in L^1(\mathbb{R}^n) \cup L^2(\mathbb{R}^n), 0 < \Lambda < \infty,$ *mit*

$$\parallel \hat{K} \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda, \tag{6.23}$$

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, \mathrm{d}x \leq \Lambda. \tag{6.24}$$

Setzen wir für $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(Kg)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} (K(x-y) - K(-y))g(y)\ \mathrm{d}y, \tag{6.25}$$

so ist $K : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *stetig, genauer*

$$\| Kg \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \le C_n \Lambda \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{6.26}$$

□

Bemerkungen:

1. Mit (6.24) gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x-y) - K(-y)|\ \mathrm{d}y \le$$
$$\le \int\limits_{|y| \ge 2|x|} |K(y) - K(y+x)|\ \mathrm{d}y + \int\limits_{|y| \le 2|x|} \Big(|K(x-y)| + |K(-y)| \Big)\ \mathrm{d}y \le$$
$$\le \Lambda + 2 \int\limits_{B_{3|x|}(0)} |K|\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n < \infty,$$

   da $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist die Abbildung $y \mapsto K(x-y) - K(-y)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, und Kg ist in (6.25) für $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert.

2. Die Definition in (6.25) unterscheidet sich von der üblichen Definition von $Kg = K * g$ für $g \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le 2,$ wie z.B. in Lemma 3.1. Für $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger unterscheiden sich die Definitionen nur um die Konstante $\int K(-y)g(y)\ \mathrm{d}y$, und Kg ist als Element von $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert.

3. Unten werden wir sehen, daß $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ der Dualraum von $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{H}^1_a(\mathbb{R}^n)$ ist und dass $K^* : \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$, wobei $K^*(x) := K(-x)$ gemäß Definition 1.4. Mit der Definition (6.25) ist K die duale Abbildung von K^* .

4. Als duale Abbildung ist $K : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ schwach$^*-$stetig. Aus der Definition (6.25) können wir direkt sehen, daß für schwach$^*-$konvergente Folgen $g_m \to g$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Bilder $Kg_m \to Kg$ punktweise konvergieren. Mit der Bemerkung zu Proposition 6.2 und der unter bewiesenen Dualität von $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ergibt sich, daß $Kg_m \to Kg$ schwach* in $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

   Da Funktionen mit kompaktem Träger schwach*-folgen-dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegen, ist (6.25) die eindeutige schwach*-stetige Erweiterung von $K * g$.

□

Beweis:
Wir betrachten einen beliebigen Ball $B = B(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Zentrum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und B^* den Ball mit gleichem Zentrum und doppeltem Radius. Wir setzen für $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$g_1 := g\chi_{B^*}, \quad g_2 := g - g_1.$$

Mit Satz 1.2 ist $K * g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, da $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, und mit dem Satz von Plancherel und (6.23) gilt

$$\| K * g_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda \| g_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Daraus folgt

$$\int_B |K * g_1| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \mathcal{L}^n(B)^{1/2} \| K * g_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\leq C_n \Lambda \mathcal{L}^n(B)^{1/2} \| g_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \Lambda \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}^n(B).$$

Setzen wir $c_{B,1} := -\int_{B^*} K(-y) g(y) \, \mathrm{d}y$, so sehen wir

$$⨍_B |Kg_1 - c_{B,1}| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = ⨍_B |K * g_1| \leq C_n \Lambda \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} . \tag{6.27}$$

Weiter setzen wir

$$c_{B,2} := \int_{\mathbb{R}^n - B^*} \Big(K(x_0 - y) - K(-y) \Big) g(y) \, \mathrm{d}y$$

und sehen für $x \in B$ mit (6.24)

$$|Kg_2(x) - c_{B,2}| \leq \int_{\mathbb{R}^n - B^*} |K(x-y) - K(x_0 - y)| \, \mathrm{d}y \ \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\leq \int_{|y| \geq 2|x - x_0|} |K(y + x - x_0) - K(y)| \, \mathrm{d}y \ \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} .$$

Mit (6.27) folgt für $c_B := c_{B,1} + c_{B,2}$

$$⨍_B |Kg - c_B| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n \Lambda \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

also $Kg \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\| Kg \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \Lambda \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} .$$

///

Im Beweis der $\mathcal{H}^1 - \mathrm{BMO}-$Dualität im nächsten Paragraphen werden wir verwenden, daß BMO−Funktionen ein Carleson-Maß auf $\mathbb{R}^{n+1}_+$ definieren

Proposition 6.7 *Es sei* $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *und* $v(.,t) := P_t * g$ *das Poisson-Integral. Dann ist* $t|\nabla v|^2 \mathcal{L}^{n+1}$ *ein Carleson-Maß auf* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *und*

$$\| t|\nabla v|^2 \mathcal{L}^{n+1} \|_{\mathcal{C}} \leq C_n \| g \|^2_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

Beweis:
Mit Proposition 6.3 sehen wir, daß das Poisson-Integral für BMO−Funktionen existiert. Nach Translation und Streckung genügt es gemäß Definition 5.4 zu zeigen, daß

$$\int_{B_1^n(0) \times]0,1[} t |\nabla v(x,t)|^2 \, \mathrm{d}(x,t) \leq C_n \| g \|^2_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} . \tag{6.28}$$

O.B.d.A. können wir $g_{B_2^n(0)} = 0$ annehmen. Wir zerlegen $g = g_1 + g_2, g_1 := g\chi_{B_2^n(0)}$ und $v = v_1 + v_2, v_j(.,t) := P_t * g_j, j = 1,2$. Da $g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt mit Proposition 5.16

$$\int\limits_{B_1^n(0)\times]0,1[} t|\nabla v_1(x,t)|^2 \, \mathrm{d}(x,t) \leq \frac{1}{2} \parallel g_1 \parallel^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{B_2^n(0)} |g - g_{B_2^n(0)}|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq C_n \parallel g \parallel^2_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \tag{6.29}$$

mit (6.5) aus dem John-Nirenberg-Lemma, Lemma 6.1.

Durch Differentiation unter dem Integral erhalten wir

$$|\nabla v_2(x,t)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_2^n(0)} |\nabla P(x-y,t)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}y \leq C_n \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_2^n(0)} \frac{1}{|(x-y,t)|^{n+1}} |g(y)| \, \mathrm{d}y.$$

Für $(x,t) \in B_1^n(0)\times]0,1[, y \notin B_2^n(0)$ gilt

$$\frac{1}{|(x-y,t)|^{n+1}} \leq \frac{C_n}{(1+|y|)^{n+1}}.$$

Mit Proposition 6.3 folgt

$$|\nabla v_2(x,t)| \leq C_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(y) - g_{B_2^n(0)}|}{(1+|y|)^{n+1}} \, \mathrm{d}y \leq C_n \parallel g \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$$

und

$$\int\limits_{B_1^n(0)\times]0,1[} t|\nabla v_2(x,t)|^2 \, \mathrm{d}(x,t) \leq C_n \parallel g \parallel^2_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

Zusammen mit (6.29) folgt (6.28), und die Proposition ist bewiesen.

///

Im nächsten Schritt erkennen wir $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ als Dualraum des Banachraumes $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$, den wir nun definieren.

Definition 6.2 *$a \in L^\infty(B)$ heißt Atom auf dem Ball $B \subseteq \mathbb{R}^n$, falls*

$$\mathcal{L}^n(B) \parallel a \parallel_{L^\infty(B)} \leq 1,$$

$$\int\limits_B a \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0.$$

Wir definieren den atomischen Hardy-Raum $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ \sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \lambda_k \in \mathbb{C}, a_k \ \mathit{Atom}, \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| < \infty \right\}$$

und die atomische Norm für $f \in \mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\parallel f \parallel_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)} := \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \mid f = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k \in L^1(\mathbb{R}^n), \lambda_k \in \mathbb{C}, a_k \ \mathit{Atom} \right\}.$$

Grundlegende Eigenschaften des atomischen Hardy-Raumes ergeben sich aus der folgenden Proposition.

Proposition 6.8 *Der atomische Hardy-Raum ist ein Banachraum mit der atomischen Norm, und wir haben die stetigen Einbettungen*

$$L_0^\infty(B) \hookrightarrow \mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Ball.} \tag{6.30}$$

Beweis:
Jedes Atom a liegt in $L^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\| a \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| a \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}^n(B) \leq 1.$$

Daher sind alle Summen in der Definition von $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$ absolut konvergent in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in \mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n).$$

Ist insbesondere $\| f \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)} = 0$, so folgt $f = 0$ fast überall.

Da $\| \, . \, \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)}$ subadditiv, positiv homogen und $\| 0 \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)} = 0$, ist $\| \, . \, \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)}$ eine Norm auf $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$.

Andererseits definiert jedes $f \in L_0^\infty(B)$ ein Atom durch

$$a := \mathcal{L}^n(B)^{-1} f / \| f \|_{L^\infty(B)},$$

falls $f \neq 0$. Damit ist $f \in \mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\| f \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)} \leq \mathcal{L}^n(B) \| f \|_{L^\infty(B)} . \tag{6.31}$$

Damit sind die Einbettungen in (6.30) stetig.

Es verbleibt zu zeigen, daß $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum ist. Dazu betrachten wir eine Cauchy-Folge $f_m \in \mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$. Es genügt zu zeigen, daß eine Teilfolge in $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Daher nehmen wir o.B.d.A.

$$\| f_m - f_{m+1} \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)} < 2^{-m}$$

an. Gemäß der Definition der atomischen Norm existieren $\lambda_k^m \in \mathbb{C}$ und Atome a_k^m mit

$$f_{m+1} - f_m = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^m a_k^m,$$
$$\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k^m| < 2^{-m}.$$

Da die $L^1(\mathbb{R}^n)-$Norm schwächer ist als die $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)-$Norm ist, gilt

$$f := f_1 + \sum_{m=1}^\infty (f_{m+1} - f_m) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

und

$$f - f_m = \sum_{l=m}^\infty (f_{l+1} - f_l) = \sum_{l=m}^\infty \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^l a_k^l.$$

Da $f_m \in \mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^l| \leq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} < \infty$$

folgt $f \in \mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\| f - f_m \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{l=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^l| \leq \sum_{l=m}^{\infty} 2^{-l} = 2^{-m+1}.$$

Dies ergibt $f_m \to f$ in $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$, und $\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banachraum.

///

Die Einbettung in (6.30) können wir verbessern.

Proposition 6.9 *Für* $1 < q \leq \infty, 1 \leq p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$ *haben wir die stetige Einbettung*

$$L_0^q(B) \hookrightarrow \mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ Ball}, \tag{6.32}$$

genauer gilt

$$\| f \|_{\mathcal{H}_a^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,q} \| f \|_{L^q(B)} \mathcal{L}^n(B)^{1/p} \quad \forall f \in L_0^q(B), B \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ Ball.} \tag{6.33}$$

Teil IV
Appendix

A Lokale Maximumabschätzungen

In diesem Abschnitt geben wir einen Beweis für die lokalen Maximumabschätzungen für harmonische Funktionen. Einen Beweis für allgemeine elliptische Differentialoperatoren in Nicht-Divergenzform steht in [GT] Theorem 9.20.

Satz A.1 *Für* $u \in C_{loc}^{\infty}(B_1(0))$ *harmonisch gilt*

$$\sup_{B_{1/2}(0)} |u| \leq C_{n,q} \| u \|_{L^q(B_1(0))} \quad \forall q > 0$$

mit $C_{n,q} < \infty$.

□

Zuerst beweisen wir eine Hilfsabschätzung.

Proposition A.1 *Für* $v \in C_0^{\infty}(B_1(0))$ *mit*

$$\Delta v = f + div\ g$$

und $f \in C_0^0(B_1(0)), g \in C_0^1(B_1(0))$ *gilt*

$$\sup_{B_1(0)} |v| \leq C_{n,p}\Big(\| f \|_{L^{p/2}(B_1(0))} + \| g \|_{L^p(B_1(0))} \Big) \quad \forall p > n \geq 2$$

mit $C_{n,p} < \infty$.

Beweis:
Mit der Fundamentallösung des Laplace-Operators auf $\mathbb{R}^n, n \geq 2$,

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3 \ , \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |x| & \text{für } n = 2 \ , \end{cases}$$

verwenden wir die Darstellungsformel

$$v(x) = \int \Gamma(x-y)\Delta v(y) \ dy \quad \text{für } v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

siehe [GT] (2.17). Mit partieller Integration rechnen wir für $\varrho \to 0$

$$\int \Gamma(x-y)\partial_j g_j(y) \ dy \leftarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_\varrho(x)} \Gamma(x-y)\partial_j g_j(y) \ dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_\varrho(x)} \partial_j \Gamma(x-y) g_j(y) \ dy - \int\limits_{\partial B_\varrho(x)} \Gamma(x-y) g_j(y) \nu_{\partial B_{\varrho(x)},j}(y) \ d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Da

$$\Big| \int\limits_{\partial B_\varrho(x)} \Gamma(x-y) g_j(y) \nu_{\partial B_{\varrho(x)},j}(y) \ d\mathcal{H}^{n-1}(y) \Big| \leq C_n |\Gamma(\varrho e_1)| \varrho^{n-1} \parallel g_j \parallel_{L^\infty(B_1(0))} \to 0,$$

erhalten wir

$$\int \Gamma(x-y)\partial_j g_j(y) \ dy = \int \partial_j \Gamma(x-y) g_j(y) \ dy,$$

also mit der Darstellungsformel

$$v = \Gamma * \Delta v = \Gamma * f + \nabla \Gamma * g.$$

Da $\Gamma \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n), \nabla\Gamma \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für $q < n/(n-2), r < n/(n-1)$, erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung für $p > n, 2p^{-1} + q^{-1} = 1, p^{-1} + r^{-1} = 1$,

$$\sup_{B_1(0)} |v| \leq \parallel \Gamma \parallel_{L^q(B_2(0))} \parallel f \parallel_{L^{p/2}(B_1(0))} + \parallel \nabla\Gamma \parallel_{L^r(B_2(0))} \parallel g \parallel_{L^p(B_1(0))} \leq$$

$$\leq C_{n,p} \Big(\parallel f \parallel_{L^{p/2}(B_1(0))} + \parallel g \parallel_{L^p(B_1(0))} \Big),$$

also die Behauptung.

///

Beweis von Satz A.1:
Für $n = 1$ ist u linear, und die Behauptung folgt elementar. Für $n \geq 2$ wählen wir $\gamma \in C_0^\infty(B_1(0)), \gamma = 1$ auf $B_{1/2}(0), 0 \leq \gamma \leq 1$, setzen $\eta := \gamma^M \in C_0^\infty(B_1(0))$ für $M \in \mathbb{N}, M \geq 3$ und sehen für $0 < \delta := 2/M < 1$, dass

$$|\nabla\eta| = M\gamma^{M-1}|\nabla\gamma| \leq C_{n,\delta}\eta^{1-\delta/2}, \quad |D^2\eta| \leq C_{n,\delta}\eta^{1-\delta}.$$

Für $v := u\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ ergibt dies

$$\Delta v = 2\nabla u \cdot \nabla \eta + u\Delta\eta = 2div(u\nabla\eta) - u\Delta\eta.$$

Mit der vorigen Proposition A.1 erhalten wir für $p > n$ und der Young-Ungleichung

$$\sup_{B_1(0)} |v| \leq C_{n,p}\Big(\| u\nabla\eta \|_{L^p(B_1(0))} + \| u\Delta\eta \|_{L^{p/2}(B_1(0))} \Big) \leq$$

$$\leq C_{n,p,\delta} \| u\eta^{1-\delta} \|_{L^p(B_1(0))} = C_{n,p,\delta} \| |v|^{1-\delta}|u|^\delta \|_{L^p(B_1(0))} \leq$$

$$\leq C_{n,p,\delta} \sup_{B_1(0)} |v|^{1-\delta} \| |u|^\delta \|_{L^p(B_1(0))} \leq \frac{1}{2} \sup_{B_1(0)} |v| + C_{n,p,\delta} \| u \|_{L^{\delta p}(B_1(0))} .$$

Nach Absorption erhalten wir für $q := \delta p > 0$, dass

$$\sup_{B_{1/2}(0)} |u| \leq \sup_{B_1(0)} |v| \leq C_{n,q} \| u \|_{L^q(B_1(0))},$$

also die Behauptung.

///

Literatur

[CoiLioMeySem93] Coifman, R., Lions, P.L., Meyer, Y., Semmes, S., (1993) Compensated compactness and Hardy spaces, Journal de Mathématiques pures et appliquées, **72**, pp. 247-286.

[EG] Evans, L.C., Gariepy, R.F., (1992) Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press, Boca Raton - Ann Arbor - London.

[FeSt72] Fefferman, C., Stein, E.M., (1972) H^p spaces of several variables, Acta Mathematica, **129**, pp. 137-193.

[GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., (1998) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, 3.Auflage, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.

[Go79] Goldberg, D., (1979) A local version of real Hardy spaces, Duke Mathematical Journal, **46**, pp. 27-42.

[Ru] Rudin, W.T., (1973) Functional Analysis, McGraw-Hill, New York.

[So] Sogge, C.D., (1993) Fourier Integrals in Classical Analysis, Cambridge University Press.

[St-a] Stein, E.M., (1970) Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press.

[St-b] Stein, E.M., (1993) Harmonic Analysis, Princeton University Press.

[StWe] Stein, E.M., Weiss, G., (1971) Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press.

[To] Torchinsky, A., (1986) Real-variable methods in harmonic analysis, Academic Press.