

Funktionalanalysis

Reiner Schätzle
Wintersemester 2020/21
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

I	Lineare Räume und Abbildungen	1
1	Banachräume	1
2	Hilberträume	10
3	Vollständigkeit	19
4	Trennungssätze	25
II	Dualität in Banachräumen	32
5	Schwache Topologie	32
6	Die duale Abbildung	42
7	Kompakte Operatoren	50
8	Spektrum	55
III	Appendix	63
A	Topologische Räume	63

Teil I

Lineare Räume und Abbildungen

1 Banachräume

Zentraler Begriff der Funktionalanalysis ist der des Banachraums.

Definition 1.1 Eine Norm auf einem reellen bzw. komplexen Vektorraum X ist eine Abbildung $\| \cdot \|: X \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0, \\ \|x\| &= 0 \iff x = 0, \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\|, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|,\end{aligned}$$

für $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Setzen wir $d(x, y) := \|x - y\|$, so definiert dies eine Metrik auf X . X bzw. $(X, \| \cdot \|)$ heißt ein normierter Raum. Ist X in der Metrik vollständig, so heißt X bzw. $(X, \| \cdot \|)$ ein Banachraum.

Zwei Normen $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_2$ heißen äquivalent, wenn für $0 < c_0, C < \infty$ existieren mit

$$c_0 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \quad \text{für alle } x \in X.$$

□

Beispiele:

- $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind mit den Normen $\|x\| := |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\|z\| := |z| = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i}$ für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ Banachräume. Allgemeiner sind $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ und $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n |x_i|$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, die äquivalent sind.
- Äquivalente Normen induzieren die gleiche Konvergenz.
- Die letzte Bedingung in der Definition der Norm heißt Dreiecksungleichung. Daraus sehen wir für $x, y \in X$

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

und mit Symmetrie erhalten wir die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

- Es sei $(X, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum und $Y \subseteq X$ ein linearer Unterraum. Dann definiert die Einschränkung $\| \cdot \|_Y := \| \cdot \||_Y$ eine Norm auf Y , und Y ist ein normierter Unterraum von X . Ist Y als Unterraum vollständig, so ist Y in X abgeschlossen. Ist X ein Banachraum und Y abgeschlossen, so ist Y ein Banachraum.

5. Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in einem Banachraum X , d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty,$$

ist konvergent.

Zum Beweis setzen wir $y_n := \sum_{k=1}^n x_k$ und sehen für $m \geq n$

$$\|y_m - y_n\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty.$$

Also bilden die Partialsummen eine Cauchyfolge und sind somit konvergent.

6. Für zwei normierte Räume X, Y definieren wir die Produkt-Norm $\|\cdot\|_{X \times Y}$ auf $X \times Y$ durch

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Das Produkt $X \times Y$ betrachten wir mit dieser Norm als normierter Raum. Sind X und Y Banachräume, so ist auch $X \times Y$ ein Banachraum.

7. Ist X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Unterraum, so definiert $\|x + Y\| := d(x, Y)$ eine Norm auf dem Quotientenraum X/Y , womit dieser ein normierter Raum wird. Die Projektion $\pi : X \rightarrow X/Y, x \mapsto x + Y$, ist stetig mit $\text{Lip } \pi \leq 1$. Wir setzen $\text{codim } Y := \dim(X/Y)$.

8. Es sei $\mathcal{F}_b(X, Y)$ die Menge aller Funktionen auf einer nichtleeren Menge $X \neq \emptyset$ in einen normierten Raum Y , z.B. $Y = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, mit beschränktem Bild $f(X) \subseteq Y$. Dann definiert

$$\|f\|_{\mathcal{F}_b(X, Y)} := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$$

eine Norm auf $\mathcal{F}_b(X, Y)$, und $\mathcal{F}_b(X, Y)$ ist ein normierter Raum. Ist Y ein Banachraum, so ist $\mathcal{F}_b(X, Y)$ ein Banachraum.

9. Es sei $\|(x_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_p := (\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ und $\|(x_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_{\infty} := \sup_{j=1}^{\infty} |x_j|$. Weiter sei $l^p := \{(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid \|(x_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_p < \infty, x_j \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}\}$, $c_0 := \{(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid x_j \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty, x_j \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}\} \subseteq l^{\infty}$. $(l^p, \|\cdot\|_p)$ und $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ sind Banachräume.

Für $e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} \in c_0 \cap l^p$ und $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in c_0$ oder l^p sehen wir

$$x^k := \sum_{j=1}^k x_j e_j \rightarrow x \quad \text{in } c_0 \text{ bzw. } l^p \text{ für } p < \infty,$$

also liegt $\text{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dicht in c_0 bzw. l^p für $p < \infty$ und

$$c_0 \text{ und } l^p \text{ für } p < \infty \text{ sind separabel.} \quad (1.1)$$

Betrachten wir dagegen $e_A = (e_{A,j})_{j \in \mathbb{N}} \in l^{\infty}$ für $A \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$e_{A,j} := \begin{cases} 1 & \text{für } j \in A, \\ 0 & \text{für } j \in \mathbb{N} - A, \end{cases}$$

so sehen wir

$$\|e_A - e_B\|_{l^\infty} = 1 \quad \text{für } A \neq B,$$

und die Bälle $B_{1/2}(e_A)$ sind paarweise disjunkt. Sei nun $D \subseteq l^\infty$ dicht, so gilt $D \cap B_{1/2}(e_A) \neq \emptyset$ für alle $A \subseteq \mathbb{N}$. Da die Bälle $B_{1/2}(e_A)$ paarweise disjunkt sind und $\{e_A | A \subseteq \mathbb{N}\} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist, muß auch D überabzählbar sein, und

$$l^\infty \text{ ist nicht separabel.} \quad (1.2)$$

10. Auf $C^0([0, 1], \mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \}$ setzen wir für $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{für } f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}).$$

Mit der Minkowski-Ungleichung definiert dies eine Norm auf $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ist nicht vollständig, also kein Banachraum.

11. Es sei μ ein Maß auf einer nichtleeren Menge X . Dann sind $L^p(\mu)$ für $1 \leq p \leq \infty$ mit der Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{für } f \in L^p(\mu)$$

und dem Satz von Riesz-Fischer Banachräume. Ist $\mu = \mathcal{L}^1$ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$, so ist $C^0([0, 1], \mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathcal{L}^1)$ ein dichter, nicht abgeschlossener Unterraum.

Für das Zählmaß $\mu = \nu$ auf $X = \mathbb{N}$, ist $L^p(\nu) = l^p$.

12. Für $e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} \in c_0$ bzw. l^p sehen wir für $i \neq j$

$$\begin{aligned} \|e_i - e_j\|_p &= 2^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \|e_i - e_j\|_{c_0} &= \|e_i - e_j\|_\infty = 1 \quad \text{für } p = \infty, \end{aligned}$$

also besitzt $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy- und insbesondere keine konvergente Teilfolge. Da $e_i \in \overline{B_1(0)} \subseteq c_0$ bzw. l^p im abgeschlossenen Einheitsball liegen, sehen wir, daß der abgeschlossene Einheitsball i.a. in Banachräumen nicht kompakt ist. Dies steht in Kontrast zum Satz von Heine-Borel, der insbesondere besagt, daß der abgeschlossene Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ kompakt ist. Tatsächlich gilt dies genau in endlich-dimensionalen normierten Räumen.

□

Proposition 1.1 *Auf endlich-dimensionalen normierten Räumen sind alle Normen äquivalent, insbesondere sind endlich-dimensionale normierte Räume vollständig, als Unterräume immer abgeschlossen und der abgeschlossene Einheitsball ist kompakt.*

Beweis:

Da jeder komplexe normierte Raum auch ein reeller normierter Raum ist und jeder endlich-dimensionale reelle Vektorraum zu einem $\mathbb{R}^n$ linear isomorph ist, genügt es $\mathbb{R}^n$ zu

betrachten. Hier genügt es zu zeigen, daß jede beliebige Norm $\| \cdot \|$ äquivalent zu $\| \cdot \|_2$ ist.

Wir sehen für die kanonische Basis $e_i \in \mathbb{R}^n$, $M := \sum_{i=1}^n \| e_i \|$ und der Dreiecksungleichung

$$\| x \| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \| e_i \| \leq M \| x \|_2 .$$

Zum Beweis der umgekehrten Abschätzung, bemerken wir mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\left| \| x \| - \| y \| \right| \leq \| x - y \| \leq M \| x - y \|_2 ,$$

also ist die Abbildung $x \mapsto \| x \|$ auf $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Konvergenz bezüglich $\| \cdot \|_2$ stetig. Da der Rand des Einheitsballs in $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Konvergenz kompakt ist, existiert

$$m := \min_{x \in \partial B_1(0)} \| x \| .$$

Da $\| x \| > 0$ für $x \neq 0$, sehen wir $m > 0$. Für $x \neq 0$ schreiben wir $x = \lambda \nu$ mit $\lambda = \| x \|_2$, $\nu = x / \| x \|_2 \in \partial B_1(0)$ und erhalten

$$\| x \| = \lambda \| \nu \| \geq \lambda m = m \| x \|_2 ,$$

und $\| \cdot \|$ und $\| \cdot \|_2$ sind äquivalent.

Daher sind Cauchy- und konvergente Folgen und abgeschlossene bzw. beschränkte bzw. kompakte Mengen in beiden Normen dieselben. Da $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\| \cdot \|_2$ vollständig ist, ist somit $\mathbb{R}^n$ auch bezüglich $\| \cdot \|$ vollständig. Da der abgeschlossene Einheitsball B bezüglich $\| \cdot \|$ abgeschlossen und beschränkt ist, ist B auch bezüglich $\| \cdot \|_2$ abgeschlossen und beschränkt. Mit dem Satz von Heine-Borel ist B kompakt bezüglich $\| \cdot \|_2$, also auch kompakt bezüglich $\| \cdot \|$.

///

Zum Beweis der Umkehrung beweisen wir der Satz vom fast orthogonalen Element, der von unabhängigem Interesse ist.

Proposition 1.2 (Satz vom fast orthogonalen Element) *Für einen abgeschlossenen Unterraum $Y \subseteq X$, $Y \neq X$, eines normierten Raumes X und $0 < \theta < 1$ existiert ein $x \in X$ mit*

$$\| x \| = 1, \theta \leq d(x, Y).$$

Beweis:

Wir wählen $x_0 \in X - Y \neq \emptyset$ und sehen $d(x_0, Y) > 0$, da Y abgeschlossen ist. Weiter wählen wir $y_0 \in Y$ mit

$$\| x_0 - y_0 \| \leq \theta^{-1} d(x_0, Y)$$

und setzen $x := (x_0 - y_0) / \| x_0 - y_0 \|$. Klarerweise gilt $\| x \| = 1$ und für alle $y \in Y$

$$\begin{aligned} \| x - y \| &= \| x_0 - (y_0 + \| x_0 - y_0 \| y) \| / \| x_0 - y_0 \| \geq \\ &\geq d(x_0, Y) / \| x_0 - y_0 \| \geq \theta . \end{aligned}$$

///

Proposition 1.3 Für jeden normierten Raum X gilt

$$\overline{B_1(0)} \text{ ist kompakt} \iff \dim X < \infty.$$

Beweis:

Nach Proposition 1.1 ist der abgeschlossene Einheitsball in endlich-dimensionalen normierten Räumen kompakt.

Also verbleibt die umgekehrte Richtung zu zeigen und wir nehmen an, daß der abgeschlossene Einheitsball in X kompakt ist. In diesem Fall existieren endlich viele $x_1, \dots, x_N \in \overline{B_1(0)} \subseteq X$ mit

$$\overline{B_1(0)} \subseteq \cup_{i=1}^N B_{1/2}(x_i).$$

Wir betrachten den endlich-dimensionalen Unterraum $Y := \text{span}\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq X$. Mit Proposition 1.1 ist Y vollständig, also abgeschlossen. Wäre $X \neq Y$, so existiert mit dem Satz vom fast orthogonalen Element, Proposition 1.2, ein $x \in X$ mit

$$\|x\| = 1, 1/2 \leq d(x, Y).$$

Daher gilt $x \in \overline{B_1(0)}$ und somit $x \in B_{1/2}(x_i)$ für ein $i \in \{1, \dots, N\}$. Dies ergibt

$$d(x, Y) \leq \|x - x_i\| < 1/2,$$

also ein Widerspruch, und somit ist $X = Y$ endlich-dimensional.

///

Wir fahren mit stetigen, linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen fort.

Definition 1.2 Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ zwischen normierten Räumen X, Y , d.h.

$$T(x + y) := Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

für $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, heißt beschränkt, wenn

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

und $L(X, Y)$ bezeichnet die Menge der beschränkten linearen Abbildungen zwischen X, Y . Im Fall von $Y = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist $X^* := L(X, \mathbb{R})$ bzw. $L(X, \mathbb{C})$ der Raum aller stetigen linearen Funktionale und heißt der Dualraum von X .

□

Bemerkungen:

1. Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn T nach obiger Definition beschränkt ist, und in diesem Fall ist T Lipschitzstetig.

2. Jedes lineare Funktional auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ hat die Form

$$\Lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

mit $(x_1, \dots, x_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\in \mathbb{C}^n$, und ist also stetig. Da auf endlich-dimensionalen normierten Räumen mit Proposition 1.1 alle Normen äquivalent sind, sind lineare Funktionale auf endlich-dimensionalen normierten Räumen stetig.

□

Proposition 1.4 Für X, Y normierte Räume ist $(L(X, Y), \|\cdot\|_{L(X, Y)})$ ein normierter Raum. Ist Y ein Banachraum, so ist auch $L(X, Y)$ ein Banachraum.

Beweis:

Für $T, S: X \rightarrow Y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist auch $\alpha T + \beta S$ linear. Sind T, S darüberhinaus beschränkt, so sehen wir

$$\|T + S\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T + S)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|Sx\| = \|T\| + \|S\| < \infty$$

und genauso $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$, und somit ist auch $\alpha T + \beta S \in L(X, Y)$ beschränkt. Weiter gilt $\|T\| \geq 0$, und im Fall $= 0$ folgt $T = 0$. Zusammen ist $(L(X, Y), \|\cdot\|_{L(X, Y)})$ ein normierter Raum.

Ist Y ein Banachraum und $T_n \in L(X, Y)$ eine Cauchyfolge, d.h. $\|T_n - T_m\| \rightarrow 0$. Dann sehen wir für $x \in X$

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \rightarrow 0,$$

also ist $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y , und somit konvergent $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x =: Tx$, da Y vollständig ist. Wir rechnen für $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T_n y = \alpha Tx + \beta Ty,$$

und damit ist T linear. Weiter gilt

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|T_m - T_n\| \|x\|,$$

also ist $T - T_n$ und somit auch T beschränkt und

$$\|T - T_n\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|T_m - T_n\| < \infty.$$

Schließlich sehen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|T_n - T_m\| = 0,$$

also $T_n \rightarrow T$ in $L(X, Y)$, und $L(X, Y)$ ist ein Banachraum.

///

Beispiele:

1. Für $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^p, y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^q, p^{-1} + q^{-1} = 1$, sehen wir mit der Hölderungleichung $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q < \infty$ und somit ist

$${}_p \langle x, y \rangle_{l^q} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

wohldefiniert und

$$|{}_p \langle x, y \rangle_{l^q}| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Damit definiert jedes $y \in l^q$ ein stetiges, lineares Funktional $\Lambda_y \in (l^p)^*$.

Für $y \in l^q, 1 < q < \infty$ setzen wir $x_j := \bar{y}_j |y_j|^{q-2}$ und sehen

$$\begin{aligned} \|x\|_p^p &= \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^{p(q-1)} = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q = \|y\|_q^q, \\ {}_p \langle x, y \rangle_{l^q} &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q = \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q, \end{aligned}$$

also

$$\|\Lambda_y\|_{(l^p)^*} = \|y\|_q. \quad (1.3)$$

Für $q = \infty, p = 1$ gilt $\|e_i\|_1 = 1$ für $y \neq 0$ und

$$\sup_{i=1}^{\infty} |{}_p \langle e_i, y \rangle_{l^q}| = \sup_{i=1}^{\infty} |y_i| = \|y\|_{\infty} = \|e_i\|_1 \|y\|_{\infty},$$

also wieder (1.3).

Für $q = 1, p = \infty$ sei $x_j = \bar{y}_j / |y_j|$ für $y_j \neq 0$ und $x_j = 0$ für $y_j = 0$. Dann gilt $\|x\|_{\infty} = 1$ für $y \neq 0$ und

$${}_p \langle x, y \rangle_{l^q} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| = \|y\|_1 = \|x\|_{\infty} \|y\|_1,$$

also wieder (1.3). Zusammen werden $l^q \hookrightarrow (l^p)^*$ normerhaltend eingebettet.

Betrachten wir $\bar{\Lambda}_y := \Lambda_y|_{c_0} \in (c_0)^*$ für $q = 1$, so sehen wir für $x^k = \sum_{j=1}^k x_j e_j \in c_0$ wie oben $\|x^k\|_{c_0} = 1$ für k groß und $y \neq 0$ und

$${}_p \langle x^k, y \rangle_{l^q} = \sum_{j=1}^k x_j y_j = \sum_{j=1}^k |y_j| = \|x^k\|_{\infty} \sum_{j=1}^k |y_j|,$$

also

$$\|\bar{\Lambda}_y\|_{(c_0)^*} \geq \sum_{j=1}^k |y_j| \rightarrow \|y\|_1$$

und $l^1 \hookrightarrow (c_0)^*$ wird normerhaltend eingebettet.

Für $1 < q \leq \infty$ und $\Lambda \in (l^p)^*$ bzw. $q = 1$ und $\Lambda \in (c_0)^*$ setzen wir $y_j := \Lambda e_j$. Für $y^k = \sum_{j=1}^k y_j e_j, x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $x^k = \sum_{j=1}^k x_j e_j$ sehen wir

$$|\Lambda_{y^k} x| = \left| \sum_{j=1}^k x_j y_j \right| = |\Lambda x^k| \leq \|x^k\|_p \|\Lambda\| \leq \|x\|_p \|\Lambda\|.$$

Da $y^k \in l^q$ erhalten wir mit (1.3)

$$\|y\|_q \leftarrow \|y^k\|_q = \|\Lambda_{y^k}\|_{(l^p)^*} \leq \|\Lambda\| < \infty$$

und $y \in l^q$. Da $x^k \rightarrow x$ in l^p für $p < \infty$ bzw. $x^k \rightarrow x$ in c_0 für $q = 1$, sehen wir

$$\Lambda x \leftarrow \Lambda x^k \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j = \Lambda_y x,$$

also $\Lambda = \Lambda_y$ und somit

$$\begin{aligned} (l^p)^* &= l^q \quad \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ (c_0)^* &= l^1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. Für einen normierten Raum X und zwei beschränkte, lineare Operatoren $T, S : X \rightarrow X$ ist die Komposition wieder ein beschränkter, linearer Operator mit

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Damit ist $L(X, X)$ eine normierte Algebra.

□

Proposition 1.5 (Neumann-Reihe) *Es sei $T : X \rightarrow X$ ein beschränkter, linearer Operator auf einem Banachraum X . Ist $\|T\| < 1$, so ist $I - T$ invertierbar, und die Inverse ist gegeben durch die Neumann-Reihe*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m.$$

Beweis:

Mit obiger Bemerkung sehen wir

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|T^m\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|T\|^m < \infty,$$

da $\|T\| < 1$, also ist die Reihe absolut konvergent, und somit konvergent, da $L(X, X)$ mit Proposition 1.4 ein Banachraum ist. Wir setzen $S := \sum_{m=0}^{\infty} T^m \in L(X, X)$ und rechnen

$$(I - T)S \leftarrow (I - T) \sum_{m=0}^M T^m = I - T^{M+1} \rightarrow I,$$

da $\|T^m\| \leq \|T\|^m \rightarrow 0$. Genauso gilt $S(I - T) = I$, also ist $I - T$ invertierbar mit Inverse S .

///

Bemerkung:

Für einen beschränkten, linearen Operator $T : X \rightarrow X$ erhalten wir mit obiger Bemerkung

$$\|T^{mk+l}\| \leq \|T^k\|^m \|T^l\|$$

und

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{l=0, \dots, k-1} \|T^{mk+l}\|^{1/(mk+l)} \leq \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{l=0, \dots, k-1} \left(\|T^k\|^{m/(mk+l)} \|T^l\|^{1/(mk+l)} \right) \leq \|T^k\|^{1/k}, \end{aligned}$$

also

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \|T^m\|^{1/m}.$$

Da die umgekehrte Gleichung für $\liminf$ trivial ist, erhalten wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \|T^m\|^{1/m}. \quad (1.5)$$

Mit dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|T^m\|$$

absolut, wenn

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \|T^m\|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} < 1$$

und wir sehen, daß obiger Satz auch unter dieser schwächeren Bedingung gilt.

□

2 Hilberträume

Definition 2.1 Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt auf einem reellen bzw. komplexem Vektorraum X ist eine Abbildung $\langle, \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned}\langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle, \\ \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle, \\ \langle y, x \rangle &= \overline{\langle x, y \rangle}, \\ \langle x, x \rangle &> 0 \quad \text{für } x \neq 0,\end{aligned}$$

für $x, x', y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, und $(X, \langle, \rangle)$ heißt ein innerer Produktraum.
Wir definieren die Norm durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

□

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind mit den Skalarprodukten $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$ für $z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ innere Produkträume.
2. Aus obiger Definition folgt leicht die sogenannte polare Identität für reelle innere Produkträume

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

und für komplexe innere Produkträume

$$4\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

bzw.

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2. \quad (2.1)$$

3. Aus obiger Definition folgt leicht die sogenannte Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (2.2)$$

□

Proposition 2.1 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) In einem inneren Produktraum $(X, \langle, \rangle)$ gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Beweis:

Es sei $a := \langle x, x \rangle, b := |\langle x, y \rangle|, c := \langle y, y \rangle$. Es existiert $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha \langle y, x \rangle = b$. Für $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$0 \leq \langle x - t\alpha y, x - t\alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - t\alpha \langle y, x \rangle - t\bar{\alpha} \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = a - 2bt + ct^2.$$

Ist $0 = c = \langle y, y \rangle$, so folgt $y = 0$ und $\langle x, y \rangle = 0$, also ist obige Ungleichung erfüllt.

In jedem Fall sind a, b, c reell und für $c \neq 0$ wählen wir $t = b/c \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$0 \leq a - 2b^2/c + cb^2/c^2 = a - b^2/c,$$

also $b^2 \leq ac$, und wieder ist obige Ungleichung erfüllt.

///

Proposition 2.2 In einem inneren Produktraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist $\| \cdot \|$ eine Norm im Sinne von Definition 1.1, und $(X, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum.

Beweis:

Klarerweise gilt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$, und für $\|x\| = 0$ folgt $\langle x, x \rangle = 0$ und somit $x = 0$.

Weiter gilt

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \|x\|^2,$$

also $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Es verbleibt die Dreiecksungleichung zu zeigen. Wir rechnen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

also $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

///

Definition 2.2 Ein innerer Produktraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dessen Norm vollständig ist, heißt ein Hilbertraum.

□

Beispiele:

1. $L^2(\mu)$ bzw. l^2 sind mit den Skalarprodukten

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} \, d\mu$$

bzw.

$$\langle (x_j)_{j \in \mathbb{N}}, (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j,$$

Hilberträume.

2. Allgemeiner ist für jede nichtleere Menge $I \neq \emptyset$ der Vektorraum $l^2(I) := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}, \sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \rangle := \sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i.$$

ein Hilbertraum. Wir setzen $l^2(\emptyset) = \{0\}$.

□

Bemerkung:

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigt, daß das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ stetig auf dem Produktraum ist. Insbesondere sind die Abbildungen

$$\begin{aligned}\Lambda^y : X &\rightarrow \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}, \Lambda^y(x) := \langle x, y \rangle, \\ \Lambda_x : X &\rightarrow \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}, \Lambda_x(y) := \langle x, y \rangle,\end{aligned}$$

für alle $x \in X, y \in Y$ linear bzw. konjugiert-linear, d.h. $\Lambda_x(iy) = -i\Lambda_x(y)$, und in beiden Fällen stetig. Wir sehen $\Lambda^y \in X^*$ und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\|\Lambda^y\| \leq \|y\|$. Andererseits gilt

$$\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \Lambda^y(y) \leq \|\Lambda^y\| \|y\|,$$

also $\|\Lambda^y\| = \|y\|$. Zusammen ist die Abbildung

$$y \mapsto \Lambda^y \tag{2.3}$$

eine konjugiert-lineare, normerhaltende Einbettung von X in seinen Dualraum X^* . Wir sehen unten im Satz von Riesz, Satz 2.1, daß diese Abbildung surjektiv, also ein konjugiert-linearer Isomorphismus ist.

□

Wir kommen zum Begriff der Orthogonalität.

Definition 2.3 In einem inneren Produktraum X heißen zwei Vektoren $x, y \in X$ orthogonal, geschrieben $x \perp y$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Weiter heißen $x \in X$ und $M \subseteq X$ orthogonal, geschrieben $x \perp M$, wenn $x \perp y$ für alle $y \in M$.

Das orthogonale Komplement von $x \in X$ ist die Menge $x^\perp := \{y \in X \mid x \perp y\}$ aller Vektoren, die zu x orthogonal sind. Weiter sei das orthogonale Komplement von $M \subseteq X$.

$$M^\perp := \bigcap_{x \in M} x^\perp.$$

$x^\perp$ und $M^\perp$ sind abgeschlossene Unterräume von X , da das Skalarprodukt linear bzw. konjugiert-linear und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung stetig ist. Weiter folgt mit der Stetigkeit des Skalarproduktes $M^\perp = \overline{M}^\perp$.

Ein System $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ heißt orthogonal, wenn $x_i \perp x_j$ für $i \neq j$, und ein System $(u_i)_{i \in I} \subseteq X$ heißt orthonormal, wenn

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}.$$

□

Beispiele:

1. In $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ bildet die kanonische Basis $e_i := (\delta_{ij})_{j=1, \dots, n}$ ein maximales Orthonormalsystem.
2. In $l^2(I)$ bildet $e_i := (\delta_{ij})_{j \in I}$ ein maximales Orthonormalsystem. Man beachte es gilt $\text{span}\{e_i \mid i \in I\} \neq l^2(I)$, wenn I unendlich ist.

3. Ein Orthonormalsystem $(u_i)_{i \in I} \subseteq X$ ist maximal genau dann, wenn

$$\{u_i \mid i \in I\}^\perp = \{0\}.$$

4. Für ein Orthogonalsystem $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2, \quad (2.4)$$

was dem Satz von Pythagoras entspricht.

□

Zuerst beweisen wir die konjugiert-lineare Isomorphie in (2.3) von Hilberträumen zu ihrem Dualraum. Wir beginnen mit folgender nützlicher Proposition.

Proposition 2.3 *Jede nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge M eines Hilbertraumes X besitzt ein eindeutiges Element kürzester Norm.*

Ist $M = x + Y$ affin mit einem abgeschlossenen Unterraum $Y \subseteq X$, so existiert $y \in Y$ mit

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= d(x, Y), \\ x - y &\perp Y. \end{aligned}$$

Beweis:

Wir wählen eine Minimalfolge $x_k \in M$ mit

$$\|x_k\| \rightarrow \inf_{x \in M} \|x\| =: d.$$

Da $(x_k + x_l)/2 \in M$ mit der Konvexität von M , folgt mit der Parallelogrammidentität (2.2)

$$\begin{aligned} \|x_k - x_l\|^2 &= 2\|x_k\|^2 + 2\|x_l\|^2 - 4\left\|\frac{x_k + x_l}{2}\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\|x_k\|^2 + 2\|x_l\|^2 - 4d^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } k, l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Damit ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, also konvergent, da X ein Hilbertraum ist, und wir erhalten $x_k \rightarrow x \in M$, da M abgeschlossen ist. Klarerweise gilt

$$\|x\| \leftarrow \|x_k\| \rightarrow d = \inf_{y \in M} \|y\|,$$

wie gewünscht.

Eindeutigkeit erhalten wir durch Folgenmischung. Dazu seien $x, x' \in M$ mit $\|x\| = \|x'\| = \inf_{y \in M} \|y\|$. Setzen wir $x_{2k} := x, x_{2k-1} := x'$ für $k \in \mathbb{N}$, so definiert dies eine Minimalfolge, ist also nach dem oben gezeigten konvergent. Dies ergibt

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = x',$$

also $x = x'$.

Für $M = x + Y$ wählen wir $z = x - y \in x + Y$ mit $\|z\| \leq \|x - y'\|$ für alle $y' \in Y$. Dies ergibt $\|x - y\| = d(x, Y)$ und weiter für alle $t \in \mathbb{R}, y' \in Y$

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\leq \|x - y - ty'\|^2 = \|x - y\|^2 + t\langle x - y, y'\rangle + t\langle y', x - y\rangle + t^2\|y'\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 + 2t\operatorname{Re}(\langle x - y, y'\rangle) + t^2\|y'\|^2. \end{aligned}$$

Differentiation bei $t = 0$ ergibt

$$\operatorname{Re}(\langle x - y, y'\rangle) = 0 \quad \text{für alle } y' \in Y.$$

Ersetzen wir für einen komplexen Hilbertraum X den Vektor y' durch iy' , so erhalten wir in jedem Fall

$$\langle x - y, y'\rangle = 0 \quad \text{für alle } y' \in Y,$$

also $x - y \perp Y$.

///

Damit können wir Hilberträume in direkte, orthogonale Summen zerlegen.

Proposition 2.4 *Es sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes X . Dann ist X die direkte Summe von Y und seinem orthogonalen Komplement*

$$X = Y \oplus Y^\perp.$$

Dies definiert die orthogonalen Projektionen $P_Y : X \rightarrow Y, I - P_Y : X \rightarrow Y^\perp$, und diese sind stetig mit

$$\|P_Y\|, \|I - P_Y\| \leq 1.$$

Beweis:

Klarerweise gilt $Y + Y^\perp \subseteq X$, und für $x \in Y \cap Y^\perp$ folgt $x \perp x$, also $\langle x, x \rangle = 0$ und $x = 0$. Daher gilt $Y \cap Y^\perp = \{0\}$, und obige Summe ist direkt.

Für $x \in X$ existiert mit Proposition 2.3 ein $y \in Y$ mit $y^\perp := x - y \in Y^\perp$, also $x = y + y^\perp$ und $X = Y + Y^\perp$. Zusammen folgt $X = Y \oplus Y^\perp$.

Die direkte, orthogonale Summenzerlegung definiert die orthogonale Projektionen $P_Y : X \rightarrow Y, I - P_Y : X \rightarrow Y^\perp$, und wir erhalten mit (2.4)

$$\|x\|^2 = \|P_Y x + (I - P_Y)x\|^2 = \|P_Y x\|^2 + \|(I - P_Y)x\|^2,$$

also

$$\|P_Y x\|, \|(I - P_Y)x\| \leq \|x\|$$

und $\|P_Y\|, \|I - P_Y\| \leq 1$.

///

Als Korollar erhalten wir folgende nützliche Charakterisierung von dichten Unterräumen in Hilberträumen.

Proposition 2.5 *Ein Unterraum Y eines Hilbertraumes X liegt dicht genau dann, wenn das orthogonale Komplement*

$$Y^\perp = \{0\}$$

trivial ist.

Beweis:

Da $Y^\perp = \bar{Y}^\perp$, erhalten wir mit der vorigen Proposition

$$X = \bar{Y} \oplus Y^\perp,$$

also gilt $X = \bar{Y}$ genau dann, wenn $Y^\perp = \{0\}$. Nach Definition liegt Y dicht in X genau dann, wenn $\bar{Y} = X$, und die Proposition folgt.

///

Satz 2.1 (Darstellungssatz von Riesz) *Es sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ein stetiges, lineares Funktional auf X . Dann existiert $y \in X$ mit*

$$\Lambda x = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

Insbesondere definiert die Abbildung in (2.3) einen konjugiert-linearen Isomorphismus von X in seinen Dualraum X^* .

Beweis:

Ist $\Lambda = 0$, so wählen wir $y = 0$. Ist $\Lambda \neq 0$, so ist $\ker \Lambda \neq X$ ein echter, abgeschlossener Unterraum von X , und nach der vorigen Proposition existiert ein $z \neq 0$ mit $z \perp \ker \Lambda$, insbesondere $z \notin \ker \Lambda$ und $\Lambda z \neq 0$.

Für beliebiges $x \in X$ sehen wir $\bar{x} := x - z\Lambda x/\Lambda z \in \ker \Lambda \perp z$, also

$$\langle x, z \rangle = \Lambda x \cdot \|z\|^2 / \Lambda z$$

und für $y := z\overline{\Lambda z} / \|z\|^2$

$$\langle x, y \rangle = \Lambda x.$$

///

Wir charakterisieren maximale Orthonormalsysteme in Hilberträumen und klassifizieren damit Hilberträume.

Proposition 2.6 (Bessel-Ungleichung) *In einem inneren Produktraum X gilt für jedes Orthonormalsystem $(u_i)_{i \in I} \subseteq X$*

$$\sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Insbesondere sind nur abzählbar viele innere Produkte $\langle x, u_i \rangle \neq 0$, und, falls X ein Hilbertraum ist, konvergiert die Reihe

$$\sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

in X .

Beweis:

Zum Beweis der Bessel-Ungleichung genügt es I endlich zu betrachten, und wir setzen

$$y := x - \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

Wir sehen

$$\langle y, u_j \rangle = \langle x, u_j \rangle - \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle = \langle x, u_j \rangle - \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \delta_{ij} = 0,$$

also bilden $y, u_i, i \in I$, ein Orthogonalsystem. Wir erhalten mit (2.4)

$$\|x\|^2 = \left\| y + \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i \right\|^2 = \|y\|^2 + \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 \geq \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2,$$

also die Bessel-Ungleichung.

Insbesondere sind nur abzählbar viele $\langle x, u_i \rangle \neq 0$, und wir betrachten $I = \mathbb{N}$. Wir setzen $x_n := \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$ und rechnen für $m \geq n$ mit (2.4)

$$\|x_m - x_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^m \langle x, u_i \rangle u_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m |\langle x, u_i \rangle|^2.$$

Da $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, u_i \rangle|^2 < \infty$, sehen wir, daß $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, also in einem Hilbertraum konvergent ist.

///

Proposition 2.7 *In einem Hilbertraum X sind folgende Aussagen für ein Orthonormalsystem $(u_i)_{i \in I} \subseteq X$ äquivalent.*

1. $x = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i$ für alle $x \in X$. (Fourierreihe)
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_i \rangle}$ für alle $x, y \in X$.
3. $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2$ für alle $x \in X$. (Parseval-Identität)
4. $\{u_i \mid i \in I\}^\perp = \{0\}$, d.h. $(u_i)_{i \in I}$ ist ein maximales Orthonormalsystem.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2.:

Wir rechnen mit 1., da alle Reihen mit der Bessel-Ungleichung, Proposition 2.6 abzählbar sind,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i, \sum_{j \in I} \langle y, u_j \rangle u_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_j \rangle} \delta_{ij} = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_i \rangle}, \end{aligned}$$

also 2.

//

2. $\Rightarrow$ 3.:

3. ist der Spezialfall von 2. für $x = y$.

//

3. $\Rightarrow$ 4.:

Für $x \perp u_i$ für alle $i \in I$ gilt mit 3.

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 = 0,$$

also $x = 0$ und $\{u_i \mid i \in I\}^\perp = \{0\}$.

//

4. $\Rightarrow$ 1.:

Da X ein Hilbertraum ist, konvergiert die Reihe in 1. mit Proposition 2.6, und wir setzen

$$y := x - \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i \in X.$$

Wir sehen

$$\langle y, u_j \rangle = \langle x, u_j \rangle - \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle = \langle x, u_j \rangle - \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \delta_{ij} = 0,$$

d.h. $y \perp u_i$ und $y \in \{u_i \mid i \in I\}^\perp = \{0\}$ mit 4., also $x = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i$, und wir haben 1.

///

Definition 2.4 In einem Hilbertraum heißt ein Orthonormalsystem, das eine und damit alle Bedingungen der obigen Proposition erfüllt, eine Orthonormalbasis.

□

Satz 2.2 Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis und ist isomorph zu $l^2(I)$, wobei I die Mächtigkeit einer Orthonormalbasis hat.

Beweis:

Mit dem Lemma von Zorn erhalten wir in jedem Hilbertraum X ein maximales Orthonormalsystem $(u_i)_{i \in I} \subseteq X$, was mit der obigen Proposition und Definition eine Orthonormalbasis ist.

Wir definieren $T : X \rightarrow l^2(I)$ durch

$$Tx := (\langle x, u_i \rangle)_{i \in I}.$$

Mit der Bessel-Ungleichung, Proposition 2.6, liegt Tx tatsächlich in $l^2(I)$, und T ist klarerweise linear. Genauer folgt mit Proposition 2.7 2.

$$\langle Tx, Ty \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_i \rangle} = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in X,$$

und T ist ein innerer Produktraum-Homomorphismus. Insbesondere gilt $\|Tx\| = \|x\|$, und T ist injektiv.

Für $(x_i)_{i \in I} \in l^2(I)$ gilt $\sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty$, und wie im Beweis von Proposition 2.6 konvergiert

$$x = \sum_{i \in I} x_i u_i \in X,$$

da X ein Hilbertraum ist. Wir rechnen

$$\langle x, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j \in I} x_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{j \in I} x_j \delta_{ji} = x_i,$$

also $Tx = (x_i)_{i \in I}$, und T ist surjektiv. Zusammen ist T ein Isomorphismus und $X \cong l^2(I)$.

///

3 Vollständigkeit

Wir kommen nun zu den Hauptsätzen der linearen Funktionalanalysis, diese sind das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, der Satz von der offenen Abbildung, der Satz vom abgeschlossenen Graphen und im nächsten Paragraphen der Satz von Hahn-Banach. Zum Beweis des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit beginnen wir mit dem Satz von Baire.

Satz 3.1 (Satz von Baire) (X, d) sei ein vollständiger, nichtleerer, metrischer Raum, und $A_k \subseteq X$ seien abgeschlossen mit leerem Inneren. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \neq X.$$

Beweis:

Wir wählen $x_0 \in X, \varrho_0 = 1$ und induktiv $x_k \in X, 0 < \varrho_k \leq 2^{-k}, k \in \mathbb{N}$ mit

$$B_{2\varrho_k}(x_k) \subseteq B_{\varrho_{k-1}}(x_{k-1}) - A_k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Diese Auswahl ist möglich, da $B_{\varrho_{k-1}}(x_{k-1}) - A_k$ offen und nichtleer ist, da $\text{int } A_k = \emptyset$ und A_k abgeschlossen ist.

Wir sehen

$$\overline{B_{\varrho_k}(x_k)} \subseteq \{x \in X \mid d(x, x_k) \leq \varrho_k\} \subseteq B_{2\varrho_k}(x_k),$$

und, da X vollständig ist, existiert

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B_{\varrho_k}(x_k)} \neq \emptyset,$$

und es gilt

$$x \in X - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

///

Bemerkungen:

1. Stärker folgt, daß $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ leeres Inneres hat, also $X - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ liegt dicht in X .

Denn angenommen $\emptyset \neq U \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, existiert $\overline{B_{\varrho}(x)} \subseteq U$. $\overline{B_{\varrho}(x)}$ ist ein vollständiger, nichtleerer Unterraum von X , $A_k \cap \overline{B_{\varrho}(x)}$ sind abgeschlossen. Weiter hat $A_k \cap \overline{B_{\varrho}(x)}$ leeres Inneres in $\overline{B_{\varrho}(x)}$, denn sei $V \cap \overline{B_{\varrho}(x)} \subseteq A_k \cap \overline{B_{\varrho}(x)}$ mit $V \subseteq X$ offen. Dann ist die offene Menge $V \cap \overline{B_{\varrho}(x)}$ in A_k enthalten, also $V \cap B_{\varrho}(x) = \emptyset$, da $\text{int } A_k = \emptyset$. Da V offen ist, folgt $V \cap \overline{B_{\varrho}(x)} = \emptyset$, und das Innere von $A_k \cap \overline{B_{\varrho}(x)}$ ist leer. Mit dem Satz von Baire folgt $\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap \overline{B_{\varrho}(x)}) \neq \overline{B_{\varrho}(x)}$. Dies ist ein Widerspruch.

2. Durch Komplementbildung erhält man, sind $U_k \subseteq X$ offen und dicht, so ist $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ dicht.

□

Lemma 3.1 (X, d) sei ein vollständiger, nichtleerer, metrischer Raum und $f_k, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und f_k stetig mit

$$f_k \rightarrow f \quad \text{punktweise auf } X.$$

Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X, \varrho > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_l(y) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_\varrho(x), l \geq k.$$

Beweis:

Wir betrachten die abgeschlossenen Mengen

$$A_k := \bigcap_{l=k}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} [|f_l - f_m| \leq \varepsilon]$$

und sehen $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Mit dem Satz von Baire, Satz 3.1, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\text{int } A_k \neq \emptyset$, d.h. es existiert ein $x \in X, \varrho > 0$ mit

$$|f_l(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_\varrho(x), l, m \geq k.$$

Lassen wir $m \rightarrow \infty$, so erhalten wir

$$|f_l(y) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_\varrho(x), l \geq k.$$

///

Satz 3.2 (Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit)

X, Y seien Banachräume und $T_i : X \rightarrow Y, i \in I$, beschränkte lineare Abbildungen mit

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in X.$$

Dann gilt

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

Beweis:

Wir betrachten die abgeschlossenen Mengen

$$A_k := \bigcap_{i \in I} \{x \in X \mid \|T_i x\| \leq k\}$$

und sehen mit obigen Voraussetzungen $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Mit dem Satz von Baire, Satz 3.1, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\text{int } A_k \neq \emptyset$, d.h. es existiert ein $x \in X, \varrho > 0$ mit

$$\|T_i y\| \leq k \quad \forall y \in B_\varrho(x), i \in I.$$

Daraus folgt für $h \in X$ mit $\|h\| < \varrho$

$$\|T_i h\| \leq \|T_i(x+h)\| + \|T_i x\| \leq 2k \quad \forall i \in I,$$

also

$$\|T_i\| \leq 2k\varrho^{-1} \quad \forall i \in I.$$

///

Beispiel:

Es sei $x_j \in \mathbb{C}$, so daß für alle $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^q, 1 \leq p, q \leq \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$, die Summe

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \in \mathbb{C}$$

konvergiert. Wir behaupten

$$x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^p.$$

Zum Beweis bemerken wir zuerst mit $\hat{y}_j = (\operatorname{sgn} \overline{x_j}) |y_j|, \hat{y} = (\hat{y}_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^q$, daß

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \hat{y}_j < \infty$$

absolut konvergiert. Nun setzen wir $x^k = \sum_{j=1}^k x_j e_j \in l^p$ mit $e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ und sehen für beliebiges $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^q$

$$| {}_{l^p} \langle x^k, y \rangle_{l^q} | = \left| \sum_{j=1}^k x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| < \infty.$$

Betrachten wir $x^k \in l^p \hookrightarrow (l^q)^*$, so folgt mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz 3.2, und (1.3)

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|x^k\|_p =: \Lambda < \infty,$$

insbesondere

$$\|x\|_p \leftarrow \|x^k\|_p \leq \Lambda$$

und $x \in l^p$.

□

Korollar 3.3 (Satz von Banach-Steinhaus) X, Y seien Banachräume und $T_n : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$, eine Folge beschränkter, linearer Abbildungen, die punktweise konvergieren

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \quad \text{für } x \in X.$$

Dann ist T eine beschränkte lineare Transformation.

Beweis:

Wir rechnen für $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T_n y = \alpha T x + \beta T y,$$

und T ist linear.

Da $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, ist diese Folge beschränkt, also

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty \quad \forall x \in X.$$

Mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz 3.2, folgt

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Daraus folgt

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq M \|x\| \quad \text{für } x \in X,$$

also ist T beschränkt mit $\|T\| \leq M$.

///

Bemerkung:

X, Y seien Banachräume und $T_n : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$, eine Folge beschränkter, linearer Abbildungen, die punktweise auf einer dichten Menge $D \subseteq X$ konvergieren

$$Ty := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n y \quad \text{für } y \in D,$$

und deren Norm beschränkt

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty \tag{3.1}$$

sind.

Dann wählen wir für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $y \in D$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ und sehen

$$\limsup_{n, m \rightarrow \infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \limsup_{n, m \rightarrow \infty} \left(\|T_n y - T_m y\| + \|(T_n - T_m)(x - y)\| \right) \leq 2M\varepsilon,$$

also ist $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und somit konvergiert

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Wie oben sehen wir, daß T linear ist und mit (3.1) folgt $\|T\| \leq M$, und T ist beschränkt. Da (3.1) vorausgesetzt wird, folgt dies ohne Verwendung des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz 3.2.

□

Satz 3.4 (Satz von der offenen Abbildung) X, Y seien Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ beschränkte lineare Abbildung. Ist T surjektiv, so ist T eine offene Abbildung.

Beweis:

Da T surjektiv ist, gilt

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n(0))},$$

und mit dem Satz von Baire, 3.1, folgt, daß eine dieser Mengen nichtleeres Inneres hat, z.B.

$$B_\varrho(\bar{y}) \subseteq \overline{T(B_{n_0}(0))}.$$

Da T surjektiv ist, können wir $\bar{x} \in X$ mit $T\bar{x} = \bar{y}$ wählen und sehen

$$B_\varrho(0) = B_\varrho(\bar{y}) - T\bar{x} \subseteq \overline{T(B_{n_0}(0))} - T\bar{x} = \overline{T(B_{n_0}(0))} - T\bar{x} =$$

$$= \overline{T(B_{n_0}(0) - \bar{x})} \subseteq \overline{T(B_{n_1}(0))}$$

für $n_1 \geq n_0 + \|\bar{x}\|$. Setzen wir $\delta := \varrho/n_1$, so erhalten wir

$$B_\delta(0) \subseteq \overline{T(B_1(0))}.$$

Also existiert für $y \in B_\delta(0)$ ein $x \in B_1(0)$ mit $y - Tx \in B_{\delta/2}(0)$, also

$$2(y - Tx) \in B_\delta(0).$$

Wir setzen $y_0 := y \in B_\delta(0)$, wählen rekursiv $x_k \in B_1(0)$ mit $y_{k+1} := 2(y_k - Tx_k) \in B_\delta(0)$. Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|2^{-k}x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \leq 2$$

und X vollständig ist, konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}x_k = x \in B_2(0)$. Mit der Stetigkeit von T folgt

$$Tx \leftarrow \sum_{k=0}^K T(2^{-k}x_k) = y_0 - 2^{-K-1}y_{K+1} \rightarrow y_0 = y,$$

also

$$B_\delta(0) \subseteq T(B_2(0)). \quad (3.2)$$

Nun sei $U \subseteq X$ offen und $y \in T(U)$. Dann existiert $x \in U$ mit $Tx = y$ und $B_\varrho(x) \subseteq U$ für ein $\varrho > 0$. Mit (3.2) sehen wir

$$T(U) \supseteq T(B_\varrho(x)) = T(B_\varrho(0) + x) \supseteq B_{\delta\varrho/2}(0) + y = B_{\delta\varrho/2}(y),$$

und $T(U)$ ist offen.

///

Korollar 3.5 (Satz von der stetigen Inverse) X, Y seien Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ eine bijektive beschränkte lineare Abbildung. Dann ist auch die Inverse T^{-1} stetig.

Beweis:

Da T surjektiv ist, ist T mit Satz von der offenen Abbildung, Satz 3.4, eine offene Abbildung. Dies ergibt für die Inverse T^{-1} und offene Menge $U \subseteq X$, daß $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ wieder offen ist, also T^{-1} stetig ist.

///

Korollar 3.6 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) X, Y seien Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ lineare Abbildung, deren Graph $\text{graph } T = \{(x, Tx) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ in der Produktnorm $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$ abgeschlossen ist. Dann ist T stetig.

Beweis:

Klarerweise ist $\text{graph } T \subseteq X \times Y$ ein Unterraum. Weiter ist $X \times Y$ und somit auch der abgeschlossene Unterraum $\text{graph } T$ ein Banachraum. Wir betrachten die Projektionen $\pi_X : \text{graph } T \hookrightarrow X \times Y \rightarrow X, \pi_Y : \text{graph } T \hookrightarrow X \times Y \rightarrow Y$, die beide stetig sind. Da

$\pi_X(x, Tx) = x$, ist π_X bijektiv, also ist mit dem Satz von der stetigen Inverse, Satz 3.5, die Inverse π_X^{-1} stetig. Beachten wir

$$(\pi_Y \circ \pi_X^{-1})(x) = \pi_Y(x, Tx) = Tx,$$

so ist $T = \pi_Y \circ \pi_X^{-1}$ als Verkettung wieder stetig.

///

Bemerkung:

Der Graph von T ist abgeschlossen genau dann, wenn

$$x_n \rightarrow x \in X, Tx_n \rightarrow y \in Y \implies Tx = y.$$

□

4 Trennungssätze

In diesem Paragraphen behandeln wir einen weiteren Hauptsatz der linearen Funktionalanalysis, den Satz von Hahn-Banach.

Satz 4.1 (Satz von Hahn-Banach) *Es sei X ein reeller, normierter Vektorraum, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear, d.h.*

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \quad \text{für } x, y \in X, \\ p(\alpha x) &= \alpha p(x) \quad \text{für } x \in X, \alpha \geq 0, \end{aligned}$$

und $\Lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf dem Unterraum $Y \subseteq X$ mit

$$\Lambda y \leq p(y) \quad \text{für } y \in Y.$$

Dann existiert eine lineare Erweiterung $\tilde{\Lambda} : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} y &= \Lambda y \quad \text{für } y \in Y, \\ \tilde{\Lambda} x &\leq p(x) \quad \text{für } x \in X. \end{aligned}$$

Beweis:

Ist $Y = X$, so folgt die Behauptung trivial. Andernfalls, existiert ein $z \in X - Y$, und wir setzen $\Lambda_0 : Y \oplus \text{span}\{z\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Lambda_0(y + \alpha z) := \Lambda y + c\alpha \quad \forall y \in Y, \alpha \in \mathbb{R},$$

und ein $c \in \mathbb{R}$, das wir unten wählen. Klarerweise ist Λ_0 für jedes $c \in \mathbb{R}$ linear, das Λ fortsetzt. Weiter soll

$$\Lambda_0 x \leq p(x) \quad \text{für } x \in Y \oplus \{z\}$$

bzw.

$$\Lambda y + c\alpha \leq p(y + \alpha z) \quad \text{für } y \in Y, \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

gelten. Für $\alpha = 0$ ist dies nach Voraussetzung $\Lambda \leq p$ auf Y erfüllt. Für $\alpha > 0$ ist (4.1) äquivalent zu

$$c \leq \frac{p(y + \alpha z) - \Lambda y}{\alpha} = p\left(\frac{y}{\alpha} + z\right) - \Lambda\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

und für $\alpha < 0$ ist (4.1) äquivalent zu

$$c \geq \frac{p(y + \alpha z) - \Lambda y}{\alpha} = \Lambda\left(-\frac{y}{\alpha}\right) - p\left(-\frac{y}{\alpha} - z\right).$$

Zusammen erfüllt c die Bedingung (4.1) genau dann, wenn

$$\sup_{y \in Y} \left(\Lambda y - p(y - z) \right) \leq c \leq \inf_{y \in Y} \left(p(y + z) - \Lambda y \right). \tag{4.2}$$

Für $y, y' \in Y$ gilt

$$\Lambda y + \Lambda y' = \Lambda(y + y') \leq p(y + y') \leq p(y + z) + p(y' - z),$$

also

$$\Lambda y' - p(y' - z) \leq p(y + z) - \Lambda y,$$

und es existiert $c \in \mathbb{R}$, das (4.2) und somit (4.1) erfüllt. Insgesamt können wir Λ zu Λ_0 auf $Y \oplus \text{span}\{z\}$ mit $\Lambda_0 \leq p$ fortsetzen.

Nun betrachten wir die Familie $\mathcal{F}$ aller linearen Fortsetzungen Λ_0 von Λ mit $\Lambda_0 \leq p$ auf Unterräume $Y \subseteq Z \subseteq X$. Da $\Lambda \in \mathcal{F}$, gilt $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Wir ordnen $\mathcal{F}$ durch Inklusion, d.h. $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$ für $\Lambda_i \in \mathcal{F}, \Lambda_i : Z_i \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann, wenn

$$Z_1 \subseteq Z_2 \text{ und } \Lambda_2|_{Z_1} = \Lambda_1.$$

Nun sei $\{\Lambda_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}, \Lambda_i : Z_i \rightarrow \mathbb{R}, I \neq \emptyset$, eine vollgeordnete Unterfamilie, d.h. für $i, j \in I$ gilt $\Lambda_i \prec \Lambda_j$ oder $\Lambda_j \prec \Lambda_i$. Wir setzen $Z_0 := \cup_{i \in I} Z_i \subseteq X$ und $\Lambda_0 : Z_0 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Lambda_0 x := \Lambda_i x \quad \text{für } x \in Z_0 \text{ und } i \in I \text{ mit } x \in Z_i.$$

Für $x \in Z_0$ und $i, j \in I$ mit $x \in Z_i \cap Z_j$ nehmen wir wieder o.B.d.A. $\Lambda_i \prec \Lambda_j$ an, da $\{\Lambda_i\}_{i \in I}$ vollgeordnet ist, und sehen $\Lambda_i x = \Lambda_j x$, also ist Λ_0 wohldefiniert. Klarerweise ist Λ_0 eine Fortsetzung aller Λ_i mit $\Lambda_0 \leq p$.

$Z_0 \supseteq Y$ ist ein Unterraum. Dazu betrachten wir $x_1, x_2 \in Z_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Es existieren $i, j \in I$ mit $x_1 \in Z_i, x_2 \in Z_j$. Wieder können wir o.B.d.A. $\Lambda_i \prec \Lambda_j$ annehmen, also $x_1 \in Z_i \subseteq Z_j$ und $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in Z_j \subseteq Z_0$. Weiter gilt

$$\Lambda_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \Lambda_j(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \Lambda_j x_1 + \alpha_2 \Lambda_j x_2 = \alpha_1 \Lambda_0 x_1 + \alpha_2 \Lambda_0 x_2,$$

und Λ_0 ist linear, also $\Lambda_i \prec \Lambda_0 \in \mathcal{F}$.

Mit dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{F}, \tilde{\Lambda} : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt $\tilde{Y} \neq X$, so existiert nach obiger Konstruktion eine echte Fortsetzung $\Lambda_0 \in \mathcal{F}$ von $\tilde{\Lambda}$, d.h. $\tilde{\Lambda} \prec \Lambda_0, \tilde{\Lambda} \neq \Lambda_0$. Da $\tilde{\Lambda}$ in $\mathcal{F}$ maximal ist, ist dies unmöglich. Daher gilt $\tilde{Y} = X$ und $\tilde{\Lambda} : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine gewünschte Fortsetzung von Λ .

///

Satz 4.2 (Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale) *Es sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $\Lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ein stetiges, lineares Funktional auf einem Unterraum $Y \subseteq X$. Dann existiert eine stetige, lineare Erweiterung $\tilde{\Lambda} : X \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit*

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|.$$

Beweis:

Zuerst betrachten wir einen reellen, normierten Vektorraum X und ein reelles, stetiges lineares Funktional $\Lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Wir setzen

$$p(x) := \|\Lambda\| \|x\| \quad \text{für } x \in X.$$

p ist sublinear, und $\Lambda \leq p$ auf Y . Mit dem Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, existiert eine lineare Fortsetzung $\tilde{\Lambda}$ von Λ auf X mit $\tilde{\Lambda} \leq p$. Wir rechnen

$$\pm \tilde{\Lambda} x = \tilde{\Lambda}(\pm x) \leq p(\pm x) = \|\Lambda\| \|x\| \quad \text{für } x \in X.$$

Damit ist $\tilde{\Lambda}$ stetig und $\|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$.

Nun sei X ein komplexer, normierter Vektorraum und $\Lambda : Y \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetiges, komplex-lineares Funktional auf $Y \subseteq X$. $\sigma := \operatorname{Re} \Lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein stetiges, reell-lineares Funktional auf X mit $\|\sigma\| = \|\Lambda\|$. Betrachten wir X als reellen, normierten Vektorraum, so existiert nach dem oben Bewiesenen eine stetige, reell-lineare Fortsetzung $\tilde{\sigma} : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|\tilde{\sigma}\| = \|\sigma\|$. Wir definieren $\tilde{\Lambda} : X \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{\Lambda}x := \tilde{\sigma}x - i\tilde{\sigma}(ix). \quad (4.3)$$

Klarerweise ist $\tilde{\Lambda}$ reell-linear. Weiter gilt

$$\tilde{\Lambda}(ix) = \tilde{\sigma}(ix) - i\tilde{\sigma}(i^2x) = i\tilde{\sigma}x - i^2\tilde{\sigma}(ix) = i\tilde{\Lambda}x,$$

und $\tilde{\Lambda}$ ist komplex-linear. Für $x \in Y$ gilt

$$\sigma(ix) = \operatorname{Re} \Lambda(ix) = \operatorname{Re}(i\Lambda x) = -\operatorname{Im} \Lambda x,$$

also

$$\Lambda x = \sigma x - i\sigma(ix) = \tilde{\sigma}x - i\tilde{\sigma}(ix) = \tilde{\Lambda}x,$$

und $\tilde{\Lambda}$ ist eine Fortsetzung von Λ .

Für $x \in X$ wählen wir $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$ mit $\alpha\tilde{\Lambda}x = |\tilde{\Lambda}x|$. Dies ergibt

$$|\tilde{\Lambda}x| = \alpha\tilde{\Lambda}x = \operatorname{Re} \tilde{\Lambda}(\alpha x) = \tilde{\sigma}(\alpha x) \leq \|\tilde{\sigma}\| \|\alpha x\| = \|\Lambda\| \|x\|,$$

also ist $\tilde{\Lambda}$ stetig und $\|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$.

///

Korollar 4.3 Für einen Unterraum $Y \subseteq X$ und $x \in X$ gilt

$$d(x, Y) = \max\{|\Lambda x| \mid \Lambda \in X^*, \Lambda|_Y = 0, \|\Lambda\| \leq 1\}. \quad (4.4)$$

Insbesondere gilt

$$\|x\| = \max_{\|\Lambda\| \leq 1, \Lambda \in X^*} |\Lambda x|, \quad (4.5)$$

$$x \in \overline{Y} \iff \left(\forall \Lambda \in X^* : \Lambda|_Y = 0 \implies \Lambda x = 0 \right), \quad (4.6)$$

und Y liegt dicht genau dann, wenn für alle stetigen linearen Funktionale Λ auf X

$$\Lambda|_Y = 0 \implies \Lambda = 0. \quad (4.7)$$

Beweis:

Für $\Lambda \in X^*, \Lambda|_Y = 0, \|\Lambda\| \leq 1$ und $y \in Y$ mit $\|x - y\| \leq d(x, Y) + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ sehen wir

$$|\Lambda x| = |\Lambda(x - y)| \leq \|\Lambda\| \|x - y\| \leq d(x, Y) + \varepsilon,$$

also gilt $\geq$ in (4.4). Zum Beweis von $\leq$ betrachten wir die eindeutige lineare Abbildung $\tilde{\Lambda} : Y + \operatorname{span}\{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit $\tilde{\Lambda} = 0$ auf Y und $\tilde{\Lambda}x = d(x, Y)$. Für $z = \alpha x + y \in \operatorname{span}\{x\} + Y, \alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}, y \in Y$ rechnen wir

$$\|z\| = \|\alpha x + y\| \geq d(\alpha x, Y) = |\alpha| d(x, Y) = |\tilde{\Lambda}z|,$$

und erhalten

$$\|\tilde{\Lambda}\| \leq 1.$$

Mit dem Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, existiert eine stetige, lineare Erweiterung Λ von $\tilde{\Lambda}$ auf X mit $\|\Lambda\| \leq 1$, also $\Lambda \in X^*$, $\Lambda|_Y = 0$, $\Lambda x = d(x, Y)$. Dies ergibt (4.4).

(4.5) folgt aus (4.4) mit $Y = \{0\}$, (4.6) folgt aus (4.4), da $x \in \overline{Y} \Leftrightarrow d(x, Y) = 0$, und (4.7) folgt aus (4.6).

///

Schließlich verwenden wir den Satz von Hahn-Banach, Satz 4.1, um konvexe Mengen zu trennen.

Satz 4.4 (Trennungssatz von Hahn-Banach) *Es sei X ein normierter Raum, $A, B \subseteq X$ nichtleere, disjunkte, konvexe Mengen.*

Ist A offen, so existiert ein stetiges, lineares Funktional Λ auf X und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} \Lambda a < \gamma \leq \operatorname{Re} \Lambda b \quad \text{für alle } a \in A, b \in B.$$

Ist A kompakt und B abgeschlossen, so existiert ein stetiges, lineares Funktional Λ auf X und $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} \Lambda a < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} \Lambda b \quad \text{für alle } a \in A, b \in B.$$

Beweis:

Zuerst betrachten wir einen reellen, normierten Vektorraum X und A offen. Wir wählen $a_0 \in A, b_0 \in B$ und setzen $x_0 := b_0 - a_0, C := A - B + x_0$. Dann ist C eine konvexe offene Umgebung von 0 , z.B. $B_\delta(0) \subseteq C$.

Wir definieren das Minkowski-funktional zu C

$$p(x) := \inf \{ t > 0 \mid x/t \in C \}.$$

Klarerweise gilt $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ für $\alpha \geq 0$, wobei wir beachten, dass $p(0) = 0$. Zu $p(x) < t$ existiert $p(x) \leq s < t, s > 0$, mit $x/s \in C$, also

$$x/t = (s/t)(x/s) + (1 - s/t)0 \in C.$$

Damit sehen wir für $x, y \in X, p(x) < t, p(y) < s$, daß

$$(x + y)/(t + s) = \frac{t}{t + s}(x/t) + \frac{s}{t + s}(y/s) \in C,$$

also $p(x + y) \leq t + s$ und

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Zusammen ist p subadditiv. Für $t > \|x\|/\delta$ gilt $x/t \in B_\delta(0) \subseteq C$, also

$$p(x) \leq \|x\|/\delta. \quad (4.8)$$

Weiter sehen wir für $x \in C$ und C offen, daß $x/t \in C$ für ein $t < 1$, also

$$p(x) < 1 \quad \text{für } x \in C.$$

Da A und B disjunkt sind, gilt $x_0 \notin C$ und daher

$$p(x_0) \geq 1.$$

Nun definieren wir das lineare Funktional $\Lambda_0 : \text{span}\{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\Lambda_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$. Wir sehen

$$\Lambda_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) = \begin{cases} = p(\alpha x_0) & \text{für } \alpha > 0, \\ \leq 0 \leq p(\alpha x_0) & \text{für } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Zusammen folgt $\Lambda_0 \leq p$ und mit dem Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, existiert ein lineares Funktional $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Lambda x_0 = \Lambda_0 x_0 = p(x_0) \geq 1$$

und $\Lambda \leq p$. Für beliebiges $x \in X$ sehen wir mit (4.8)

$$\pm \Lambda x = \Lambda(\pm x) \leq p(\pm x) \leq \|x\|/\delta,$$

und Λ ist stetig. Weiter gilt für $a \in A, b \in B$, daß

$$\Lambda a - \Lambda b + 1 \leq \Lambda(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1,$$

also $\Lambda a < \Lambda b$. Setzen wir $\gamma := \sup_{a \in A} \Lambda a \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$\Lambda a \leq \gamma \leq \Lambda b \quad \text{für } a \in A, b \in B.$$

Da A offen ist und jedes nicht-konstante lineare Funktional eine offene Abbildung ist, ist ΛA offen, und wir sehen $\gamma = \sup \Lambda A \notin \Lambda A$. Dies ergibt

$$\Lambda a < \gamma \leq \Lambda b \quad \text{für } a \in A, b \in B.$$

Nun sei A kompakt und B abgeschlossen. Dann gilt $d(A, B) > 0$, denn andernfalls gäbe es $a_n \in A, b_n \in B$ mit $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$. Da A kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge $a_n \rightarrow a \in A$ und damit auch $b_n \rightarrow a$. Da B abgeschlossen ist, folgt $a \in A \cap B$ im Widerspruch zu Disjunktheit von A und B . Daher existiert $\delta > 0$ mit $A_\delta := A + B_\delta(0)$ offen und disjunkt zu B . Nach dem oben Bewiesenen existiert ein stetiges, lineares Funktional Λ auf X und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\Lambda a < \gamma \leq \Lambda b \quad \text{für alle } a \in A + B_\delta(0), b \in B.$$

Nun ist $\Lambda A \subseteq]-\infty, \gamma[$ kompakt, also $\sup \Lambda A < \gamma$. Wählen wir $\sup \Lambda A < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma$, so folgt die Behauptung.

Nun sei X ein komplexer, normierter Vektorraum. Betrachten wir X als reellen, normierten Vektorraum, so existiert nach dem oben Bewiesenen eine stetiges, reell-lineares Funktional $\sigma : X \rightarrow \mathbb{R}$, das die entsprechenden Behauptungen erfüllt. Definieren wir $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ wie in (4.3) durch $\Lambda x := \sigma x - i\sigma(ix)$, so ist Λ stetig, komplex-linear, $\text{Re} \Lambda = \sigma$, und die Behauptung folgt.

///

Definition 4.1 Ein abgeschlossener Unterraum Y eines Banachraumes X heißt komplementierbar, wenn ein abgeschlossener Unterraum $Z \subseteq X$ existiert mit

$$X = Y \oplus Z,$$

d.h. $X = Y + Z, Y \cap Z = \{0\}$.

□

Proposition 4.1 Es sei X ein Banachraum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Ist

$$\dim Y < \infty \quad \text{oder} \quad \text{codim } Y < \infty,$$

so ist Y in X komplementierbar.

Beweis:

Ist Y endlich-dimensional, so wählen wir eine Basis $y_1, \dots, y_n$ von Y und betrachten die duale Basis $y_1^*, \dots, y_n^*$ von Y^* , d.h. y_j^* sind die eindeutigen linearen Funktionale auf Y mit $\langle y_j^*, y_i \rangle = \delta_{ij}$. Mit der Bemerkung nach Definition 1.2 sind y_j^* stetig auf Y und mit dem Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, existieren stetige, lineare Fortsetzungen $x_j^* \in X^*$. Dann ist $Z := \bigcap_{j=1}^n \ker x_j^*$ ein abgeschlossener Unterraum von X . Für $x \in X$ setzen wir

$$y := \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x \rangle y_i \in Y$$

und sehen

$$\langle x_j^*, x - y \rangle = \langle x_j^*, x \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x \rangle \langle x_j^*, y_i \rangle = \langle x_j^*, x \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x \rangle \delta_{ij} = 0,$$

also $z := x - y \in \bigcap_{j=1}^n \ker x_j^* = Z, x = y + z$, und $X = Y + Z$.

Für $y \in Y \cap Z$ gilt $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ für geeignete $\alpha_i \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Weiter sehen wir

$$0 = \langle x_j^*, y \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_j^*, y_i \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j,$$

also $y = 0$ und $Y \cap Z = \{0\}$. Zusammen folgt $X = Y \oplus Z$.

Die Quotientenabbildung $\pi : X \rightarrow X/Y$ ist stetig und surjektiv. Ist $\dim(X/Y) < \infty$, so wählen wir eine Basis $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ von X/Y und x_i mit $\pi(x_i) = \bar{v}_i$. Mit Proposition 1.1 ist der endlich-dimensionale Unterraum $Z := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ abgeschlossen. Da $\pi(Z) = \text{span}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} = X/Y$, existiert zu jedem $x \in X$ ein $z \in Z$ mit $z + Y = \pi(z) = \pi(x) = x + Y$, also $x - z \in Y$ und $X = Y + Z$. Für $z \in Y \cap Z$ gilt $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ für geeignete $\alpha_i \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Wir sehen

$$0 = \pi(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i,$$

also $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$, da $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ linear unabhängig sind, und somit $y = 0$ und $Y \cap Z = \{0\}$. Zusammen folgt $X = Y \oplus Z$.

///

Proposition 4.2 *Ein abgeschlossener Unterraum Y eines Banachraumes X ist komplementierbar genau dann, wenn eine stetige Projektion P von X auf Y existiert, d.h. $P \in L(X, X), P^2 = P, \text{im } P = Y$.*

Genauer ist für jede durch eine Zerlegung $X = Y \oplus Z$ in abgeschlossene Unterräume definierte Projektion $P : X \rightarrow Y, \ker P = Z$ stetig.

Beweis:

Für eine stetige Projektion P von X auf Y ist $Z := \ker P$ ein abgeschlossener Unterraum. Klarerweise gilt $x = Px + (I - P)x$ für $x \in X$ mit $Px \in Y$ und

$$P(I - P)x = P^2x - Px = 0,$$

also $(I - P)x \in \ker P = Z$ und somit $X = Y + Z$. Für $y \in Y \cap Z$ sehen wir $y \in Y = \text{im } P$, also existiert $x \in X$ mit $Px = y$. Dies ergibt $y = Px = P^2x = Py = 0$, also $Y \cap Z = \{0\}$ und $X = Y \oplus Z$.

Ist Y komplementierbar $X = Y \oplus Z$ mit einem abgeschlossenen Unterraum Z , so hat jedes $x \in X$ eine eindeutige Darstellung $x = y + z$ mit $y \in Y, z \in Z$. Wir definieren $Px := y$. Klarerweise ist P linear und $\text{im } P \subseteq Y$. Da $y = y + 0$, folgt $y = Py \in Y$, also $\text{im } P = Y$. Da $z = 0 + z$, folgt $Pz = 0$, also $Z \subseteq \ker P$. Ist andererseits $x = y + z \in \ker P$, so folgt $0 = Px = y$, also $x = z \in Z$ und $\ker P = Z$. Weiter sehen wir $P^2x = Py = y = Px$, also $P^2 = P$, und P ist eine Projektion von X auf Y .

Schließlich zeigen wir mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz 3.6, daß P stetig ist. Dazu sei $x_n \in X$ mit $x_n \rightarrow x, y_n := Px_n \rightarrow y$. Da $y_n \in \text{im } Y$ und Y abgeschlossen ist, folgt $y \in Y$. Weiter gilt $x_n - y_n = (I - P)x_n \in Z$ und $z := x - y \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) \in Z$, da Z abgeschlossen ist. Dies ergibt $x = y + z$ mit $y \in Y, z \in Z$, also $y = Px \leftarrow Px_n$ und P ist mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz 3.6, stetig.

///

Teil II

Dualität in Banachräumen

5 Schwache Topologie

Definition 5.1 Es sei X ein Banachraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Auf X definieren wir die schwache Topologie als die durch die stetigen, linearen Funktionale $\Lambda \in X^*, \Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, erzeugte Topologie auf X .

Auf X^* definieren wir die schwach*-Topologie als die durch die Abbildungen $\Lambda_x^* : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

$$\Lambda \mapsto \Lambda x \quad \text{für } x \in X$$

erzeugte Topologie auf X^* .

□

Bemerkungen:

1. Entsprechend Definition A.9 bildet

$$\{\Lambda^{-1}(U) \mid \Lambda \in X^*, U \subseteq \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C} \text{ offen} \}$$

eine Subbasis der schwachen Topologie und

$$\{\Lambda_x^{*,-1}(U) \mid x \in X, U \subseteq \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C} \text{ offen} \}$$

eine Subbasis der schwach*-Topologie.

2. Da die stetigen, linearen Funktionale stetig auf X mit der durch die Norm erzeugte Topologie sind, ist die schwache Topologie gröber als die Normtopologie auf X . D.h. jede schwach offene bzw. schwach abgeschlossene Menge ist bezüglich der Norm auch offen bzw. abgeschlossen. Insbesondere umfaßt für $A \subseteq X$ der schwache Abschluß $\bar{A}_w$ von A den Normabschluß $\bar{A}$, d.h.

$$\bar{A} \subseteq \bar{A}_w. \tag{5.1}$$

Daher heißt die Normtopologie auch starke Topologie, und Konvergenz in der Norm heißt starke Konvergenz.

3. Klarerweise trägt X^* als Banachraum eine schwache Topologie, die durch die stetigen, linearen Funktionale X^{**} auf X^* erzeugt wird. Die obigen Abbildungen Λ_x^* sind stetige, lineare Funktionale auf X^* , und daher ist die schwach*-Topologie auf X^* gröber als die schwache Topologie auf X^* .
4. Für $x \neq y \in X$ sei $z := y - x \neq 0$ und mit dem Korollar 4.3 zum Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, existiert ein stetiges, lineares Funktional $\Lambda \in X^*$ mit $\Lambda z \neq 0$, also $\Lambda x \neq \Lambda y$ und X^* ist punktetrennend auf X . Mit der Bemerkung 5. nach Definition A.9 ist X mit der schwachen Topologie ein Hausdorff-Raum.

5. Klarerweise gilt für $\Lambda, \tilde{\Lambda} \in X^*$

$$\left(\forall x \in X : \Lambda x = \tilde{\Lambda} x \right) \implies \Lambda = \tilde{\Lambda},$$

und daher ist $\{\Lambda_x^* : X^* \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C} \mid x \in X\}$ punktgetrennend auf X^* , und mit der Bemerkung 5. nach Definition A.9 ist X^* mit der schwach*-Topologie ein Hausdorff-Raum.

6. Eine Folge x_k in X konvergiert in der schwachen Topologie, kurz konvergiert schwach, gegen $x \in X$ mit Bemerkung 4. nach Definition A.9 genau dann, wenn

$$\Lambda x_k \rightarrow \Lambda x \quad \text{für alle } \Lambda \in X^*.$$

Mit Korollar 4.3 (4.5) existiert ein $\Lambda \in X^*$ mit $\|\Lambda\| \leq 1$ und $\Lambda x = \|x\|$. Damit folgt

$$\|x\| = |\Lambda x| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\Lambda x_k| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|, \quad (5.2)$$

und die Norm ist unterhalbstetig bezüglich schwacher Konvergenz.

7. Eine Folge Λ_k in X^* konvergiert in der schwach*-Topologie, kurz konvergiert schwach*, gegen $\Lambda \in X^*$ mit Bemerkung 4. nach Definition A.9 genau dann, wenn

$$\Lambda_k x \rightarrow \Lambda x \quad \text{für alle } x \in X.$$

In diesem Fall sehen wir mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz 3.2, daß

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\Lambda_k\|_{X^*} < \infty. \quad (5.3)$$

Für $x \in X$ sehen wir

$$|\Lambda x| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\Lambda_k x| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\Lambda_k\| \|x\|,$$

also

$$\|\Lambda\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\Lambda_k\| \quad (5.4)$$

und die Norm ist unterhalbstetig bezüglich schwach*-Konvergenz.

8. Konvergiert $x_k \rightarrow x$ schwach in X , so konvergieren die stetigen, linearen Funktionale $\Lambda_{x_k}^*$ schwach* in X^{**} gegen Λ_x^* , und wir sehen wie eben mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz 3.2, und Korollar 4.3 (4.5), daß

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\|_X = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\Lambda_{x_k}^*\|_{X^{**}} < \infty. \quad (5.5)$$

9. Klarerweise impliziert Normkonvergenz die schwache bzw. schwach*-Konvergenz.

□

Für konvexe Mengen gilt Gleichheit in (5.1).

Proposition 5.1 Für konvexe Mengen $C \subseteq X$ stimmt der schwache Abschluß mit dem Normabschluß überein, d.h.

$$\bar{C}_w = \bar{C}.$$

Insbesondere ist eine konvexe, norm-abgeschlossene Menge auch schwach abgeschlossen.

Beweis:

Mit (5.1) haben wir

$$\bar{C} \subseteq \bar{C}_w.$$

Nun sei $x_0 \notin \bar{C}$. Mit dem Trennungssatz, Satz 4.4, existiert ein stetiges, lineares Funktional $\Lambda \in X^*$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} \Lambda x_0 < \gamma \leq \operatorname{Re} \Lambda x \quad \text{für alle } x \in C.$$

Nun ist $U := [\operatorname{Re} \Lambda < \gamma] = \Lambda^{-1}(\operatorname{Re} < \gamma)$ per Definition schwach offen. Da $C \cap U = \emptyset$, $x_0 \in U$, folgt $x_0 \notin \bar{C}_w$, also $\bar{C}_w \subseteq \bar{C}$, und die Proposition ist bewiesen.

///

Als Korollar erhalten wir das Lemma von Mazur.

Korollar 5.1 (Lemma von Mazur) Es sei X ein Banachraum und $x_n \in X$ mit $x_n \rightarrow x$ schwach in X . Dann existieren Konvexkombinationen y_n von $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, d.h.

$$y_n = \sum_{k=1}^{N_n} \lambda_k^n x_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^{N_n} \lambda_k^n = 1, \lambda_k^n \geq 0,$$

mit $y_n \rightarrow x$ in der Norm von X .

Beweis:

Es sei $C = \operatorname{co}\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ die konvexe Hülle der x_k . Da $x_n \rightarrow x$ schwach in X , gilt für jede schwach offene Menge $U \ni x$, daß $x_n \in U$ für große $n \in \mathbb{N}$. Wir sehen, x liegt im schwachen Abschluß $\bar{C}_w$ von C , und mit der vorigen Proposition 5.1 auch im Normabschluß $\bar{C}$ von C . Daher existieren $y_n \in C$ mit $y_n \rightarrow x$ in der Norm, und die y_n sind Konvexkombinationen der x_k .

///

Wir beweisen nun das Analogon zu Korollar 4.3 (4.6) und (4.7) für die schwach*-Topologie.

Proposition 5.2 Es sei X ein Banachraum und $N \subseteq X^*$ ein Unterraum des Dualraumes. Dann gilt für den schwach* Abschluß von N

$$x^* \in \overline{N}_{w^*} \iff \left(\forall x \in X : \Lambda_x^*|N = 0 \implies x^*(x) = 0 \right), \quad (5.6)$$

und N liegt schwach* dicht genau dann, wenn für alle $x \in X$

$$\Lambda_x^*|N = 0 \implies x = 0. \quad (5.7)$$

Beweis:

(5.7) folgt aus (5.6). Zum Beweis von $\Rightarrow$ in (5.6) betrachten wir $x \in X$, so daß Λ_x^* auf N verschwindet. Da Λ_x^* schwach* stetig auf X^* ist, verschwindet Λ_x^* auch auf dem schwach* Abschluß $\overline{N}_{w^*}$ von N . Es folgt für $x^* \in \overline{N}_{w^*}$, daß

$$0 = \Lambda_x^*(x^*) = x^*(x)$$

und $\Rightarrow$ in (5.6) ist bewiesen.

Nun betrachten wir $x^* \in X^*$ mit

$$\forall x \in X : \Lambda_x^*|N = 0 \implies x^*(x) = 0 \quad (5.8)$$

und zeigen $x^* \in \overline{N}_{w^*}$. Dazu betrachten wir eine offene Basismenge der schwach*-Topologie auf X^* der Form $V = \bigcap_{k=1}^n \Lambda_{x_k}^{*-1}(U_k) \subseteq X^*$, $x_k \in X$, $U_k \subseteq K := \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ offen mit $x^* \in V$ und zeigen $V \cap N \neq \emptyset$.

Wir betrachten den Annihilator von N , dies ist der Vektorraum ${}^\perp N := \{x \in X \mid \Lambda_x^*|N = 0\}$ aller $x \in X$, deren induzierte stetige Funktionale auf N verschwinden, zerlegen den endlich-dimensionalen Vektorraum

$$Y := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} = (Y \cap {}^\perp N) \oplus Z$$

in eine direkte Summe und wählen eine Basis $z_1, \dots, z_m$ von Z . Klarerweise gilt ${}^\perp N \cap Z = \{0\}$.

Nun sei $\Phi : N \rightarrow K^m$, $\Lambda \mapsto (\Lambda z_1, \dots, \Lambda z_m)$, und wir behaupten Φ ist surjektiv. Falls nicht, so existiert $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m - \{0\}$ mit

$$0 = \sum_{l=1}^m \alpha_l \Lambda z_l = \Lambda \sum_{l=1}^m \alpha_l z_l = \Lambda \sum_{l=1}^m \alpha_l z_l \quad (\Lambda) \quad \text{für alle } \Lambda \in N,$$

also $\sum_{l=1}^m \alpha_l z_l \in {}^\perp N \cap Z = \{0\}$ und somit $\sum_{l=1}^m \alpha_l z_l = 0$. Da $z_1, \dots, z_m$ linear unabhängig sind, folgt $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0$, also ein Widerspruch, und Φ ist surjektiv.

Damit existiert $\Lambda \in N$ mit $\Phi(\Lambda) = (x^*(z_l))_{l=1, \dots, m}$, also $\Lambda z_l = x^*(z_l)$ für $l = 1, \dots, m$. Andererseits gilt für $w \in {}^\perp N$ per Definition und mit (5.8)

$$\Lambda w = 0 = x^*(w).$$

Zusammen folgt mit der obigen Summenzerlegung $\Lambda y = x^*(y)$ für alle $y \in Y$, insbesondere $\Lambda x_k = x^*(x_k) \in U_k$ für $k = 1, \dots, n$. Dies ergibt $\Lambda \in V \cap N \neq \emptyset$, und $x^* \in \overline{N}_{w^*}$.

///

Der zentrale Kompaktheitssatz für die schwach*-Topologie ist der folgende Satz von Banach-Alaoglu.

Satz 5.2 (Satz von Banach-Alaoglu) *X sei ein Banachraum. Dann ist der abgeschlossene Einheitsball im Dualraum schwach*-kompakt.*

Beweis:

X sei ein Banachraum über $K := \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Wir betrachten den Dualraum

$$X^* \subseteq \prod_{x \in X} K$$

als Teilmenge des Produktraumes. Die Produkttopologie wird durch die Projektionen $\pi_x : \prod_{y \in X} K \rightarrow K$ erzeugt, und die schwach*-Topologie auf X^* wird durch die Abbildungen $\Lambda_x^* : X^* \rightarrow K, \Lambda \mapsto \Lambda x$ erzeugt. Beachten wir

$$\Lambda_x^*(\Lambda) = \Lambda x = \pi_x(\Lambda) \quad \text{für } \Lambda \in X^*,$$

so sehen wir $\Lambda_x^* = \pi_x|_{X^*}$, und die schwach*-Topologie ist die Spurtopologie der Produkttopologie. Die Menge V^* der linearen Funktionale auf X ist der Schnitt der abgeschlossenen Mengen

$$[\pi_{\alpha x + \beta y} - \alpha \pi_x - \beta \pi_y = 0]$$

für $x, y \in X, \alpha, \beta \in K$, also ist V^* in der Produkttopologie abgeschlossen. Der abgeschlossene Einheitsball der stetigen, linearen Funktionale ergibt sich als

$$\overline{B_1(0)} = \bigcap_{x \in X} [\pi_x \in \overline{B_{\|x\|}(0)}] \cap V^* \subseteq \prod_{x \in X} \overline{B_{\|x\|}(0)},$$

und ist somit auch abgeschlossen in der Produkttopologie. Mit dem Satz von Tychonoff, Satz A.2, ist das Produkt

$$\prod_{x \in X} \overline{B_{\|x\|}(0)}$$

als Produkt kompakter Räume wieder kompakt, und somit der abgeschlossene Einheitsball als abgeschlossene Menge einer kompakten Menge wieder kompakt.

///

In separablen Räumen kann mit der folgenden Proposition gezeigt werden, daß der abgeschlossene Einheitsball schwach*-folgenkompakt ist.

Proposition 5.3 *X sei ein separabler Banachraum. Dann ist jede schwach*-kompakte Teilmenge $K \subseteq X^*$ in der schwach*-Topologie metrisierbar.*

Beweis:

Es sei $D := \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von X . Dann sind $\Lambda_{x_m}^*$ punktetrennend auf X^* , denn gilt für $\Lambda, \Lambda' \in X^*$, daß

$$\Lambda_{x_m}^*(\Lambda) = \Lambda_{x_m}^*(\Lambda') \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

so folgt $\Lambda x_m = \Lambda' x_m$, also

$$\Lambda = \Lambda' \quad \text{auf } D \subseteq X,$$

und somit $\Lambda = \Lambda'$, da beide stetig sind.

Mit der Bemerkung 2. nach Proposition A.4 ist die schwach*-Topologie auf der schwach*-kompakten Menge $K \subseteq X^*$ metrisierbar.

///

Korollar 5.3 *Es sei X ein separabler Banachraum. Dann ist der abgeschlossene Einheitsball im Dualraum schwach*-folgenkompakt, d.h. für eine normbeschränkte Folge Λ_k in X^* konvergiert eine Teilfolge schwach* in X^* gegen ein $\Lambda \in X^*$.*

Beweis:

Mit dem Satz von Banach-Alaoglu, Satz 5.2, ist der abgeschlossene Einheitsball im Dualraum schwach*-kompakt, und mit Proposition 5.3 ist die schwach*-Topologie auf dem Einheitsball metrisierbar. Da in metrischen Räumen überdeckungskompakt und folgenkompakt äquivalent sind, folgt die Behauptung.

///

Bemerkungen:

1. Wie wir in Bemerkung 9. nach Definition 1.1 und dem Beispiel nach Proposition 1.4 gesehen haben, ist l^1 ein separabler Banachraum mit nicht-separablem Dualraum l^∞ . Für eine beschränkte Folge $(x_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$ in l^∞ erhalten wir durch Wahl einer geeigneten Diagonalfolge eine Teilfolge mit

$$x_j^{n_k} \rightarrow x_j \quad \text{für } k \rightarrow \infty, j \in \mathbb{N},$$

also $(x_j^{n_k})_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ schwach* in $l^\infty = (l^1)^*$.

2. Mit dem gleichen Vorgehen kann das obige Korollar ohne den Satz von Banach-Alaoglu, Satz 5.2, wie folgt elementar gezeigt werden.

Dazu sei $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von X . Da Λ_k normbeschränkt sind, sind die Folgen $(\Lambda_k x_m)_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Durch Wahl einer geeigneten Diagonalfolge erhalten wir eine Teilfolge, für die $\Lambda_k x_m \rightarrow: \Lambda x_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für beliebiges $x \in X, \varepsilon > 0$ wählen wir $m \in \mathbb{N}$ mit $\|x_m - x\| < \varepsilon$ und sehen

$$\begin{aligned} \limsup_{k, l \rightarrow \infty} |\Lambda_k x - \Lambda_l x| &\leq \\ &\leq \limsup_{k, l \rightarrow \infty} (|\Lambda_k x - \Lambda_k x_m| + |\Lambda_k x_m - \Lambda_l x_m| + |\Lambda_l x_m - \Lambda_l x|) \leq \\ &\leq 2 \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\Lambda_j\| \|x - x_m\| \leq C\varepsilon, \end{aligned}$$

und $(\Lambda_k x)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge für jedes $x \in X$, also konvergent $\Lambda_k x \rightarrow: \Lambda x$. Klarerweise ist $\Lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ linear und $|\Lambda x| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\Lambda_j\| \|x\|$, also stetig. Dies ergibt $\Lambda \in X^*$ und Λ_k konvergiert für eine Teilfolge schwach* gegen Λ .

□

Für einen analogen Satz für schwache Konvergenz benötigen wir folgende Begriffe.

Definition 5.2 X sei ein Banachraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Für $x \in X, x^* \in X^*$ schreiben wir in dualer Form

$${}_{X^*} \langle x^*, x \rangle_X = \langle x^*, x \rangle := x^*(x).$$

Jedes $x \in X$ induziert ein stetiges, lineares Funktional $i_X x$ auf X^* durch

$$\langle i_X x, x^* \rangle := \langle x^*, x \rangle \quad \text{für } x^* \in X^*.$$

$i_X : X \rightarrow X^{**}$ ist mit (4.5) eine stetige, lineare, normerhaltende Einbettung von X in den Bidualraum X^{**} . X heißt reflexiv, wenn $i_X : X \rightarrow X^{**}$ surjektiv, also ein Isomorphismus ist.

Für einen weiteren Banachraum Y und eine stetige, lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ definieren wir die duale Abbildung $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ durch

$$T^*y^* := y^* \circ T \in X^* \quad \text{für } y^* \in Y^*$$

bzw.

$$\langle T^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle$$

für alle $x \in X, y^* \in Y^*$.

□

Bemerkungen:

1. Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

Zum Beweis sei $x^{**} \in X^{**}$ beliebig. Dann ist die Abbildung $y \mapsto \overline{\langle x^{**}, \Lambda_y \rangle}$ mit (2.3) ein stetiges, komplex-lineares Funktional auf X . Nach dem Satz von Riesz, Satz 2.1, existiert ein $x \in X$ mit

$$\langle x^{**}, \Lambda_y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} = \langle x, y \rangle = \langle \Lambda_y, x \rangle = \langle i_X x, \Lambda_y \rangle.$$

Da $\Lambda : X \rightarrow X^*$ surjektiv ist, folgt $x^{**} = i_X x$, und X ist reflexiv.

//

2. Eine duale Paarung auf Banachräumen X, Y über $K = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist eine bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow K$$

mit

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle|, \quad \|y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, y \rangle|,$$

für $x \in X, y \in Y$. In diesem Fall haben wir Abbildungen $\Lambda : X \rightarrow Y^*, \bar{\Lambda} : Y \rightarrow X^*$ definiert durch

$$\Lambda_x y := \langle x, y \rangle = \bar{\Lambda}_y x.$$

Beachten wir

$$\|\Lambda_x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| = \|x\|, \quad \|\bar{\Lambda}_y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| = \|y\|,$$

so sind dies normerhaltende Einbettungen $X \hookrightarrow Y^*, Y \hookrightarrow X^*$.

Ist $Y \xrightarrow{\sim} X^*$ bijektiv, so können wir $Y \cong X^*, Y^* \cong X^{**}$ identifizieren und rechnen

$$X^{**} \langle \Lambda_x, y \rangle_{X^*} = Y^* \langle \Lambda_x, y \rangle_Y = \langle x, y \rangle = X^* \langle y, x \rangle_X = X^{**} \langle i_X x, y \rangle_{X^*},$$

also $i_X = \Lambda : X \rightarrow X^{**}$, und X ist reflexiv genau dann, wenn darüberhinaus $X \xrightarrow{\sim} Y^*$ bijektiv ist.

Sind insbesondere beide $X \xrightarrow{\sim} Y^*, Y \xrightarrow{\sim} X^*$ bijektiv, so sind $X \cong Y^*, Y \cong X^*$, und X und Y sind reflexiv.

3. Für $X = l^p, Y = l^q, p^{-1} + q^{-1} = 1$ haben wir mit dem Beispiel nach Proposition 1.4 die duale Paarung

$$l^p \langle (x_j)_{j \in \mathbb{N}}, (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle_{l^q} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j.$$

Mit (1.4) ist $l^q \xrightarrow{\sim} (l^p)^*$ für $1 \leq p < \infty$ bijektiv. Mit Symmetrie sehen wir mit der vorigen Bemerkung, daß l^p für $1 < p < \infty$ reflexiv ist.

4. Wie eben betrachten wir für $X = c_0, Y = l^1$ die duale Paarung

$$c_0 \langle (x_j)_{j \in \mathbb{N}}, (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle_{l^1} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j.$$

Mit (1.4) ist $l^1 \xrightarrow{\sim} c_0^*$ bijektiv, und $c_0 \hookrightarrow (l^1)^* \cong c_0^{**}$ ist die normerhaltende Einbettung in den Bidualraum. Mit der dualen Paarung $l^\infty \langle \cdot, \cdot \rangle_{l^1}$ und der Identifikation $l^\infty \xrightarrow{\sim} (l^1)^*$ aus der vorigen Bemerkung ist dies die Inklusion $c_0 \subseteq l^\infty \cong (l^1)^* \cong c_0^{**}$. Da c_0 ein echter Unterraum von l^∞ ist, ist diese Einbettung nicht bijektiv und somit c_0 nicht reflexiv.

□

Proposition 5.4 *X sei ein Banachraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. X^* ist separabel $\implies X$ ist separabel .
2. X ist reflexiv, $Y \subseteq X$ ist ein abgeschlossener Unterraum $\implies Y$ ist reflexiv .
3. X ist reflexiv $\iff X^*$ ist reflexiv .

Beweis:

1. Es sei $\{\Lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von X^* . Für o.B.d.A. $X \neq \{0\}$ wählen wir mit der Definition der Operatornorm $x_k \in X - \{0\}$ mit

$$|\Lambda_k x_k| \geq \frac{1}{2} \|\Lambda_k\| \|x_k\|$$

und betrachten den Unterraum $Y := \text{span}\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$. Da die endlichen Linearkombinationen der x_k mit rationalen Koeffizienten dicht in Y liegen, genügt es zu zeigen, daß Y dicht in X liegt.

Dazu betrachten wir $\Lambda \in X^*$ mit $\Lambda = 0$ auf Y und zeigen $\Lambda = 0$. Angenommen $\Lambda \neq 0$, so existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\Lambda - \Lambda_k\| < \varepsilon \|\Lambda\|.$$

Wir sehen

$$\|\Lambda_k\| \geq \|\Lambda\| - \|\Lambda - \Lambda_k\| \geq (1 - \varepsilon) \|\Lambda\|,$$

also $\|\Lambda - \Lambda_k\| < 2\varepsilon \|\Lambda_k\|$ für $\varepsilon \leq 1/2$, insbesondere $\Lambda_k \neq 0$, da $\Lambda \neq 0$. Da $\Lambda x_k = 0$ erhalten wir weiter

$$\frac{1}{2} \|\Lambda_k\| \|x_k\| \leq |\Lambda_k x_k| = |\Lambda_k x_k - \Lambda x_k| \leq \|\Lambda_k - \Lambda\| \|x_k\| \leq 2\varepsilon \|\Lambda_k\| \|x_k\|,$$

was für $\varepsilon < 1/4$ ein Widerspruch ist, da $\|x_k\|, \|\Lambda_k\| \neq 0$. Daher gilt $\Lambda = 0$, und mit Korollar 4.3 (4.7) liegt Y dicht in X .

//

2. Wir zeigen $i_Y(Y) = Y^{**}$ und betrachten $y^{**} \in Y^{**}$ beliebig. Mit der bidualen der Inklusion $i : Y \hookrightarrow X$ definieren wir $x^{**} := i^{**}y^{**} \in X^{**}$. Da X reflexiv ist, existiert $x \in X$ mit $i_X x = x^{**} = i^{**}y^{**}$. Für $x^* \in X^*$ rechnen wir

$$\langle x^*, x \rangle = \langle i_X x, x^* \rangle = \langle i^{**}y^{**}, x^* \rangle = \langle y^{**}, i^* x^* \rangle. \quad (5.9)$$

Zuerst betrachten wir $x^* \in X^*$ mit $x^* = 0$ auf Y . Da die duale $i^* : X^* \rightarrow Y^*$ die Einschränkung $i^* x^* = x^*|_Y$ ist, sehen wir $i^* x^* = 0$ und $\langle x^*, x \rangle = 0$. Mit (4.6) folgt $y := x \in Y$.

Für $y^* \in Y^*$ existiert mit dem Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, ein x^* mit $i^* x^* = x^*|_Y = y^*$. Mit (5.9) ergibt sich

$$\langle y^{**}, y^* \rangle = \langle x^*, x \rangle = \langle y^*, y \rangle = \langle i_Y y, y^* \rangle,$$

also $y^{**} = i_Y y, Y^{**} = i_Y(Y)$, und Y ist reflexiv.

//

3. ($\Rightarrow$): Wir betrachten die duale Paarung von X und $Y = X^*$

$$X \times X^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}, \quad \langle x, x^* \rangle := x^*(x),$$

und sehen $Y \xrightarrow{\sim} X^*$ ist bijektiv. Ist X reflexiv, so ist nach obiger Bemerkung auch $X \xrightarrow{\sim} Y^* \cong X^{**}$ bijektiv, und wieder nach obiger Bemerkung ist $Y \cong X^*$ reflexiv.

//

($\Leftarrow$): Ist X^* reflexiv, so ist mit ($\Rightarrow$) auch $(X^*)^* = X^{**}$ reflexiv, also ist X nach 2. als abgeschlossener Unterraum von X^{**} auch reflexiv.

///

Bemerkungen:

1. Ist X separabel und reflexiv, so ist auch $X^{**} \cong X$ separabel, und nach obiger Proposition ist X^* separabel.

Wie wir in (1.1), (1.2) und (1.4) gesehen haben, ist l^1 separabel, aber $l^\infty = (l^1)^*$ ist nicht separabel, daher sind l^1 und l^∞ nach obiger Proposition nicht reflexiv.

2. Wie wir in den obigen Bemerkungen gesehen haben, ist c_0 nicht reflexiv, also sind $l^1 \cong c_0^*$ und $l^\infty \cong (l^1)^*$ auch nicht reflexiv.

□

In reflexiven Räumen ist der abgeschlossene Einheitsball schwach folgenkompakt.

Satz 5.4 *X sei ein reflexiver Banachraum. Dann ist der abgeschlossene Einheitsball schwach-folgenkompakt, d.h. für eine normbeschränkte Folge x_k in X konvergiert eine Teilfolge schwach in X gegen ein $x \in X$.*

Beweis:

Zuerst nehmen wir X als separabel an. Da X reflexiv ist, ist auch $X^{**} \cong X$ separabel, und mit Proposition 5.4 ist X^* separabel. $i_X x_k$ ist normbeschränkt in X^{**} , also konvergiert $i_X x_k \rightarrow x^{**}$ mit Satz 5.3 für eine Teilfolge schwach* in X^{**} . Da X reflexiv ist, existiert $x \in X$ mit $i_X x = x^{**}$. Damit erhalten wir für $x^* \in X^*$

$$\langle x^*, x_k \rangle = \langle i_X x_k, x^* \rangle \rightarrow \langle x^{**}, x^* \rangle = \langle i_X x, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle,$$

und $x_k \rightarrow x$ für eine Teilfolge schwach in X .

Im allgemeinen Fall betrachten wir den abgeschlossenen, separablen Unterraum $Y := \overline{\text{span}\{x_k\}} \subseteq X$. Mit Proposition 5.4 ist mit X auch Y reflexiv, und mit dem eben Bewiesenen konvergiert $x_k \rightarrow y \in Y$ schwach in Y . Dann folgt für $x^* \in X^*$ und $y^* := x^*|_Y \in Y^*$

$$\langle x^*, x_k \rangle = \langle y^*, x_k \rangle \rightarrow \langle y^*, y \rangle = \langle x^*, y \rangle,$$

also $x_k \rightarrow y \in Y \subseteq X$ für eine Teilfolge schwach in X .

///

Proposition 5.5 *X sei ein reflexiver Banachraum und $C \subseteq X$ eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene Menge. Dann existiert zu jedem $x_0 \in X$ ein $y_0 \in C$ mit*

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, C).$$

Beweis:

Wir wählen $y_k \in C$ mit

$$\|x_0 - y_k\| \rightarrow d(x_0, C).$$

Dann ist y_k beschränkt, und mit Satz 5.4 konvergiert nach Übergang zu einer Teilfolge $y_k \rightarrow y_0$ schwach in X . Klarerweise liegt $y_0 \in \bar{C}_w$ im schwachen Abschluß von C , also $y_0 \in C$ mit Proposition 5.1, da C konvex und abgeschlossen ist, insbesondere gilt

$$d(x_0, C) \leq \|x_0 - y_0\|.$$

Mit der Unterhalbstetigkeit der Norm unter schwacher Konvergenz in (5.2) sehen wir

$$\|x_0 - y_0\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_0 - y_k\| = d(x_0, C)$$

Zusammen folgt $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, C)$, und die Proposition ist bewiesen.

///

6 Die duale Abbildung

Definition 6.1 Für eine stetige, lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen X, Y definieren wir wie Definition 5.2 die duale Abbildung $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ durch

$$T^*y^* := y^* \circ T \in X^* \quad \text{für } y^* \in Y^*$$

bzw.

$$\langle T^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle$$

für alle $x \in X, y^* \in Y^*$.

□

Bemerkungen:

1. Für Hilberträume X, Y haben wir mit dem Satz von Riesz, Satz 2.1, konjugiert-lineare Isomorphismen $\Lambda^X : X \rightarrow X^*, \Lambda^Y : Y \rightarrow Y^*$ gegeben durch die Skalarprodukte $\langle \Lambda^X x, x' \rangle = \langle x', x \rangle$ und $\langle \Lambda^Y y, y' \rangle = \langle y', y \rangle$. Für $T : X \rightarrow Y$ stetig, linear setzen wir $T' := (\Lambda^X)^{-1} T^* \Lambda^Y : Y \rightarrow X$ stetig linear und rechnen

$$\langle x, T'y \rangle = \langle \Lambda^X T'y, x \rangle = \langle T^* \Lambda^Y y, x \rangle = \langle \Lambda^Y y, Tx \rangle = \langle Tx, y \rangle \quad \text{für } x \in X, y \in Y, \quad (6.1)$$

und diese Gleichung definiert T' eindeutig. Wir identifizieren in Hilberträumen T^* und T' und nennen diese Abbildung die adjungierte Abbildung von T .

2. Existiert zu einer linearen Abbildung $T : X \rightarrow Y$ eine adjungierte Abbildung $T' : Y \rightarrow X$ mit (6.1), so sind beide notwendigerweise stetig, denn für $x_n \rightarrow x$ in X mit $Tx_n \rightarrow y$ in Y rechnen wir für $z \in Y$ mit (6.1), dass

$$\langle y, z \rangle \leftarrow \langle Tx_n, z \rangle = \langle x_n, T'z \rangle \rightarrow \langle x, T'z \rangle = \langle Tx, z \rangle,$$

und erhalten $Tx = y$, da $z \in Y$ beliebig war. Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz 3.6, ist T stetig, und mit Symmetrie ist auch T' stetig.

□

Proposition 6.1 Mit obiger Definition gilt

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

Beweis:

Nach Definition gilt mit Korollar 4.3 (4.5)

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup\{\langle y^*, Tx \rangle \mid \|x\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1\} = \\ &= \sup\{\langle T^*y^*, x \rangle \mid \|x\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1\} = \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|T^*y^*\| = \|T^*\|. \end{aligned}$$

///

Die Relation der Kerne und Bilder von Abbildung und dualer Abbildung sind gegeben durch Annihilatoren.

Definition 6.2 Es sei X ein Banachraum mit Dualraum X^* . Für Teilmengen $M \subseteq X$ und $N \subseteq X^*$ definieren wir die Annihilatoren durch

$$M^\perp := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in M\},$$

$${}^\perp N := \{x \in X \mid \langle x^*, x \rangle = 0 \text{ für alle } x^* \in N\}.$$

□

Bemerkungen:

1. Klarerweise sind Annihilatoren Vektorräume. $M^\perp$ ist der Schnitt der Kerne von $i_X(x) \in X^{**}$ für $x \in M$ und ist daher schwach*-abgeschlossen. ${}^\perp N$ ist der Schnitt der Kerne von $x^* \in M$ und ist daher abgeschlossen.
2. Es gilt trivial

$$M \subseteq {}^\perp(M^\perp), \quad N \subseteq ({}^\perp N)^\perp,$$

$$M^\perp = X^* \Leftrightarrow M \subseteq \{0\},$$

$${}^\perp N = X \Leftrightarrow N \subseteq \{0\}.$$

3. Für Unterräume $M \subseteq X, N \subseteq X^*$ gilt mit Korollar 4.3 (4.7) und Proposition 5.2 (5.7)

$$M^\perp = \{0\} \Leftrightarrow M \text{ liegt dicht in } X,$$

$${}^\perp N = \{0\} \Leftrightarrow N \text{ liegt schwach* dicht in } X^*.$$

□

Proposition 6.2 Es sei X ein Banachraum und $M \subseteq X, N \subseteq X^*$ Unterräume. Dann gilt

$${}^\perp(M^\perp) \text{ ist der Abschluß von } M,$$

$$({}^\perp N)^\perp \text{ ist der schwach* Abschluß von } N.$$

Beweis:

Da $M \subseteq {}^\perp(M^\perp)$ und ${}^\perp(M^\perp)$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{M} \subseteq {}^\perp(M^\perp)$. Für $x \notin \overline{M}$ existiert mit Korollar 4.3 (4.6) ein $x^* \in M^\perp$ mit $\langle x^*, x \rangle \neq 0$, also $x \notin {}^\perp(M^\perp)$.

Da $N \subseteq ({}^\perp N)^\perp$ und $({}^\perp N)^\perp$ schwach* abgeschlossen ist, folgt $\overline{N}_{w^*} \subseteq ({}^\perp N)^\perp$. Für $x^* \notin \overline{N}_{w^*}$ existiert mit Proposition 5.2 (5.6) ein $x \in {}^\perp N$ mit $\langle x^*, x \rangle \neq 0$, also $x^* \notin ({}^\perp N)^\perp$.

///

Proposition 6.3 Es sei X ein Banachraum mit einem abgeschlossenen Unterraum M und Quotientenabbildung $\pi : X \rightarrow X/M$. Dann gelten folgende normerhaltenden Isomorphismen:

$$X^*/M^\perp \cong M^*, \quad x^* + M^\perp \mapsto x^*|_M,$$

und

$$\pi^* : (X/M)^* \cong M^\perp.$$

Insbesondere gilt

$$\operatorname{codim} M = \dim M^\perp,$$

wenn $\operatorname{codim} M < \infty$ oder $\dim M^\perp < \infty$, und weiter gilt

$$\dim M = \operatorname{codim} M^\perp,$$

wenn $\dim M < \infty$ oder $\operatorname{codim} M^\perp < \infty$.

Beweis:

Wir beachten folgende Äquivalenzen

$$\begin{aligned} x^* + M^\perp &= \tilde{x}^* + M^\perp \\ \Leftrightarrow x^* - \tilde{x}^* &\in M^\perp \\ \Leftrightarrow \langle x^* - \tilde{x}^*, y \rangle &= 0 \quad \forall y \in M \\ \Leftrightarrow x^*|_M &= \tilde{x}^*|_M. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Abbildung wohldefiniert und injektiv. Klarerweise ist diese Abbildung linear und

$$\|x^*|_M\| \leq \|x^*\|,$$

also $\|x^*|_M\| \leq \|x^* + M^\perp\|$. Zu $y^* \in M^*$ existiert mit Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|_M = y^*$ und $\|x^*\| = \|y^*\|$. Damit ist $x^* + M^\perp \mapsto y^*$ und die Abbildung ist surjektiv. Weiter gilt

$$\|x^* + M^\perp\| \leq \|x^*\| = \|y^*\|.$$

Zusammen ist die Abbildung ein normerhaltender Isomorphismus.

Für $\Lambda \in (X/M)^*$, $y \in M$ gilt

$$\pi^*(\Lambda)(y) = \Lambda(\pi(y)) = 0,$$

also $\pi^*\Lambda \in M^\perp$, und π^* bildet tatsächlich in $M^\perp$ ab. Weiter rechnen wir für $x \in X$

$$|\Lambda(x + M)| = |\Lambda(\pi(x))| = |\pi^*(\Lambda)(x)| \leq \|\pi^*\Lambda\| \|x\|,$$

also $|\Lambda(x + M)| \leq \|\pi^*\Lambda\| \|x + M\|$ und $\|\Lambda\| \leq \|\pi^*\Lambda\|$. Da andererseits $\|\pi^*\| = \|\pi\| \leq 1$ mit der Bemerkung 7. nach Definition 1.1 und Proposition 6.1, erhalten wir

$$\|\Lambda\| = \|\pi^*\Lambda\|,$$

und π^* ist normerhaltend, insbesondere injektiv.

Für $x^* \in M^\perp$ setzen wir $\Lambda(x + M) := \langle x^*, x \rangle$. Dies ist wohldefiniert, da $x + M = x' + M$ impliziert $x - x' \in M$ und $\langle x^*, x - x' \rangle = 0$. Weiter gilt

$$|\Lambda(x + M)| = |\langle x^*, x \rangle| \leq \|x^*\| \|x\|,$$

also $|\Lambda(x + M)| \leq \|x^*\| \|x + M\|$, und $\Lambda \in (X/M)^*$. Dies ergibt

$$(\pi^*(\Lambda))(x) = \Lambda(x + M) = \langle x^*, x \rangle \text{ für alle } x \in X,$$

also $\pi^* \Lambda = x^*$ und π^* ist surjektiv.

Obige Isomorphismen ergeben

$$\operatorname{codim} M = \dim(X/M) = \dim(X/M)^* = \dim M^\perp,$$

wenn $\operatorname{codim} M < \infty$ oder $\dim M^\perp < \infty$, und weiter

$$\dim M = \dim M^* = \dim(X^*/M^\perp) = \operatorname{codim} M^\perp,$$

wenn $\dim M < \infty$ oder $\operatorname{codim} M^\perp < \infty$.

///

Bemerkung:

Am Ende des obigen Beweises haben wir verwendet, dass für endlich-dimensionale normierte Räume X die Isomorphie $X \cong X^*$ gilt. Ist andererseits X^* endlich-dimensional, so ist auch $X \subseteq X^{**} \cong X^*$ endlich-dimensional.

□

Proposition 6.4 Für einen stetigen, linearen Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen gilt

$$\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp, \quad \ker T = {}^\perp(\operatorname{im} T^*).$$

Ist $\operatorname{im} T$ abgeschlossen, so gilt

$$\ker T^* \cong (Y/\operatorname{im} T)^*,$$

insbesondere

$$\dim \ker T^* = \operatorname{codim} \operatorname{im} T$$

wenn $\dim \ker T^* < \infty$ oder $\operatorname{codim} \operatorname{im} T < \infty$.

Ist $\operatorname{im} T^*$ schwach* abgeschlossen, so gilt

$$(\ker T)^* \cong (X^*/\operatorname{im} T^*),$$

insbesondere

$$\dim \ker T = \operatorname{codim} \operatorname{im} T^*,$$

wenn $\dim \ker T < \infty$ oder $\operatorname{codim} \operatorname{im} T^* < \infty$.

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} y^* \in \ker T^* &\Leftrightarrow T^* y^* = 0 \Leftrightarrow \langle T^* y^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle y^*, Tx \rangle = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow y^* \in (\operatorname{im} T)^\perp, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \in \ker T &\Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \langle y^*, Tx \rangle = 0 \quad \forall y^* \in Y^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle T^* y^*, x \rangle = 0 \quad \forall y^* \in Y^* \Leftrightarrow x \in {}^\perp(\operatorname{im} T^*). \end{aligned}$$

Ist $\operatorname{im} T$ abgeschlossen, so folgt mit Proposition 6.3

$$\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp \cong (Y/\operatorname{im} T)^*$$

und

$$\dim \ker T^* = \dim(Y/\operatorname{im} T)^* = \dim(Y/\operatorname{im} T) = \operatorname{codim} \operatorname{im} T,$$

wenn $\dim \ker T^* < \infty$ oder $\operatorname{codim} \operatorname{im} T < \infty$.

Ist $\operatorname{im} T^*$ schwach* abgeschlossen, insbesondere abgeschlossen, so folgt mit den Propositionen 6.2 und 6.3, da $\ker T$ immer abgeschlossen ist,

$$(\ker T)^* \cong X^*/(\ker T)^\perp = X^*/({}^\perp \operatorname{im} T^*)^\perp = X^*/\operatorname{im} T^*$$

und

$$\dim \ker T = \dim(\ker T)^* = \dim(X^*/\operatorname{im} T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{im} T^*,$$

wenn $\dim \ker T < \infty$ oder $\operatorname{codim} \operatorname{im} T^* < \infty$.

///

Bemerkungen:

1. Aus obiger Proposition und (6.2) sehen wir

$\ker T^*$ ist schwach* abgeschlossen,

$\operatorname{im} T$ liegt dicht in $X \Leftrightarrow T^*$ ist injektiv, (6.3)

T ist injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{im} T^*$ liegt schwach* dicht in X^* .

2. Ist $\operatorname{im} T$ abgeschlossen, so folgt mit den Propositionen 6.2 und 6.4

$$\operatorname{im} T = {}^\perp((\operatorname{im} T)^\perp) = {}^\perp \ker T^*,$$

d.h.

$$\exists x \in X : Tx = y \Leftrightarrow \forall y^* \in \ker T^* : \langle y^*, y \rangle = 0.$$

□

Wir erweitern die mittlere Äquivalenz zu einem Kriterium für Surjektivität von T in Daten von T^* und beginnen mit folgender Proposition.

Proposition 6.5 *Für einen stetigen, linearen Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen gilt*

$$\begin{aligned} \overline{T(B_1(0))} \supseteq B_\varrho(0) &\implies T(B_1(0)) \supseteq B_\varrho(0), \\ \|T^*y^*\| \geq \varrho \|y^*\| \quad \forall y^* \in Y^* &\implies T(B_1(0)) \supseteq B_\varrho(0). \end{aligned}$$

Beweis:

Wir können $\varrho = 1$ annehmen. Im Beweis der ersten Aussage erhalten wir $\overline{T(B_1(0))} \supseteq \overline{B_1(0)}$, und dies besagt zu jedem $y \in Y$ mit $\|y\| \leq 1$ und $\varepsilon > 0$ existiert $x \in X$ mit $\|x\| \leq \|y\|$ und $\|y - Tx\| < \varepsilon$.

Es sei $y_1 \in B_1(0) \subseteq Y$. Wir wählen $\varepsilon_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1 - \|y_1\|$. Sind $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_{n-1}$ für $n \geq 1$ bereits gewählt, so wählen wir $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq \|y_n\|$ und $\|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n$ und setzen $y_{n+1} := y_n - Tx_n$.

Wir sehen

$$\|x_{n+1}\| \leq \|y_{n+1}\| = \|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \|y_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1,$$

also konvergiert $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in B_1(0)$. Wir sehen weiter

$$Tx \leftarrow \sum_{n=1}^N Tx_n = \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{N+1} \rightarrow y_1,$$

da $y_{N+1} \rightarrow 0$. Zusammen folgt $y_1 = Tx \in T(B_1(0))$.

//

Es sei $C := \overline{T(B_1(0))}$, $y_0 \in Y - C$. Da C abgeschlossen und konvex ist, existiert mit dem Trennungssatz, Satz 4.4, ein stetiges, lineares Funktional $\tilde{y}^* \in Y^*$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re}\langle \tilde{y}^*, y_0 \rangle < \gamma \leq \operatorname{Re}\langle \tilde{y}^*, y \rangle \quad \text{für alle } y \in C.$$

Für $y \in C$ wählen wir $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha\langle \tilde{y}^*, y \rangle = -|\langle \tilde{y}^*, y \rangle|$. Klarerweise gilt $\alpha y \in C$, und wir sehen

$$\gamma \leq \operatorname{Re}\langle \tilde{y}^*, \alpha y \rangle = -|\langle \tilde{y}^*, y \rangle|,$$

insbesondere $\gamma \leq 0$. Für $\operatorname{Re}\langle \tilde{y}^*, y_0 \rangle < \tilde{\gamma} < \gamma$ setzen wir $y^* := \tilde{y}^*/\tilde{\gamma}$ und sehen

$$|\langle y^*, y \rangle| \leq 1 < |\langle y^*, y_0 \rangle| \quad \text{für alle } y \in C.$$

Für $x \in B_1(0) \subseteq X$ ist $Tx \in T(B_1(0)) \subseteq C$, also

$$|\langle T^*y^*, x \rangle| = |\langle y^*, Tx \rangle| \leq 1.$$

Es folgt nach Voraussetzung $\|y^*\| \leq \|T^*y^*\| \leq 1$ und

$$1 < |\langle y^*, y_0 \rangle| \leq \|y^*\| \|y_0\| \leq \|y_0\|,$$

also $y_0 \notin \overline{B_1(0)}$. Dies ergibt $\overline{T(B_1(0))} = C \supseteq \overline{B_1(0)}$, und mit der ersten Aussage folgt die Behauptung.

///

Satz 6.1 Für einen stetigen, linearen Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen sind folgende Aussagen äquivalent.

1. *im T ist abgeschlossen.*
2. *im T^* ist schwach* abgeschlossen.*
3. *im T^* ist abgeschlossen.*

Beweis:

(2). impliziert klarerweise (3).

(1). $\Rightarrow$ (2).:

Mit Proposition 6.4 gilt

$$\operatorname{im} T^* \subseteq (\perp \operatorname{im} T^*)^\perp = (\ker T)^\perp.$$

Wir zeigen $(\ker T)^\perp \subseteq \operatorname{im} T^*$ und erhalten daraus $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp$ ist schwach* abgeschlossen.

Wir betrachten $x^* \in (\ker T)^\perp$ und definieren das lineare Funktional Λ auf $\operatorname{im} T$ durch

$$\Lambda Tx := \langle x^*, x \rangle.$$

Dies ist wohldefiniert, da $Tx = Tx'$ impliziert $x - x' \in \ker T$ und $\langle x^*, x - x' \rangle = 0$. Da wir $\operatorname{im} T$ abgeschlossen annehmen, ist $\operatorname{im} T$ ein Banachraum, und wir können den Satz über offene Abbildungen, Satz 3.4, auf $T : X \rightarrow \operatorname{im} T$ anwenden und erhalten ein $M < \infty$, so daß zu jedem $y \in \operatorname{im} T$ ein $x \in X$ mit $Tx = y$ und $\|x\| \leq M \|y\|$ existiert. Dies ergibt

$$|\Lambda y| = |\Lambda Tx| = |\langle x^*, x \rangle| \leq \|x^*\| \|x\| \leq M \|x^*\| \|y\|,$$

und Λ ist stetig. Mit dem Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, existiert eine stetige, lineare Fortsetzung y^* von Λ auf Y . Dies ergibt

$$\langle T^* y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle = \Lambda Tx = \langle x^*, x \rangle \quad \text{für alle } x \in X,$$

also $x^* = T^* y^* \in \operatorname{im} T^*$ und $(\ker T)^\perp \subseteq \operatorname{im} T^*$.

//

(3). $\Rightarrow$ (1).:

Es sei $Z := \overline{\operatorname{im} T} \subseteq Y$ und $S : X \rightarrow Z, Sx := Tx$. Da $\operatorname{im} S = \operatorname{im} T$ dicht in Z ist, folgt mit (6.3), daß die duale $S^* : Z^* \rightarrow X^*$ injektiv ist.

Für jedes $z^* \in Z^*$ existiert mit dem Satz von Hahn-Banach, Satz 4.2, eine stetige, lineare Fortsetzung auf $y^* \in Y^*$, und wir sehen

$$\langle T^* y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle = \langle z^*, Sx \rangle = \langle S^* z^*, x \rangle \quad \text{für alle } x \in X,$$

also $T^* y^* = S^* z^*$ und insbesondere $\operatorname{im} T^* = \operatorname{im} S^*$. Da $\operatorname{im} T^* = \operatorname{im} S^*$ als abgeschlossen angenommen wird, also ein Banachraum ist, und S^* injektiv ist, können wir den Satz von der stetigen Inverse, Korollar 3.5, auf $S^* : Z^* \rightarrow \operatorname{im} S^*$ anwenden und erhalten

$$\|S^* z^*\| \geq \varrho \|z^*\| \quad \text{für alle } z^* \in Z^*$$

für ein $\varrho > 0$.

Mit Proposition 6.5 folgt $S(B_1(0)) \supseteq B_\varrho(0)$, insbesondere $\operatorname{im} S = Z$, also $\operatorname{im} T = \operatorname{im} S = Z = \overline{\operatorname{im} T}$, und $\operatorname{im} T$ ist abgeschlossen.

///

Satz 6.2 *Ein stetiger, linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen ist surjektiv, d.h.*

$$\text{im } T = Y$$

genau dann, wenn

$$\|T^*y^*\| \geq \varrho \|y^*\| \quad \text{für alle } y^* \in Y^*$$

für ein $\varrho > 0$.

Beweis:

$\text{im } T = Y$ ist äquivalent zu $\text{im } T$ dicht und abgeschlossen in Y . Mit Satz 6.1 und (6.3) ist dies äquivalent zu

$$T^* \text{ ist injektiv und } \text{im } T^* \text{ ist abgeschlossen.} \quad (6.4)$$

Dies impliziert mit dem Satz von der stetigen Inverse, Korollar 3.5,

$$\|T^*y^*\| \geq \varrho \|y^*\| \quad \text{für alle } y^* \in Y^* \quad (6.5)$$

und ein $\varrho > 0$. Gilt umgekehrt (6.5), so ist T^* injektiv und für y_k^* mit $T^*y_k^* \rightarrow x^*$, ist $(T^*y_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und mit obiger Abschätzung ist auch $(y_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, also konvergent $y_k^* \rightarrow y^*$. Dies ergibt $x^* \leftarrow T^*y_k^* \rightarrow T^*y^* \in \text{im } T^*$, und $\text{im } T^*$ ist abgeschlossen, und wir erhalten (6.4).

///

7 Kompakte Operatoren

Definition 7.1 Eine stetige, lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen X, Y heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Folge x_n in X eine Teilfolge von Tx_n in Y konvergiert.

□

Bemerkungen:

1. Wir sehen, $T : X \rightarrow Y$ ist kompakt genau dann, wenn der Abschluß von $T(B_1(0))$ kompakt ist. Insbesondere, ist $\dim(\text{im } T) < \infty$, so ist $\overline{T(B_1(0))} \subseteq \text{im } T$ mit Proposition 1.1 kompakt, und somit auch T .
2. Für $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^2$ setzen wir $T(x_j)_{j \in \mathbb{N}} = (\lambda_j x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{C}$ gegeben. Es gilt $Tx \in l^2$ für alle $x \in l^2$ genau dann, wenn λ_j beschränkt sind, und in diesem Fall gilt $\|T\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j|$. Weiter ist T kompakt genau dann, wenn $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = 0$.
3. Ist $T : X \rightarrow Y$ kompakt und $\dim X = \infty$, so ist T nicht invertierbar.
4. Die kompakten, linearen Abbildungen bilden einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X, Y)$.
5. Ist eine der linearen Abbildungen $T : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ stetig und die andere kompakt, so ist die Verkettung ST kompakt.

□

Lemma 7.1 (Ehring-lemma) Es seien X, Y, Z Banachräume und zwei stetige, lineare Abbildungen

$$X \rightarrow Y \hookrightarrow Z,$$

wobei $T : X \rightarrow Y$ kompakt ist und $I : Y \hookrightarrow Z$ injektiv ist. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$, so daß

$$\|Tx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C_\varepsilon \|ITx\|_Z.$$

Beweis:

Angenommen die Aussage gilt nicht, dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine Folge $x_m \in X$ mit

$$\varepsilon \|x_m\|_X + m \|ITx_m\|_Z < \|Tx_m\|_Y = 1.$$

Dann ist x_m in X beschränkt, und, da T kompakt ist, konvergiert für eine Teilfolge

$$Tx_m \rightarrow y \in Y.$$

Dies ergibt

$$\|y\|_Y \leftarrow \|Tx_m\|_Y = 1,$$

insbesondere $y \neq 0$. Andererseits gilt

$$\|Iy\|_Z \leftarrow \|ITx_m\|_Z \rightarrow 0,$$

also $y = 0$, da I injektiv ist.

Dies ist ein Widerspruch, und das Lemma ist bewiesen.

///

Proposition 7.2 Für eine stetige, lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen X, Y ist T kompakt genau dann, wenn T^* kompakt ist.

Beweis:

Es sei T kompakt und $y_n^* \in B_1(0) \subseteq Y^*$. Dann sind y_n^* gleichmäßig gleichgradig stetig und in 0 gleichmäßig beschränkt. Da $\overline{T(B_1(0))}$ kompakt ist, konvergiert mit dem Satz von Arzela-Ascoli nach Übergang zu einer Teilfolge y_n^* gleichmäßig auf $T(B_1(0))$. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \|T^*y_n^* - T^*y_m^*\| &= \sup_{x \in B_1(0)} |\langle T^*y_n^* - T^*y_m^*, x \rangle| = \sup_{x \in B_1(0)} |\langle y_n^* - y_m^*, Tx \rangle| = \\ &= \sup_{y \in T(B_1(0))} |\langle y_n^* - y_m^*, y \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

also ist $T^*y_n^*$ eine Cauchyfolge, somit konvergent und T^* ist kompakt.

Ist T^* kompakt, so folgt aus dem eben Bewiesenen, daß $T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ kompakt ist. Mit den kanonischen Einbettungen $i_X : X \rightarrow X^{**}$ und $i_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ sehen wir $i_Y T = T^{**} i_X$. Nach obigen Bemerkungen ist die Verkettung $T^{**} i_X$ kompakt, und da i_Y normerhaltend ist, folgt die Kompaktheit von T .

///

Proposition 7.3 Für einen kompakten, linearen Operator $T : X \rightarrow X$ auf einem Banachraum X gelten folgende Aussagen.

1. $\dim \ker(I - T) < \infty$.
2. $\text{im}(I - T)$ ist abgeschlossen.
3. $I - T$ ist surjektiv $\implies I - T$ ist injektiv.

Beweis:

1. Es sei $x_n \in \ker(I - T)$ beschränkt. Dann konvergiert nach Übergang zu einer Teilfolge $x_n = Tx_n \rightarrow y$. Daher ist $\ker(I - T) \cap \overline{B_1(0)}$ kompakt, und mit Proposition 1.3 folgt $\dim \ker(I - T) < \infty$.

//

2. Es sei $(I - T)\tilde{x}_n \rightarrow y$. Wir wählen $k_n \in \ker(I - T)$ mit

$$\|\tilde{x}_n - k_n\| \leq 2d(\tilde{x}_n, \ker(I - T)) = 2 \inf_{k \in \ker(I - T)} \|\tilde{x}_n - k\|.$$

Ist $d(\tilde{x}_n, \ker(I - T)) > 0$, so ist dies klarerweise möglich, während andernfalls $\tilde{x}_n \in \ker(I - T)$ folgt, da der Kern abgeschlossen ist, und wir können $k_n := \tilde{x}_n$ wählen.

Setzen wir $x_n := \tilde{x}_n - k_n$, so folgt $(I - T)x_n = (I - T)\tilde{x}_n \rightarrow y$, $d(x_n, \ker(I - T)) = d(\tilde{x}_n, \ker(I - T))$ und

$$\|x_n\| \leq 2d(x_n, \ker(I - T)).$$

Gilt $d_n := d(x_n, \ker(I - T)) \rightarrow \infty$ für eine Teilfolge, so ist $\hat{x}_n := x_n/d_n$ beschränkt und nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $T\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}$ und $(I - T)\hat{x}_n = (I - T)x_n/d_n \rightarrow 0$. Dies ergibt

$$\hat{x}_n = (I - T)\hat{x}_n + T\hat{x}_n \rightarrow \hat{x},$$

also $(I - T)\hat{x} \leftarrow (I - T)\hat{x}_n \rightarrow 0$ und $\hat{x} \in \ker(I - T)$. Dann gilt

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}\| \geq d(\hat{x}_n, \ker(I - T)) = d(x_n, \ker(I - T))/d_n = 1,$$

also ein Widerspruch.

Somit ist d_n , also auch x_n beschränkt, und für eine Teilfolge konvergiert $Tx_n \rightarrow x$. Dies ergibt

$$x_n = (I - T)x_n + Tx_n \rightarrow y - x,$$

also $y \leftarrow (I - T)x_n \rightarrow (I - T)(y - x) \in \text{im}(I - T)$ und $\text{im}(I - T)$ ist abgeschlossen.

//

3. Angenommen $I - T$ ist surjektiv, aber nicht injektiv, dann existiert $x =: x_1 \in \ker(I - T) - \{0\}$. Da $I - T$ surjektiv ist, existiert induktiv

$$(I - T)x_n = x_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Daraus folgt

$$(I - T)^{n-1}x_n = x_1 \neq 0,$$

$$(I - T)^nx_n = (I - T)x_1 = 0,$$

also

$$x_n \in \ker(I - T)^n - \ker(I - T)^{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Da $\ker(I - T)^{n-1}$ abgeschlossen ist, gilt $d(x_n, \ker(I - T)^{n-1}) > 0$, und es existiert $k_n \in \ker(I - T)^{n-1}$ mit

$$0 < \|x_n - k_n\| \leq 2d(x_n, \ker(I - T)^{n-1}).$$

Wir setzen

$$\tilde{x}_n := \frac{x_n - k_n}{\|x_n - k_n\|}$$

und sehen $d(\tilde{x}_n, \ker(I - T)^{n-1}) \geq 1/2$. Daraus folgt für $n > m$

$$\|T\tilde{x}_n - T\tilde{x}_m\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m - (I - T)\tilde{x}_n + (I - T)\tilde{x}_m\| \geq 1/2, \quad (7.1)$$

da $\tilde{x}_m + (I - T)\tilde{x}_n - (I - T)\tilde{x}_m \in \ker(I - T)^{n-1}$.

Da $\|\tilde{x}_n\| = 1$ und T kompakt ist, konvergiert andererseits eine Teilfolge von $T\tilde{x}_n$ in X , ist also eine Cauchyfolge. Dies widerspricht (7.1), und $I - T$ ist injektiv.

///

Satz 7.1 Für einen kompakten, linearen Operator $T : X \rightarrow X$ auf einem Banachraum X gilt

$$\dim \ker(I - T) = \text{codim im}(I - T) = \dim \ker(I - T^*) = \text{codim im}(I - T^*) < \infty.$$

Beweis:

Mit Proposition 7.3 ist $\text{im}(I - T)$ abgeschlossen und mit Satz 6.1 ist $\text{im}(I - T^*) = \text{im}(I - T)^*$ schwach* abgeschlossen. Weiter sind $\ker(I - T)$ und $\ker(I - T^*)$ endlich-dimensional, da T^* mit Proposition 7.2 kompakt ist. Dann gilt mit der Gleichheit in Proposition 6.4

$$\text{codim } \text{im}(I - T) = \dim \ker(I - T^*), \quad \dim \ker(I - T) = \text{codim } \text{im}(I - T^*) < \infty.$$

Wir zeigen unten

$$\dim \ker(I - T) \leq \text{codim } \text{im}(I - T). \quad (7.2)$$

Da T^* mit Proposition 7.2 kompakt ist, ergibt sich daraus $\dim \ker(I - T^*) \leq \text{codim } \text{im}(I - T^*)$, und der Satz folgt aus obigen Gleichungen.

Es verbleibt (7.2) zu zeigen. Da $\ker(I - T)$, $X/\text{im}(I - T)$ endlich-dimensional sind und $\ker(I - T)$, $\text{im}(I - T)$ abgeschlossen sind, existieren mit Proposition 4.1 abgeschlossene Unterräume $Y, Z \subseteq X$ mit

$$\begin{aligned} X &= \ker(I - T) \oplus Y = \text{im}(I - T) \oplus Z, \\ \dim Z &= \text{codim } \text{im}(I - T). \end{aligned}$$

Weiter ist die Projektion $P : X \rightarrow \ker(I - T)$ mit $\ker P = Y$ mit Proposition 4.2 stetig. Angenommen $\dim Z = \text{codim}(X/\text{im}(I - T)) < \dim \ker(I - T)$, so existiert eine lineare Abbildung $\phi : \ker(I - T) \rightarrow Z$ die surjektiv, aber nicht injektiv ist. Da die Räume endlich-dimensional sind, ist ϕ stetig und kompakt. Wir setzen

$$Sx := Tx + \phi Px.$$

Klarerweise ist S stetig und kompakt. Wir sehen

$$\begin{aligned} (I - S)(Y) &= (I - T)(Y) = (I - T)(Y + \ker(I - T)) = (I - T)(X) = \text{im}(I - T), \\ (I - S)(\ker(I - T)) &= \phi P(\ker(I - T)) = \phi(\ker(I - T)) = Z, \end{aligned}$$

also

$$\text{im}(I - S) = \text{im}(I - T) + Z = X,$$

und $I - S$ ist surjektiv. Mit Proposition 7.3 ist $I - S$ auch injektiv. Da aber $\phi : \ker(I - T) \rightarrow Z$ nicht injektiv ist, existiert $x \in \ker(I - T) - \{0\}$ mit $\phi x = 0$, und wir sehen

$$(I - S)(x) = (I - T)(x) + \phi Px = \phi x = 0,$$

im Widerspruch zur Injektivität von $I - S$. Daher gilt (7.2), und der Satz ist bewiesen.

///

09.02.21 / 11.02.21

Definition 7.2 Eine stetige, lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen heißt ein Fredholmoperator, wenn

$$\begin{aligned} \text{im } T &\subseteq Y \text{ ist abgeschlossen,} \\ \dim \ker T &< \infty, \quad \text{codim } \text{im } T < \infty. \end{aligned}$$

Weiter heißt

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \operatorname{codim} \operatorname{im} T.$$

der Index von T .

□

Bemerkungen:

1. Mit obigem Satz ist $I - T$ für einen kompakten, linearen Operator T ein Fredholmoperator vom Index 0.
2. Jeder lineare Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen X, Y ist ein Fredholmoperator. Da aus der linearen Algebra

$$\dim X = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$$

bekannt ist, ist der Index von T gegeben durch

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} T &= \\ &= \dim \ker T - \operatorname{codim} \operatorname{im} T = \dim \ker T - (\dim Y - \dim \operatorname{im} T) = \\ &= \dim X - \dim Y. \end{aligned}$$

□

Proposition 7.4 (Fredholm-Alternative) *Ein Fredholmoperator T vom Index 0 auf dem Banachraum X ist surjektiv genau dann, wenn dieser injektiv ist. Anders ausgedrückt gilt: Entweder hat die Gleichung*

$$Tx = y$$

für alle $y \in X$ eine eindeutige Lösung $x \in X$ oder

$$Tx = 0$$

hat eine nicht-triviale Lösung.

Beweis:

Da T ein Fredholmoperator vom Index 0 ist, gilt

$$\dim \ker T = \dim(X/\operatorname{im} T),$$

also

$$\ker T = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{im} T = X,$$

und die Behauptung folgt.

///

8 Spektrum

In diesem Paragraphen betrachten wir nur Banachräume über $\mathbb{C}$. Wir beginnen mit der Definition des Spektrums.

Definition 8.1 *Es sei T ein stetiger, linearer Operator auf einem komplexen Banachraum X . Dann ist die Resolventenmenge von T definiert durch*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ ist invertierbar}\}$$

und das Spektrum von T durch

$$\sigma(T) := \mathbb{C} - \rho(T).$$

Das Spektrum zerlegen wir in das Punktspektrum

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

das kontinuierliche Spektrum

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda I - T) = \{0\}, \operatorname{im}(\lambda I - T) \neq X, \overline{\operatorname{im}(\lambda I - T)} = X\}$$

und das diskrete Spektrum

$$\sigma_d(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda I - T) = \{0\}, \overline{\operatorname{im}(\lambda I - T)} \neq X\}.$$

$\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt Eigenwert und eine nicht-triviale Lösung $x \in X - \{0\}$ von

$$Tx = \lambda x$$

heißt Eigenvektor. $\ker(\lambda I - T)$ heißt der Eigenraum von T zum Eigenwert λ .

Für $\lambda \in \rho(T)$ heißt

$$R(\lambda; T) := (\lambda I - T)^{-1} \in L(X, X)$$

die Resolvente von T in λ .

□

Bemerkungen:

1. Ist $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ und $\operatorname{im}(\lambda I - T) = X$, so ist $\lambda I - T$ bijektiv und mit dem Satz von der stetigen Inverse, Korollar 3.5, ist die Inverse stetig, also $\lambda I - T$ invertierbar und $\lambda \in \rho(T)$.
2. Ist $\dim X < \infty$, so ist $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ endlich.

□

Proposition 8.1 Für einen stetigen, linearen Operator T auf einem komplexen Banachraum X gilt

$$\|R(\lambda; T)\|^{-1} \leq d(\lambda, \sigma(T)) \quad \text{für } \lambda \in \rho(T),$$

insbesondere ist $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ offen. Weiter ist die Abbildung

$$\lambda \in \rho(T) \subseteq \mathbb{C} \mapsto R(\lambda; T) \in L(X, X) \text{ stetig,}$$

und für jedes $\Lambda \in L(X, X)^*$ ist die Abbildung

$$\lambda \in \rho(T) \subseteq \mathbb{C} \mapsto \Lambda R(\lambda; T) \in \mathbb{C} \text{ holomorph.}$$

Beweis:

Für $\lambda \in \rho(T)$ ist $\lambda I - T$ invertierbar mit Inverse $R(\lambda; T)$, und wir schreiben für $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mu I - T = (\lambda I - T)(I + (\mu - \lambda)R(\lambda; T)).$$

Mit Proposition 1.5 ist dies invertierbar, wenn

$$|\mu - \lambda| \|R(\lambda; T)\| < 1,$$

und in diesem Fall ist die Inverse durch die Neumann-Reihe

$$R(\mu; T) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R(\lambda; T)^{m+1} (\mu - \lambda)^m$$

gegeben, insbesondere ist die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda; T)$ stetig. Setzen wir $\varrho := \|R(\lambda; T)\|^{-1}$, so sehen wir $B_{\varrho}(\lambda) \subseteq \rho(T)$ und $d(\lambda, \rho(T)) \geq \varrho = \|R(\lambda; T)\|^{-1}$. Mit obiger Reihendarstellung erhalten wir

$$\Lambda R(\mu; T) = \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda \left((-1)^m R(\lambda; T)^{m+1} \right) (\mu - \lambda)^m \quad \text{für } \mu \in B_{\varrho}(\lambda),$$

und $\mu \mapsto \Lambda R(\mu; T)$ ist lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, also holomorph.

///

Satz 8.1 Für einen stetigen, linearen Operator T auf einem komplexen Banachraum $X \neq \{0\}$ ist $\sigma(T)$ kompakt und nichtleer, und es gilt

$$\varrho(T) := \inf\{r > 0 \mid \sigma(T) \subseteq B_r(0)\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \|T^m\|^{1/m} \leq \|T\|.$$

Dieser Wert heißt der Spektralradius von T .

Beweis:

Die Gleichung in der Mitte bzw. die Ungleichung rechts ergeben sich aus (1.5) bzw. aus der Definition von $\inf$.

Für $|\lambda| > \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m}$ sehen wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(T/\lambda)^m\|^{1/m} < 1,$$

und mit der Bemerkung nach Proposition 1.5 ist $\lambda I - T = \lambda(I - T/\lambda)$ invertierbar und die Inverse ist gegeben durch die Neumann-Reihe

$$R(\lambda; T) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-1-k} T^k.$$

Dies ergibt

$$\varrho := \inf_{\sigma(T) \subseteq B_r(0)} r \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m}.$$

Damit ist $\sigma(T)$ beschränkt und mit der vorigen Proposition abgeschlossen, also kompakt.

Weiter ist nach voriger Proposition für $\Lambda \in L(X, X)^*$ die Abbildung $\lambda \mapsto \Lambda R(\lambda; T)$ holomorph in $\rho(T) \supseteq \mathbb{C} - \overline{B_\varrho(0)}$. Mit dem Cauchy-Integralsatz sind die Integrale für $m \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \lambda^m \Lambda R(\lambda; T) d\lambda \quad \text{unabhängig von } r > \varrho.$$

Für $r > \|T\|$ sehen wir mit obiger Reihendarstellung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \lambda^m \Lambda R(\lambda; T) d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \lambda^{m-1-k} \Lambda(T^k) d\lambda = \Lambda(T^m)$$

und weiter

$$|\Lambda(T^m)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \lambda^m \Lambda R(\lambda; T) d\lambda \right| \leq r^{m+1} \|\Lambda\| \sup_{\lambda \in \partial B_r(0)} \|R(\lambda; T)\| \quad \text{für } r > \varrho,$$

also mit Korollar 4.3 (4.5)

$$\|T^m\| \leq r^{m+1} \sup_{\lambda \in \partial B_r(0)} \|R(\lambda; T)\| \quad \text{für alle } r > \varrho, m \in \mathbb{N}_0. \quad (8.1)$$

Dies ergibt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} r \left(r \sup_{\lambda \in \partial B_r(0)} \|R(\lambda; T)\| \right)^{1/m} \leq r \quad \text{für alle } r > \varrho,$$

also

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \varrho$$

und mit obiger Abschätzung die Gleichheit.

Ist $\sigma(T) = \emptyset$, so ist $\varrho = 0$ und $R(0, T) \in L(X, X)$, also mit (8.1) für $m = 0$

$$\|I\| \leq r \sup_{\lambda \in \partial B_r(0)} \|R(\lambda; T)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0$$

mit der Stetigkeit der Resolvente aus Proposition 8.1, und $I = 0$ bzw. $X = \{0\}$.

///

Bemerkung:

Für $\sigma(T) \neq \emptyset$ haben wir klarerweise

$$\varrho(T) := \inf_{\sigma(T) \subseteq B_r(0)} r = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

□

Satz 8.2 (Spektralsatz für kompakte Operatoren, Satz von Riesz-Schauder)

Für einen kompakten, linearen Operator T auf einem komplexen Banachraum X besteht $\sigma(T) - \{0\}$ aus abzählbar vielen Eigenwerten mit endlich-dimensionalen Eigenräumen, die sich nur bei 0 häufen können. Ist $\dim X = \infty$, so ist $0 \in \sigma(T)$.

Beweis:

Ist $\dim X = \infty$, so ist T mit Bemerkung 3. nach Definition 7.1 nicht invertierbar, also $0 \in \sigma(T)$.

Ist $\lambda \notin \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, so ist $\ker(I - T/\lambda) = \{0\}$, und mit Satz 7.1 folgt $\operatorname{im}(I - T/\lambda) = X$, also $\lambda \notin \sigma(T)$ und somit $\sigma(T) - \{0\} = \sigma_p(T) - \{0\}$. Mit Satz 7.1 sind die Eigenräume $\ker(\lambda I - T)$ für $\lambda \in \sigma_p(T) - \{0\}$ endlich-dimensional.

Ist $\sigma(T) - \{0\}$ nicht endlich, so wählen wir abzählbar viele, paarweise verschiedene $\lambda_n \in \sigma(T) - \{0\}$ mit Eigenvektoren $v_n \in \ker(\lambda_n I - T) - \{0\}$ und setzen

$$X_n := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}.$$

Die Eigenvektoren $v_1, v_2, \dots$ sind linear unabhängig, denn für $v_{n+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, mit $\alpha_j \in \mathbb{C}$ und $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig folgt

$$0 = (T - \lambda_{n+1}I)v_{n+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_j (T - \lambda_{n+1}I)v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{n+1})v_j,$$

also $\alpha_j (\lambda_j - \lambda_{n+1}) = 0$ und $\alpha_j = 0$, da λ_j paarweise verschieden. Dies ergibt $v_{n+1} = 0$ ein Widerspruch.

Daraus folgt $X_{n-1} \neq X_n$ ist ein echter Teilraum, und, da endlich-dimensionale Unterräume mit Proposition 1.1 abgeschlossen sind, existiert mit dem Satz vom fast orthogonalen Element, Proposition 1.2, $x_n \in X$ mit

$$\|x_n\| = 1, \quad d(x_n, X_{n-1}) \geq 1/2.$$

Da $Tv_j = \lambda_j v_j \in \operatorname{span}\{v_j\}$, ist X_{n-1} invariant unter T , d.h. $T(X_{n-1}) \subseteq X_{n-1}$. Schreiben wir $x_n = \alpha_n v_n + \tilde{x}_n$ mit $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\tilde{x}_n \in X_{n-1}$, so sehen wir

$$(T - \lambda_n I)x_n = (T - \lambda_n I)\tilde{x}_n \in X_{n-1}$$

und für $m < n$

$$\left\| T(x_n/\lambda_n) - T(x_m/\lambda_m) \right\| = \left\| x_n + \frac{1}{\lambda_n}(T - \lambda_n I)x_n - \frac{1}{\lambda_m}Tx_m \right\| \geq d(x_n, X_{n-1}) \geq 1/2.$$

Damit ist keine Teilfolge von $T(x_n/\lambda_n)$ eine Cauchyfolge, und da T kompakt ist, kann x_n/λ_n keine beschränkte Teilfolge enthalten. Dies ergibt

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n/\lambda_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|},$$

also $\lambda_n \rightarrow 0$.

Damit ist 0 der einzige Häufungspunkt von $\sigma(T) - \{0\}$, insbesondere ist $\sigma(T) - B_\varrho(0)$ endlich für $\varrho > 0$, und $\sigma(T)$ ist abzählbar.

///

16.02.21 / 18.02.21

Definition 8.2 Für einen stetigen, linearen Operator $T : X \rightarrow X$ auf einem Hilbertraum X betrachten wir die adjungierte Abbildung $T^* : X \rightarrow X$ gemäß der Bemerkung nach Definition 6.1.

T heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$. T heißt positiv definit bzw. nicht-negativ semi-definit, wenn zusätzlich $\langle Tx, x \rangle > 0$ bzw. ≥ 0 für alle $x \in X - \{0\}$.

T heißt orthogonal oder unitär, wenn $TT^* = T^*T = I$.

T heißt normal, wenn $TT^* = T^*T$.

Selbstadjungierte und unitäre Operatoren sind normal.

□

Bemerkungen:

1. Existiert zu einer linearen Abbildung $T : X \rightarrow X$ eine adjungierte Abbildung $T^* : X \rightarrow X$ im Sinne der Bemerkung nach Definition 6.1, so sind T und T^* nach dieser Bemerkung notwendigerweise stetig.
2. Für T selbstadjungiert gilt $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Dazu sei λ ein Eigenwert von T und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Wir rechnen

$$\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2,$$

also $\lambda = \bar{\lambda}$, da $\|x\| \neq 0$.

Ist T nicht-negativ semi-definit, so folgt

$$\lambda \|x\|^2 = \langle Tx, x \rangle \geq 0,$$

also $\lambda \geq 0$ und $\sigma_p(T) \subseteq [0, \infty[$.

3. Für T unitär gilt $\sigma_p(T) \subseteq \partial B_1(0)$.

Dazu sei λ ein Eigenwert von T und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Wir rechnen

$$\|x\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2,$$

also $|\lambda|^2 = 1$ und $\lambda \in \partial B_1(0)$, da $\|x\| \neq 0$.

□

Proposition 8.2 *Es sei T ein stetiger, linearer Operator auf einem Hilbertraum X . Dann gilt*

$$T \text{ ist normal} \iff \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \text{für alle } x \in X,$$

insbesondere folgt in diesem Fall

$$\ker(\lambda I - T) = \ker(\bar{\lambda}I - T^*).$$

Beweis:

Ist T normal, so folgt

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, TT^*x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2,$$

insbesondere $\ker T = \ker T^*$. Weiter gilt $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda}I - T^*$ und

$$(\lambda I - T)(\lambda I - T)^* = (\lambda I - T)(\bar{\lambda}I - T^*) = (\bar{\lambda}I - T^*)(\lambda I - T) = (\lambda I - T)^*(\lambda I - T),$$

also ist $\lambda I - T$ auch normal und $\ker(\lambda I - T) = \ker(\bar{\lambda}I - T^*)$.

Gilt umgekehrt $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in X$, so erhalten wir aus der polaren Identität (2.1)

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle,$$

also

$$\langle x, T^*Ty \rangle = \langle x, TT^*y \rangle,$$

$T^*T = TT^*$ und T ist normal.

///

Proposition 8.3 *Für einen normalen Operator T auf einem Hilbertraum X gilt*

$$\varrho(T) = \inf\{r > 0 \mid \sigma(T) \subseteq B_r(0)\} = \|T\|.$$

Beweis:

Mit Satz 8.1 folgt die Behauptung, wenn wir

$$\|T^m\| \geq \|T\|^m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

zeigen.

Für $m = 1$ ist die Ungleichung trivial. Für $m \geq 1$ rechnen wir mit der vorigen Proposition

$$\begin{aligned} \|T^m x\|^2 &= \langle T^m x, T^m x \rangle = \langle T^* T^m x, T^{m-1} x \rangle \leq \|T^* T^m x\| \|T^{m-1} x\| = \\ &= \|T^{m+1} x\| \|T^{m-1} x\| \leq \|T^{m+1}\| \|T\|^{m-1} \|x\|^2, \end{aligned}$$

also

$$\|T^m\|^2 \leq \|T^{m+1}\| \|T\|^{m-1}.$$

Gilt bereits $\|T^m\| \geq \|T\|^m$, so folgt

$$\|T^{m+1}\| \|T\|^{m-1} \geq \|T\|^{2m},$$

also

$$\|T^{m+1}\| \geq \|T\|^{m+1},$$

und die Behauptung folgt mit Induktion.

///

Beispiele:

Wir betrachten $T : l^2 \rightarrow l^2$ mit $T(x_j)_{j \in \mathbb{N}} = (\lambda_j x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{C}$ beschränkt. Dann ist T stetig und $\|T\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j|$.

Klarerweise sind λ_j Eigenwerte von T . Ist umgekehrt λ ein Eigenwert mit Eigenvektor $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \neq 0$, so folgt

$$(\lambda x_j)_{j \in \mathbb{N}} = T(x_j)_{j \in \mathbb{N}} = (\lambda_j x_j)_{j \in \mathbb{N}}$$

und

$$\lambda = \lambda_j \quad \text{für } x_j \neq 0.$$

Da $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \neq 0$, folgt $\lambda \in \{\lambda_j\}$, und λ_j sind alle Eigenwerte von T bzw. $\sigma_p(T) = \{\lambda_j\}$.

Wir sehen $T^*(x_j)_{j \in \mathbb{N}} = (\bar{\lambda}_j x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, und T ist normal. Mit obiger Proposition folgt

$$\varrho(T) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j|.$$

T ist selbstadjungiert genau dann, wenn $\lambda_j \in \mathbb{R}$, T ist nicht-negativ semi-definit genau dann, wenn $\lambda_j \geq 0$, und T ist unitär genau dann, wenn $|\lambda_j| = 1$.

Wählen wir $\lambda_j := 1 - 1/(j+1)$, so ist T positiv definit. Da $\sigma(T)$ kompakt ist und $1 \leftarrow \lambda_j \in \sigma(T)$, gilt $1 \in \sigma(T)$, aber $1 \notin \sigma_p(T)$, also $1 \in \sigma_c(T) \cup \sigma_d(T) \neq \emptyset$.

Weiter sehen wir

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \langle Tx, x \rangle = 1.$$

Angenommen es existierte $x \in l^2$, $\|x\| \leq 1$ mit $\langle Tx, x \rangle = 1$, so sehen wir $\|x\| = 1$ und

$$\langle T(x + ty), x + ty \rangle \leq \|x + ty\|^2 \quad \text{für alle } y \in l^2, t \in \mathbb{R},$$

mit Gleichheit für $t = 0$. Differentiation ergibt

$$\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle.$$

Da T selbstadjungiert ist, sehen wir $\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, y \rangle}$ und somit

$$\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle.$$

Ersetzen wir y durch iy , so erhalten wir

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } y \in l^2,$$

also $Tx = x$, und 1 wäre ein Eigenwert, da $x \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch, und das obige Supremum wird nicht angenommen.

□

Satz 8.3 (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren) Für einen kompakten, normalen Operator T auf einem Hilbertraum X existiert ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren $v_1, v_2, \dots$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ mit $\lambda_k \rightarrow 0$, falls dies unendlich viele sind, und

$$X = \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots\}},$$

genauer

$$\ker(T) = \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}^\perp.$$

Es gilt

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, v_j \rangle v_j \quad \text{für } x \in X.$$

Beweis:

Für Eigenwerte $\lambda \neq \mu$ zeigen wir, daß die Eigenräume orthogonal stehen, d.h.

$$\ker(\lambda I - T) \perp \ker(\mu I - T). \quad (8.2)$$

Dazu sei $x \in \ker(\lambda I - T)$, $y \in \ker(\mu I - T)$. Dann gilt $Tx = \lambda x$ und $y \in \ker(\bar{\mu}I - T^*)$ mit Proposition 8.2, also $T^*y = \bar{\mu}y$. Wir rechnen

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\mu}y \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle.$$

Da $\lambda \neq \mu$, folgt $x \perp y$ und die Behauptung.

Mit dem Satz von Riesz-Schauder, Satz 8.2, sind alle $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$ Eigenwerte mit endlich-dimensionalen Eigenräumen $\ker(\lambda I - T)$, und dies sind abzählbar viele. Zu jedem Eigenwert $\lambda \neq 0$ wählen wir eine Orthonormalbasis des Eigenraums $\ker(\lambda I - T)$, und erhalten mit (8.2) ein abzählbares Orthonormalsystem aus Eigenvektoren $v_1, v_2, \dots$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ mit

$$\ker(\lambda I - T) \subseteq \text{span}\{v_1, v_2, \dots\} \quad \text{für alle } \lambda \neq 0. \quad (8.3)$$

Sind dies unendlich viele Eigenvektoren, so folgt $\lambda_j \rightarrow 0$, da jeder Eigenwert nur endlich oft auftritt und sich die Eigenwerte mit dem Satz von Riesz-Schauder, Satz 8.2, nur bei 0 häufen können.

Wir setzen $Y := \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}^\perp$ und sehen mit Proposition 2.4

$$X = Y \oplus \overline{\text{span}\{v_1, v_2, \dots\}}.$$

Wir zeigen

$$\ker T = Y. \quad (8.4)$$

Aus (8.2) für $\mu = 0$ folgt $v_j \in \ker(\lambda_j I - T) \perp \ker T$ und

$$\ker T \subseteq \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}^\perp = Y.$$

Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir $y \in Y$ und sehen

$$\langle Ty, v_j \rangle = \langle y, T^*v_j \rangle = \lambda_j \langle y, v_j \rangle = 0,$$

$$\langle T^*y, v_j \rangle = \langle y, Tv_j \rangle = \bar{\lambda}_j \langle y, v_j \rangle = 0,$$

also $Ty, T^*y \perp v_j$, somit $Ty, T^*y \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}^\perp = Y$ und $T(Y), T^*(Y) \subseteq Y$. Wir definieren die Einschränkung $S : Y \rightarrow Y, Sy := Ty$. Klarerweise ist S kompakt, und Y als abgeschlossener Unterraum ein Hilbertraum. Weiter sehen wir für $y, y' \in Y$

$$\langle y, S^*y' \rangle = \langle Sy, y' \rangle = \langle Ty, y' \rangle = \langle y, T^*y' \rangle,$$

und, da $T^*y' \in Y$, folgt $S^*y' = T^*y'$. Dies ergibt $S^*S = T^*T = TT^* = SS^*$, und S ist normal.

Ist $S \neq 0$, so folgt mit Proposition 8.3

$$\varrho(S) = \inf\{r > 0 \mid \sigma(S) \subseteq B_r(0)\} = \|S\| > 0,$$

und es existiert $\mu \in \sigma(S) - \{0\} \neq \emptyset$. Mit dem Satz von Riesz-Schauder, Satz 8.2, ist dies ein Eigenwert von S , und es existiert ein Eigenvektor $v \in \ker(\mu I - S) - \{0\} \subseteq Y$. Dies ergibt mit der Definition von S und (8.3)

$$v \in \ker(\mu I - T) \subseteq \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}$$

und weiter

$$v \in Y \cap \text{span}\{v_1, v_2, \dots\} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}^\perp \cap \text{span}\{v_1, v_2, \dots\} = \{0\},$$

also $v = 0$ ein Widerspruch. Daher gilt $S = 0$, also $Y = \ker S \subseteq \ker T$, und wir erhalten (8.4).

Für $x \in X$ haben wir $x = y + z$ mit $y \in \ker T, z \in \overline{\text{span}\{v_1, v_2, \dots\}}$. $v_1, v_2, \dots$ ist eine Orthonormalbasis von $\overline{\text{span}\{v_1, v_2, \dots\}}$, und wir erhalten mit Proposition 2.7

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} \langle z, v_j \rangle v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, v_j \rangle v_j,$$

da $x - z = y \in \ker T \perp v_j$. Dies ergibt

$$Tx = Tz = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, v_j \rangle Tv_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, v_j \rangle v_j.$$

///

23.02.21 / 25.02.21

Teil III

Appendix

A Topologische Räume

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit allgemeinen topologischen Räumen.

Definition A.1 X sei eine Menge. Eine Familie von Teilmengen $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Topologie auf X , wenn

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- $U_i \in \mathcal{T} \implies \cup_i U_i \in \mathcal{T}$,
- $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{T}$,

und $(X, \mathcal{T})$ oder kurz X heißt topologischer Raum. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen die offenen Mengen, die Komplemente der offenen Mengen heißen die abgeschlossenen Mengen.

Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist

$$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf Y , die sogenannte Spurtopologie von $\mathcal{T}$ auf Y . Eine Menge $U \cap Y$ bzw. $A \cap Y$ mit U bzw. A offen bzw. abgeschlossen in X heißt relativ offen bzw. relativ abgeschlossen in Y .

□

Beispiele:

1. Auf einer beliebigen Menge X sind $\mathcal{T}_{dis} := \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{T}_{in} := \{\emptyset, X\}$ Topologien, die die diskrete und die indiskrete Topologie genannt werden.
- 2.

$$\mathcal{T}_{co} := \{U \in \mathcal{P}(X) \mid X - U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

bildet eine Topologie auf X , die sogenannte kofinite Topologie. Die abgeschlossenen Mengen sind hier genau die endlichen Mengen und X .

3. (X, d) sei ein metrischer Raum. Die Menge der offenen Mengen

$$\mathcal{T} := \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in U : \exists \rho > 0 : B_\rho^d(x) \subseteq U\}$$

bildet eine Topologie, die von der Metrik d induzierte Topologie. Eine Topologie heißt metrisierbar, wenn die Topologie von einer Metrik induziert werden kann.

4. Für zwei Topologien $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ auf X heißt $\mathcal{T}_1$ gröber als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ feiner als $\mathcal{T}_1$.
5. Für eine Familie $\mathcal{T}_i$ von Topologien auf X ist $\cap_i \mathcal{T}_i$ wieder eine Topologie auf X . Für eine beliebige Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \bigcap_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \text{ Topologie}} \mathcal{T}$$

die grösste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält. Sie heißt die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie.

Betrachten wir die Familie der endlichen Schnitte von $\mathcal{S}$

$$\mathcal{B} := \{\cap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \text{ endlich}\} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S})$$

mit dem leeren Schnitt $\cap \emptyset := X$, so sehen wir, daß die Familie der Vereinigungen von $\mathcal{B}$

$$\mathcal{T}_0 := \{\cup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S})$$

mit der leeren Vereinigung $\cup \emptyset := \emptyset$ eine Topologie bildet. Denn nach Definition gilt $\emptyset, X \in \mathcal{T}_0$, und für $B_{ij} \in \mathcal{B}, i \in I, j \in J$, gilt

$$\cup_j \cup_i B_{ij} = \cup_{ij} B_{ij} \in \mathcal{T}_0$$

und für J endlich

$$\cap_{j \in J} \cup_{i \in I} B_{ij} = \cup_{i: J \rightarrow I} \cap_{j \in J} B_{ij} \in \mathcal{T}_0,$$

da $\cap_{j \in J} B_{ij} \in \mathcal{B}$ für $i: J \rightarrow I$ und J endlich.

□

Definition A.2 $(X, \mathcal{T})$ sei ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt Basis von $\mathcal{T}$, wenn alle offenen Mengen $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}, B \subseteq U} B$$

von Basiselementen aus $\mathcal{B}$ dargestellt werden können, d.h. wenn

$$\forall U \in \mathcal{T} : \forall x \in U : \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U.$$

Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ heißt Subbasis von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{S}$ die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt.

□

Als nächstes definieren wir einige grundlegende topologische Begriffe.

Definition A.3 X sei ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt Umgebung eines Punktes $x \in X$, wenn eine offene Menge U existiert mit

$$x \in U \subseteq A.$$

$U(x)$ heißt offene Umgebung von x , wenn $x \in U(x)$ und $U(x)$ offen ist.

$x \in X$ heißt ein innerer Punkt einer Menge $A \subseteq X$, wenn eine offene Umgebung um x in A enthalten ist, d.h.

$$\exists U \text{ offen} : x \in U \subseteq A.$$

$x \in X$ heißt ein Berührungspunkt von $A \subseteq X$, wenn jede offene Umgebung um x einen Punkt aus A enthält, d.h.

$$\forall U \text{ offen}, x \in U : U \cap A \neq \emptyset.$$

$x \in X$ heißt ein Häufungspunkt von $A \subseteq X$, wenn jede offene Umgebung um x einen Punkt aus A verschieden von x enthält, d.h.

$$\forall U \text{ offen}, x \in U : U \cap A - \{x\} \neq \emptyset.$$

$x \in X$ heißt ein Randpunkt von $A \subseteq X$, wenn x ein Berührungspunkt von A und $X - A$ ist, d.h.

$$\forall U \text{ offen}, x \in U : U \cap A \neq \emptyset, U - A \neq \emptyset.$$

Die Menge der inneren Punkte von A heißt das Innere von A , geschrieben A° oder $\text{int}(A)$, die Menge der Berührungspunkte von A heißt der Abschluß von A , geschrieben $\bar{A}$, die Menge der Randpunkte von A heißt der Rand von A , geschrieben ∂A .

A heißt dicht in X , wenn $\bar{A} = X$, d.h.

$$\forall U \neq \emptyset \text{ offen} : A \cap U \neq \emptyset.$$

□

Bemerkungen:

1. Das Innere $\text{int}(A)$ einer Menge A ist die größte offene Teilmenge von A , d.h.

$$\text{int}(A) = \bigcup_{U \subseteq A \text{ offen}} U.$$

2. Der Abschluß $\bar{A}$ einer Menge A ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A , d.h.

$$\bar{A} = \bigcap_{F \supseteq A \text{ abgeschlossen}} F.$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \text{int}(A) + \partial A, \\ X &= \text{int}(A) + \partial A + \text{int}(X - A).\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\bar{A} = A \cup \{\text{Häufungspunkte von } A\}$$

und

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \bar{A} \cup \bar{B}, \\ \overline{\bar{A}} &= \bar{A}.\end{aligned}$$

□

Nun definieren wir Folgen-Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen.

Definition A.4 Eine Folge $x_n \in X$ in einem topologischen Raum X heißt konvergent gegen $x \in X$, geschrieben $x_n \rightarrow x$ oder

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

wenn für jede offene Umgebung U von x

$$\exists n_0 = n_0(U) : \forall n \geq n_0 : x_n \in U.$$

□

Bemerkungen:

1. In metrischen Räumen ist Konvergenz bezüglich der Metrik, d.h.

$$x_n \rightarrow x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0$$

und Konvergenz in der durch die Metrik induzierte Topologie äquivalent.

2. In der diskreten Topologie $\mathcal{T}_{dis}$ gilt $x_n \rightarrow x$ genau dann, wenn

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : x_n = x,$$

d.h. wenn die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast konstant gleich x ist.

3. In der indiskreten Topologie $\mathcal{T}_{in}$ gilt $x_n \rightarrow x$ für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und jedes $x \in X$. Insbesondere ist der Limes nicht eindeutig, wenn X mindestens zwei Punkte enthält.
4. In der kofiniten Topologie $\mathcal{T}_{co}$ konvergiert jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit paarweise verschiedenen Folgengliedern $x_n \in X$ gegen jedes $x \in X$. Insbesondere ist der Limes nicht eindeutig, wenn X unendlich ist.
5. Auf $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cong \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $n \mapsto 1/n$, $\infty \mapsto 0$, mit der durch die euklidische Metrik erzeugte Topologie. Wir sehen

$$n \rightarrow \infty.$$

□

Definition A.5 Ein topologischer Raum X heißt Hausdorff- oder T_2 -Raum, wenn

$$\forall x \neq y \in X : \exists U(x) \ni x, U(y) \ni y \text{ offen} : U(x) \cap U(y) = \emptyset.$$

□

Bemerkung:

Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum.

□

Proposition A.1 In einem Hausdorff-Raum X sind die Grenzwerte von Folgen eindeutig.

Beweis:

Angenommen $x_n \rightarrow x \neq y$, $x_n, x, y \in X$. Dann existieren $U(x) \ni x, U(y) \ni y$ offen mit

$$U(x) \cap U(y) = \emptyset.$$

Da $x \in U(x)$ offen ist und $x_n \rightarrow x$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \in U(x) \text{ für } n \geq n_0,$$

also $x_n \notin U(y)$ für $n \geq n_0$. Dies ist ein Widerspruch zu $x_n \rightarrow y$, und daher ist der Grenzwert eindeutig.

///

Nun definieren wir Stetigkeit zwischen topologischen Räumen.

Definition A.6 Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X, Y heißt stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge in Y offen in X ist, d.h.

$$\forall V \subseteq Y \text{ offen} : f^{-1}(V) \text{ ist offen in } X.$$

f heißt Homöomorphismus zwischen den topologischen Räumen X und Y , wenn f bijektiv und f und f^{-1} stetig sind. In diesem Fall heißen die topologischen Räume X und Y homöomorph.

Im Gegensatz dazu heißt $f : X \rightarrow Y$ eine offene bzw. abgeschlossene Abbildung, wenn für $S \subseteq X$ offen bzw. abgeschlossen auch das Bild $f(S) \subseteq Y$ offen bzw. abgeschlossen ist.

□

Bemerkungen:

1. Äquivalent ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in Y abgeschlossen in X ist.
2. Die Verkettung stetiger Funktionen ist wieder stetig.
3. Jede stetige Abbildung ist folgenstetig, d.h.

$$x_n \rightarrow x \implies f(x_n) \rightarrow f(x),$$

denn zu $f(x) \in V \subseteq Y$ offen ist $x \in f^{-1}(V) \subseteq X$ offen, also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \in f^{-1}(V) \quad \text{für } n \geq n_0$$

und somit

$$f(x_n) \in V \quad \text{für } n \geq n_0.$$

I.a. impliziert Folgenstetigkeit nicht volle Stetigkeit.

4. Ein topologischer Raum X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, wenn zu jedem $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $(U_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ von x existiert, d.h.

$$x \in U_n(x) \text{ ist offen,}$$

$$\forall U \text{ offen, } x \in U : \exists n \in \mathbb{N} : U_n(x) \subseteq U.$$

Z.B. erfüllt jeder metrische Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, so impliziert Folgenstetigkeit von $f : X \rightarrow Y$ die Stetigkeit von f . Zum Beweis sei $V \subseteq Y$ offen, $x \in f^{-1}(V)$ und $(U_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x , die mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom existiert. Dabei nehmen wir o.B.d.A. $U_{n+1}(x) \subseteq U_n(x)$ an. Wir zeigen

$$\exists n \in \mathbb{N} : U_n(x) \subseteq f^{-1}(V). \quad (\text{A.1})$$

Angenommen dies gilt nicht, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_n(x) - f^{-1}(V)$. Zu jedem $x \in U$ offen existiert $U_n(x) \subseteq U$, also $x_m \in U_n(x) \subseteq U$ für $m \geq n$ und $x_n \rightarrow x$. Mit der Folgenstetigkeit folgt $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Da aber $x_n \notin f^{-1}(V)$, sehen wir $f(x_n) \notin V$, und da $f(x) \in V$ offen ist, widerspricht dies $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Daher gilt (A.1), und x ist ein innerer Punkt von $f^{-1}(V)$, und, da $x \in f^{-1}(V)$ beliebig war, ist $f^{-1}(V)$ offen und f stetig.

5. Eine Abbildung $x : \mathbb{N}_\infty \rightarrow X$ in einen topologischen Raum ist stetig genau dann, wenn

$$x_n \rightarrow x_\infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Da $n \rightarrow \infty$ in $\mathbb{N}_\infty$, folgt aus der Stetigkeit von x , daß $x_n \rightarrow x_\infty$. Umgekehrt folgt für $k_n \rightarrow k$ in $\mathbb{N}_\infty, k \in \mathbb{N}$, daß $k_n = k$ für $n \geq n_0$ und n_0 geeignet, also $x_{k_n} \rightarrow x_k$. Für $k_n \rightarrow \infty$ sehen wir nach Voraussetzung $x_{k_n} \rightarrow x_\infty$. Zusammen ist x folgenstetig, also stetig, da $\mathbb{N}_\infty \cong \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ metrisch ist und somit das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

□

Wir kommen zu Abzählbarkeitseigenschaften von topologischen Räumen.

Definition A.7 X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn X eine abzählbare Basis besitzt. X heißt separabel, wenn eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ existiert, die in X dicht liegt.

□

Bemerkungen:

1. Hat X eine abzählbare Basis $\{B_1, B_2, \dots\}$ so hat auch jeder Unterraum $Y \subseteq X$ eine abzählbare Basis $\{B_1 \cap Y, B_2 \cap Y, \dots\}$.
2. Jeder Raum der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, erfüllt auch das erste Abzählbarkeitsaxiom.
3. Dagegen vererbt sich Separabilität i.a. nicht auf Unterräume. Dazu betrachten wir $\mathbb{R}^2$ mit der durch $\mathcal{B} := \{ [a, b[\times [c, d[\mid a < b, c < d \}$ erzeugten Topologie. Da $\mathcal{B}$ auch alle endlichen Schnitte aus seinen Elementen enthält, ist $\mathcal{B}$ tatsächlich eine Basis. Jede dieser Basismengen enthält mindestens einen Punkt mit rationalen Koordinaten, also liegt die abzählbare Menge $\mathbb{Q}^2$ dicht in $\mathbb{R}^2$, und $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(\mathcal{B}))$ ist separabel.

Betrachten wir $\tilde{\Delta} := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, so sehen wir

$$\{(x, -x)\} = ([x, x+1[\times [-x, -x+1]) \cap \tilde{\Delta},$$

also sind die einpunktigen Mengen $\{(x, -x)\}$ relativ offen in $\tilde{\Delta}$, und die Spurtopologie von $\tilde{\Delta}$ ist die diskrete Topologie. Damit sind alle Mengen in $\tilde{\Delta}$ abgeschlossen, und somit ist $\tilde{\Delta}$ die einzige Menge, die in $\tilde{\Delta}$ dicht liegt. Da $\tilde{\Delta} \cong \mathbb{R}$ überabzählbar ist, ist $\tilde{\Delta}$ nicht separabel.

□

Proposition A.2 X sei ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Dann gilt:

1. X ist separabel.
2. (**Lindelöf**) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.
3. Jede Basis von X enthält eine abzählbare Teilbasis.

Beweis:

Es sei $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von X .

1. Zu dem $B_n \neq \emptyset$ wählen wir $x_n \in B_n$ und setzen $S := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Nun sei $U \neq \emptyset$ offen. Wir wählen $x \in U$ und nach Definition von Basis existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in B_n \subseteq U$, also $x_n \in U$. Dies ergibt $U \cap S \neq \emptyset$, und S liegt dicht in X .

//

2. Es sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X . Zu jedem

$$n \in I := \{m \in \mathbb{N} \mid \exists U \in \mathcal{U} : B_m \subseteq U\}$$

wählen wir

$$U_n \in \mathcal{U} \text{ mit } B_n \subseteq U_n.$$

Wir zeigen

$$X = \bigcup_{n \in I} U_n, \quad (\text{A.2})$$

d.h. $\{U_n\}_{n \in I} \subseteq \mathcal{U}$ ist eine abzählbare Teilüberdeckung.

Zu $x \in X$ existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Mit der Definition von Basis existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in B_n \subseteq U$, insbesondere sehen wir $n \in I$, und es gilt $x \in B_n \subseteq U_n$. Daraus folgt (A.2).

//

3. Es sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Basis. Zu jedem

$$(k, l) \in J := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists A \in \mathcal{A} : B_i \subseteq A \subseteq B_j\}$$

wählen wir

$$A_{kl} \in \mathcal{A} \text{ mit } B_k \subseteq A_{kl} \subseteq B_l.$$

Zum Beweis, daß

$$\{A_{kl}\}_{k, l \in J} \subseteq \mathcal{A}$$

eine Basis ist, betrachten wir $x \in U$ offen. Mit der Definition von Basis existiert $l \in \mathbb{N}$ mit $x \in B_l \subseteq U$, und weiter $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A \subseteq B_l \subseteq U$ und schließlich $k \in \mathbb{N}$ mit

$$x \in B_k \subseteq A \subseteq B_l \subseteq U.$$

Wir sehen $(k, l) \in J$, und es gilt $x \in B_k \subseteq A_{kl} \subseteq B_l \subseteq U$, also ist $\{A_{kl}\}_{k, l \in J}$ eine Basis.

///

Proposition A.3 *Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.*

Beweis:

Besitzt X eine abzählbare Basis, so ist X mit Proposition A.2 separabel.

Umgekehrt sein der metrische Raum X separabel, und S sei eine abzählbare dichte Teilmenge von X . Wir setzen

$$\mathcal{B} := \{B_r(s) \mid s \in S, r \in \mathbb{Q}_+\}.$$

Klarerweise ist $\mathcal{B}$ abzählbar. Zum Beweis, daß $\mathcal{B}$ eine Basis ist, betrachten wir $x \in U$ offen. Per Definition existiert $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(x) \subseteq U$. Da S in X dicht liegt, existiert $s \in S \cap B_{\varrho/3}(x) \neq \emptyset$. Wir wählen rationales r mit $\varrho/3 < r < 2\varrho/3$. Da $d(s, x) < \varrho/3 < r$, gilt $x \in B_r(s) \in \mathcal{B}$. Weiter rechnen wir für $y \in B_r(s)$

$$d(y, x) \leq d(y, s) + d(s, x) \leq r + \varrho/3 < \varrho,$$

also $y \in B_\varrho(x)$ und

$$x \in B_r(s) \subseteq B_\varrho(x) \subseteq U,$$

und $\mathcal{B}$ ist eine abzählbare Basis.

///

Definition A.8 Ein topologischer Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

□

Bemerkungen:

1. Topologische Räume mit endlich vielen Punkten sind kompakt.
2. Ein Unterraum A eines topologischen Raumes X ist kompakt genau dann, wenn jede in X offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung hat. Dazu sei zunächst A kompakt und $\mathcal{U}$ eine in X offene Überdeckung von A . Dann ist $\mathcal{U}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von A . Da A kompakt ist, existieren endlich viele $U_1 \cap A, \dots, U_n \cap A \in \mathcal{U}_A$ mit $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ und

$$A = (U_1 \cap A) \cup \dots \cup (U_n \cap A),$$

also

$$A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n,$$

und $\{U_1, \dots, U_n\}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von A . Nun sei umgekehrt $\mathcal{U}_A$ eine offene Überdeckung von A . Dann ist $\mathcal{U} := \{U \subseteq X \mid U \text{ offen}, U \cap A \in \mathcal{U}_A\}$ eine in X offene Überdeckung von A und enthält also nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1, \dots, U_n\}$. Damit ist $\{U_1 \cap A, \dots, U_n \cap A\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}_A$, und A ist kompakt.

3. Abgeschlossene Teilmengen eines kompakten topologischen Raumes sind als Unterraum wieder kompakt. Dazu sei A abgeschlossen in dem kompakten Raum X , und nach obiger Bemerkung $\mathcal{U}$ eine in X offene Überdeckung von A . Da A abgeschlossen ist, ist $X - A$ offen, und $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{X - A\}$ ist eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, existieren endlich viele $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$X = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup (X - A),$$

also

$$A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n,$$

und A ist kompakt.

4. Kompakte Teilmengen C eines Hausdorff-Raumes X sind abgeschlossen, denn sei $x \in X - C$, so existieren zu jedem $y \in C$ offene disjunkte Umgebungen U_y von x , V_y von y mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Klarerweise gilt $C \subseteq \cup_{y \in C} V_y$, und es existiert eine endliche Überdeckung $C \subseteq \cup_{i=1}^N V_{y_i}$. Dann ist der endliche Schnitt $U := \cap_{i=1}^N U_{x_i}$ eine offene Umgebung von $x \in U$, die zu allen $V_{y_i}, i = 1, \dots, N$, disjunkt ist. Dies ergibt $U \cap C = \emptyset$, also $x \in U \subseteq X - C$, und $X - C$ ist offen bzw. C ist abgeschlossen.

5. Ein topologischer Raum ist kompakt genau dann, wenn jede Familie abgeschlossener Mengen $A_i, i \in I$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, d.h.

$$\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset \quad \text{für alle } J \subseteq I \text{ endlich,}$$

einen nichtleeren Schnitt

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

hat. Dies folgt durch Betrachten der Familie $\{X - A_i\}_{i \in I}$ offener Mengen.

6. X heißt folgenkompakt, wenn jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge hat. Demgegenüber heißt der Kompaktheitsbegriff in obiger Definition auch Überdeckungskompakt. Man kann zeigen, in metrischen Räumen ist Überdeckungskompakt und folgenkompakt äquivalent.

□

Proposition A.4 *Es sei $f : X \rightarrow Y$ stetig zwischen topologischen Räumen X, Y . Ist X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt.*

Beweis:

Es sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$, d.h.

$$f(X) \subseteq \bigcup \mathcal{V}.$$

Dann ist $\mathcal{U} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^N f^{-1}(V_i) \quad \text{mit } V_i \in \mathcal{V}.$$

Daraus folgt

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^N V_i,$$

und $\{V_1, \dots, V_N\} \subseteq \mathcal{V}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von $f(X)$, also ist $f(X)$ kompakt.

///

Bemerkungen:

1. Es seien $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X , $(X, \mathcal{T}_1)$ sei ein Hausdorff-Raum, und $(X, \mathcal{T}_2)$ sei kompakt. Dann stimmen die Topologien überein. Zum Beweis bemerken wir, daß klarerweise $id_X : (X, \mathcal{T}_2) \rightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ stetig ist. Ist A bezüglich $\mathcal{T}_2$ abgeschlossen, so ist A kompakt in $(X, \mathcal{T}_2)$, und mit der Stetigkeit von id_X ist A auch kompakt in $(X, \mathcal{T}_1)$. Als kompakte Teilmenge des Hausdorff-Raumes $(X, \mathcal{T}_1)$ ist A abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_1)$. Daher ist auch $id_X : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ stetig, und somit $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

2. Es sei X ein kompakter Raum und $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, seien stetig und punktetrennend, d.h.

$$\forall x \neq y \in X : \exists n \in \mathbb{N} : f_n(x) \neq f_n(y).$$

Wir zeigen X ist metrisierbar, genauer $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(1, |f_n(x) - f_n(y)|)$$

ist eine Metrik, die die Topologie auf X erzeugt.

d ist tatsächlich eine Metrik, da f_n punktetrennend sind. Weiter ist $x \mapsto d(x, y)$ für festes $y \in X$ stetig, also ist der Ball

$$B_{\varrho}^d(y) = \{x \in X \mid d(x, y) < \varrho\}$$

offen in X . Bezeichne $\mathcal{T}$ die gegebene kompakte Topologie auf X und $\mathcal{T}_d$ die durch die Metrik d induzierte Topologie auf X , so heißt das

$$\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}.$$

Da $\mathcal{T}_d$ als metrische Topologie einen Hausdorff-Raum erzeugt und $\mathcal{T}$ kompakt ist, sehen wir mit der vorigen Bemerkung daß $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$, d.h. $\mathcal{T}$ wird durch d induziert.

□

Nach dem folgenden Subbasensatz von Alexander genügt es für Kompaktheit die Überdeckungen aus einer gegebenen Subbasis zu überprüfen.

Satz A.1 (Subbasensatz von Alexander) *Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Subbasis, so daß jede Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann ist X kompakt.*

Beweis:

Angenommen X ist nicht kompakt, so ist die Familie Ξ der offenen Überdeckungen, die keine endliche Teilüberdeckung haben, nichtleer. Ξ wird durch Inklusion geordnet. Für eine nichtleere Kette $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \Xi$ ist die Vereinigung $\mathcal{U} = \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ wieder eine offene Überdeckung. Für eine endliche Teilmenge $\{U_1, \dots, U_N\} \subseteq \mathcal{U}$ existieren $i_j \in I$ mit $U_j \in \mathcal{U}_{i_j}, j = 1, \dots, N$. Da $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ eine Kette ist, können wir nach Umnummerierung $\mathcal{U}_{i_1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{U}_{i_N}$ annehmen, also $\{U_1, \dots, U_N\} \subseteq \mathcal{U}_{i_N}$, und $\{U_1, \dots, U_N\}$ ist keine Überdeckung. Daher hat $\mathcal{U}$ keine endliche Teilüberdeckung, und somit gilt $\mathcal{U} \in \Xi$.

Mit dem Lemma von Zorn besitzt Ξ ein maximales Element $\mathcal{U}$. Dies bedeutet $\mathcal{U}$ ist eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung hat, aber für jede offene Menge $W \notin \mathcal{U}$ hat $\mathcal{U} \cup \{W\}$ eine endliche Teilüberdeckung.

Nun setzen wir $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cap \mathcal{S}$. Klarerweise hat $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ keine endliche Teilüberdeckung, und, da $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$, kann $\mathcal{V}$ nach Voraussetzung keine Überdeckung sein. Wir wählen $x \in X - \cup \mathcal{V}$ und $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Dies existiert, da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung ist. Da $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie ist, existieren $S_1, \dots, S_N \in \mathcal{S}$ mit

$$x \in S_1 \cap \dots \cap S_N \subseteq U.$$

Da $x \notin \cup \mathcal{V}$, gilt $S_j \notin \mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{S}$, also, da $S_j \in \mathcal{S}$, folgt $S_j \notin \mathcal{U}$ für $j = 1, \dots, N$. Da $\mathcal{U}$ maximal ist, existiert zu jedem $j = 1, \dots, N$ eine endliche Teilfamilie $\mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}$ mit

$$X = S_j \bigcup \mathcal{U}_j \quad \text{für } j = 1, \dots, N.$$

Bilden wir $\cup_{j=1}^N \mathcal{U}_j = \{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$, so gilt

$$X = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup S_j \quad \text{für } j = 1, \dots, N,$$

also

$$X = \cap_{j=1}^N (U_1 \cup \dots \cup U_n \cup S_j) = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup (\cap_{j=1}^N S_j) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n \cup U$$

und daher ist $\{U_1, \dots, U_n, U\} \subseteq \mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von $\mathcal{U}$, und der Satz ist bewiesen.

///

Definition A.9 Es sei X eine Menge und $f_i : X \rightarrow Y_i, i \in I$, eine Familie von Abbildungen in topologischen Räume. Die von

$$\mathcal{S} := \{f_i^{-1}(V_i) \mid V_i \subseteq Y_i \text{ offen}, i \in I\}$$

erzeugte Topologie heißt die durch die Abbildungen f_i erzeugte Topologie auf X .

□

Bemerkungen:

1. Die durch f_i erzeugte Topologie ist die grösste Topologie bezüglich der alle f_i stetig sind.
2. Die Topologie eines Teilraumes $Y \subseteq X$ wird durch die Einschränkungen $f_i|_Y$ erzeugt.
3. Eine Abbildung $g : Z \rightarrow X$ von einem topologischen Raum Z ist stetig bezüglich der von f_i erzeugten Topologie genau dann, wenn alle $f_i \circ g$ stetig sind.
4. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert

$$x_n \rightarrow x$$

genau dann, wenn

$$f_i(x_n) \rightarrow f_i(x) \quad \text{für alle } i \in I.$$

Die Notwendigkeit ist klar mit der Stetigkeit von f_i . Nun gelte umgekehrt $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ für alle $i \in I$. Wir definieren $g : \mathbb{N}_\infty \rightarrow X, g(n) := x_n, g(\infty) = x$. Da

$$(f_i \circ g)(n) = f_i(x_n) \rightarrow f_i(x) = (f_i \circ g)(\infty) \quad \text{für alle } i \in I,$$

sind mit Bemerkung 5. nach Definition A.6 alle $f_i \circ g$ stetig. Nach voriger Bemerkung ist g stetig, und wieder mit Bemerkung 5. nach Definition A.6 gilt

$$x_n = g(n) \rightarrow g(\infty) = x.$$

5. Sind die f_i punktetrennend, d.h.

$$\forall x \neq y \in X : \exists i \in I : f_i(x) \neq f_i(y),$$

und sind alle Y_i Hausdorff-Räume, so ist X mit der durch die Abbildungen f_i erzeugte Topologie wieder ein Hausdorff-Raum. Dazu wählen wir für $x \neq y$ ein $i \in I$ wie oben und $U_x, V_y \subseteq Y_i$ offen mit

$$f_i(x) \in U_x, f_i(y) \in V_y, U_x \cap V_y = \emptyset.$$

Dann sind $f_i^{-1}(U_x), f_i^{-1}(V_y) \subseteq X$ offen und

$$x \in f_i^{-1}(U_x), y \in f_i^{-1}(V_y), f_i^{-1}(U_x) \cap f_i^{-1}(V_y) = \emptyset,$$

also ist X ein Hausdorff-Raum.

□

Definition A.10 Es sei $X_i, i \in I$, eine Familie von topologischen Räumen. Die Produkttopologie auf dem Produkt $X := \prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : x_i \in X_i\}$ ist definiert als die durch die Projektionen $\pi_i : X \rightarrow X_i, (x_j)_{j \in I} \mapsto x_i$ erzeugte Topologie.

□

Bemerkungen:

1. Eine Folge $(x_i^n)_{i \in I}$ in $\prod_{i \in I} X_i$ konvergiert

$$(x_i^n)_{i \in I} \rightarrow (x_i)_{i \in I}$$

mit Bemerkung 4. nach Definition A.9 genau dann, wenn

$$x_i^n \rightarrow x_i \quad \text{für alle } i \in I.$$

2. $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ sei das abzählbare Produkt von metrischen Räumen (X_i, d_i) . Wir definieren die Produktmetrik

$$d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}.$$

Tatsächlich ist d eine Metrik auf X , die die Produkttopologie induziert.

3. Die euklidische Topologie von $\mathbb{R}^n$ wird durch die Metrik

$$d((x_i)_{i=1, \dots, n}, (y_i)_{i=1, \dots, n}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

erzeugt. Andererseits erzeugt d auch die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, und somit trägt $\mathbb{R}^n$ die Produkttopologie.

□

Satz A.2 (Satz von Tychonoff) *Es sei $X_i, i \in I$, eine Familie von kompakten topologischen Räumen. Dann ist das Produkt $X := \prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie auch kompakt.*

Beweis:

Nach dem Subbasensatz von Alexander, Satz A.1, genügt es zu zeigen, daß jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ aus Elementen der Subbasis $\{\pi_i^{-1}(U) \mid i \in I, U \subseteq X_i \text{ offen}\}$ eine endliche Teilüberdeckung hat.

Für $i \in I$ setzen wir

$$\mathcal{U}_i := \{U \subseteq X_i \text{ offen} \mid \pi_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}\}.$$

Wir zeigen

$$\exists i \in I : \cup \mathcal{U}_i = X_i. \quad (\text{A.3})$$

Angenommen dies gelte nicht, dann existiert ein Punkt $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ mit $\pi_i(x) = x_i \in X_i - \cup \mathcal{U}_i$. Dann folgt $x \notin \pi_i^{-1}(U)$ für alle $U \in \mathcal{U}_i$, also $x \notin \cup \mathcal{U}$, und $\mathcal{U}$ wäre keine Überdeckung von X . Dies ist ein Widerspruch, und (A.3) folgt.

Nun sei $i \in I$ mit $\cup \mathcal{U}_i = X_i$. Da X_i kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1, \dots, U_N\} \subseteq \mathcal{U}_i$, d.h. $X_i = U_1 \cup \dots \cup U_N$. Dies ergibt $X = \pi_i^{-1}(U_1) \cup \dots \cup \pi_i^{-1}(U_N)$, und $\{\pi_i^{-1}(U_1), \dots, \pi_i^{-1}(U_N)\} \subseteq \mathcal{U}$ ist eine endliche Teilüberdeckung, und X ist kompakt.

///

Die folgende Definition der Quotiententopologie kann als dual zur Definition A.9 betrachtet werden.

Definition A.11 *Es sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $p : X \rightarrow Y$ surjektiv. Die Quotiententopologie auf Y bezüglich p ist gegeben durch*

$$\mathcal{T}_p := \{V \subseteq Y \mid p^{-1}(V) \text{ ist offen in } X\}.$$

Dann heißt $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_p)$ Quotientenabbildung.

□

Bemerkung:

Offene, stetige, surjektive bzw. abgeschlossene, stetige, surjektive Abbildungen sind Quotientenabbildungen.

□

Proposition A.5 *Es seien X, Y, Z topologische Räume und $p : X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung. Eine Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ ist stetig genau dann, wenn $g \circ p$ stetig ist.*

Beweis:

Da die Quotientenabbildung p stetig ist, folgt aus der Stetigkeit von g die Stetigkeit der Verkettung $g \circ p$.

Nun sei $g \circ p$ stetig und $U \subseteq Z$ offen. Dann ist $p^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ p)^{-1}(U)$ offen, und nach Definition der Quotientenabbildung ist $g^{-1}(U)$ offen, also g stetig.

///

Definition A.12 Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn für jede offene Zerlegung $X = U \cup V$ folgt, daß $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

□

Proposition A.6 Es sei $f : X \rightarrow Y$ stetig zwischen topologischen Räumen X, Y . Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis:

Es sei $U, V \subseteq Y$ offen mit $f(X) = (U \cap f(X)) \cup (V \cap f(X))$. Dann gilt $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Da f stetig ist, sind $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ offen, und, da X zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$, also $U \cap f(X) = \emptyset$ oder $V \cap f(X) = \emptyset$, und $f(X)$ ist zusammenhängend.

///

Literatur

- [A] Alt, H.W., (1999) Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [HeSt] Hewitt, E., Stromberg, K.R., (1975) Real and Abstract Analysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [Ru] Rudin, W.T., (1973) Functional Analysis, McGraw-Hill, New York.