

Nichtlineare Funktionalanalysis

Reiner Schätzle
Sommersemester 2026
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

I	Analysis in Banachräumen	1
1	Banachräume	1
2	Stetigkeit und Differentiation	4
3	Integration	20
4	Nichtlineare Abbildungen	29
5	Fredholm-Abbildungen	39
II	Lösen Nichtlinearer Gleichungen	53
6	Kontinuitätsmethode	53
7	Der Brouwersche Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$	56
8	Fixpunktsätze	72
9	Variationsungleichungen	79
III	Appendix	93
A	Der Satz von Sard	93
B	Topologische Anwendungen des Abbildungsgrades	96

Teil I

Analysis in Banachräumen

1 Banachräume

Folgende Definition ist aus der linearen Funktionalanalysis bekannt.

Definition 1.1 X sei ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung

$$\| \cdot \|: X \rightarrow [0, \infty[$$

heißt Norm auf X , falls

$$(i) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \text{für } x \in X, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{für } x, y \in X.$$

Wir nennen $(X, \|\cdot\|)$ oder kurz X einen normierten Vektorraum.

Eine Norm erzeugt eine Metrik durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Ist X mit dieser Metrik vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent, so heißt

$(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Ein inneres Produkt auf X

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

d.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf X , erzeugt durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf X .

Ist die von $\|\cdot\|$ erzeugte Metrik vollständig, so heißt $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum.

□

Der Raum aller stetigen, linearen Abbildungen $L(X, Y)$ zwischen zwei Banachräumen X, Y ist mit der Norm

$$\|\Lambda\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|\Lambda x\|$$

wieder ein Banachraum. Der Dualraum $X^* := L(X, \mathbb{R})$ ist der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X .

Beispiele:

(i) L^p -Räume

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, d.h. $\mathcal{A}$ ist eine σ -Algebra auf Ω und μ ein σ -additives Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist für $1 \leq p \leq \infty$ der Raum $L^p(\mu) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Banachraum.

Für $p = 2$ ist dies ein Hilbertraum.

(ii) Hölder-Räume

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Menge der k -fach stetig differenzierbaren Funktionen mit beschränkten Ableitungen

$$C_b^k(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\gamma u \text{ existiert und ist stetig und beschränkt für } |\gamma| \leq k\}$$

ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\|_{C_b^k(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Für $0 < \alpha \leq 1$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$höl_{\Omega, \alpha} u := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Der Raum

$$C^{k, \alpha}(\Omega) := \{u \in C_b^k(\Omega) \mid höl_{\Omega, \alpha}(D^\gamma u) < \infty \text{ für } |\gamma| \leq k\}$$

ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k, \alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} (\|D^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} + höl_{\Omega, \alpha} D^\gamma u).$$

Wir schreiben

$$C_{loc}^k(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\gamma u \text{ existiert und ist stetig für } |\gamma| \leq k\}$$

$$C_{loc}^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=1}^\infty C_{loc}^k(\Omega), \text{ und für } \Omega \subseteq A \subseteq \overline{\Omega}$$

$$C_{loc}^{k, \alpha}(A) := \{u \in C_{loc}^k(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \delta > 0 : u \in C^{k, \alpha}(\Omega \cap B_\delta(x))\}.$$

Wir nennen $C^{k, \alpha}(\Omega)$ die Hölder-Räume.

(iii) Sobolev-Räume

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Wir betrachten den Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k, p}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dies ist ein normierter Raum, aber kein Banachraum. Durch Vervollständigung erhalten wir einen Banachraum

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \exists u_i \in C_0^\infty(\Omega) : \lim_{i,j \rightarrow \infty} \|u_i - u_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0, \\ u_i \rightarrow u \text{ in } L^p(\Omega)\}.$$

Für $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ sind schwache Ableitungen $D^\gamma u \in L^p(\Omega)$ bis zur Ordnung $|\gamma| \leq k$ definiert. Dazu sei $u_i \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_i \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ und $\|u_i - u_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0$. Dann konvergiert

$$D^\gamma u_i \rightarrow u^\gamma \quad \text{in } L^p(\Omega) \text{ für } |\gamma| \leq k,$$

und es gilt für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int u^\gamma \varphi \leftarrow \int (D^\gamma u_i) \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int u_i D^\gamma \varphi \rightarrow (-1)^{|\gamma|} \int u D^\gamma \varphi. \quad (1.1)$$

Damit ist u^γ eindeutig durch u bestimmt, und wir schreiben

$$D^\gamma u = u^\gamma.$$

Für $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ verwenden wir (1.1) als Definition des folgenden Banachraumes

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \text{Für } |\gamma| \leq k \text{ existiert } u^\gamma \in L^p(\Omega) \text{ mit} \\ \int u^\gamma \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int u D^\gamma \varphi \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \|u^\gamma\|_{L^p(\Omega)}.$$

Tatsächlich sind für $u \in L^p(\Omega)$ die u^γ eindeutig bestimmt und heißen schwache Ableitungen von u . Wir schreiben

$$D^\gamma u = u^\gamma.$$

$W_0^{k,p}(\Omega)$ ist ein Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$.

Für $p = 2$ sind $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\Omega)$ Hilberträume.

Wir nennen $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev-Räume.

□

2 Stetigkeit und Differentiation

Da auf einem Banachraum eine Metrik gegeben ist, ergibt sich die Definition von Stetigkeit sofort.

Definition 2.1 X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq M \subseteq X$ und $f : M \rightarrow Y$. f heißt stetig, falls

$$x_i \rightarrow x_0 \in M, x_i \in M \implies f(x_i) \rightarrow f(x_0).$$

f heißt gleichmäßig stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$

$$\|x - y\| < \delta, x, y \in M \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

f heißt lokal beschränkt, falls $\forall x \in M : \exists \varepsilon > 0 :$

$$f(B_\varepsilon(x)) \text{ ist beschränkt in } Y.$$

f heißt beschränkt, falls f beschränkte Mengen von M in beschränkte Mengen von Y abbildet.

□

Stetigkeit impliziert lokale Beschränktheit, aber im allgemeinen nicht Beschränktheit.

Beispiel:

Es sei $X = l^2(\mathbb{N}) := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ und $e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} \in X$.

Wir setzen

$$\varphi_i(x) := \max\left(\frac{1}{4} - \|x - e_i\|, 0\right)$$

und

$$\varphi := \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \varphi_i.$$

Da $[\varphi_i \neq 0] = B_{1/4}(e_i)$, ist diese Summe lokal endlich, und φ ist stetig.

Es gilt aber $e_i \in \overline{B_1(0)}$ und

$$\varphi(e_i) = \frac{i}{4} \rightarrow \infty,$$

also ist $\varphi(\overline{B_1(0)}) \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt.

□

Andererseits gilt folgende Aussage.

Proposition:

X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq M \subseteq X$ beschränkt und konvex, und $f : M \rightarrow Y$ sei gleichmäßig stetig.

Dann ist

$$f(M) \text{ beschränkt.}$$

Beweis:

Es sei $x_0 \in M$ und $d = \text{diam}(M)$. Es existiert $\delta > 0$, so daß

$$\|x - y\| < \delta, \quad x, y \in M \implies \|f(x) - f(y)\| < 1.$$

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{d}{N} < \delta.$$

Für $x \in M$ setzen wir

$$x_i := x_0 + \frac{i}{N}(x - x_0) \quad i = 0, \dots, N.$$

Dann gilt $\|x_i - x_{i-1}\| < \delta$ also

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \sum_{i=1}^N \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| \leq \|f(x_0)\| + N,$$

und $f(M)$ ist beschränkt.

//

Die Stetigkeit in Definition 2.1 bezieht sich auf die Normtopologien von X und Y . Mit der schwachen Konvergenz ergibt sich folgendes Kriterium für Beschränktheit.

Proposition:

X, Y seien Banachräume, X sei reflexiv, $\emptyset \neq M \subseteq X$ sei beschränkt und schwach folgenabgeschlossen, und $f : M \rightarrow Y$ sei schwach folgenstetig, d.h.

$$x_i \rightarrow x_0 \text{ schwach in } X, \quad x_i, x_0 \in M \implies f(x_i) \rightarrow f(x_0) \text{ schwach in } Y.$$

Dann ist

$$f(M) \text{ beschränkt.}$$

Beweis:

Falls nicht, so existiert $x_i \in M$ mit

$$\|f(x_i)\| \rightarrow \infty.$$

Da M beschränkt ist und X reflexiv ist, können wir für eine Teilfolge

$$x_i \rightarrow x_0 \text{ schwach konvergent in } X$$

annehmen, siehe [A] Satz 6.9. Da M schwach folgenabgeschlossen ist, folgt $x_0 \in M$ und

$$f(x_i) \rightarrow f(x_0) \text{ schwach konvergent in } Y.$$

Dies widerspricht $\|f(x_i)\| \rightarrow \infty$.

//

Beispiel 2.1

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion

$$A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt Caratheodoryfunktion, falls

$$(x \mapsto A(x, z, w)) \text{ lebesguemeßbar für festes } (z, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ ist}$$

und

$$((z, w) \mapsto A(x, z, w)) \text{ stetig für festes } x \in \Omega \text{ ist.}$$

Insbesondere folgt, daß A lebesguemeßbar ist.

Für gegebene $1 \leq p, q < \infty$ gelte die Wachstumsbedingung

$$|A(x, z, w)| \leq C(\varphi(x) + |z|^{p/q} + |w|^{p/q}). \quad (2.1)$$

mit $\varphi \in L^q(\Omega)$.

Dann ist die Abbildung $f : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ mit

$$f(u)(x) := A(x, u(x), \nabla u(x))$$

stetig.

Beweis:

Es sei $u_j \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für eine Teilfolge gilt $u_j \rightarrow u$, $\nabla u_j \rightarrow \nabla u$ $\mathcal{L}^n$ -fast überall auf Ω , und somit

$$A(., u_j, \nabla u_j) \rightarrow A(., u, \nabla u) \quad \mathcal{L}^n - \text{fast überall auf } \Omega.$$

Da $u_j \rightarrow u$, $\nabla u_j \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\Omega)$ folgt mit dem Konvergenzsatz von Vitali, daß

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \subseteq \Omega : \mathcal{L}^n(E) < \delta \implies \int_E (\varphi^q + |u_j|^p + |\nabla u_j|^p) \leq \varepsilon.$$

Aus der Wachstumsbedingung (2.1) an A folgt

$$\int_E |A(., u_j, \nabla u_j)|^q \leq C\varepsilon,$$

und wieder mit dem Konvergenzsatz von Vitali

$$A(., u_j, \nabla u_j) \rightarrow A(., u, \nabla u) \quad \text{in } L^q(\Omega).$$

Also ist f stetig.

///

Beispiel 2.2 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform I)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A_i, B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ seien Caratheodory-funktionen, die die Wachstumsbedingung (2.1) für $1 < p, q < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ und

$$(A(x, z, w_2) - A(x, z, w_1))(w_2 - w_1) \geq c_0 |w_2 - w_1|^p \quad (2.2)$$

für $(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ und ein $c_0 > 0$ erfüllen.

Wir betrachten das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\partial_i(A_i(\cdot, u, \nabla u)) + B(\cdot, u, \nabla u) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ heißt schwache Lösung von (2.3), falls

$$\int_{\Omega} A_i(\cdot, u, \nabla u) \partial_i v + B(\cdot, u, \nabla u) v = 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

wobei über $i = 1, \dots, n$ summiert wird.

Wir definieren $f : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)^*$ durch

$$f(u).v := \int_{\Omega} A_i(\cdot, u, \nabla u) \partial_i v + B(\cdot, u, \nabla u) v.$$

Nach Beispiel 2.1 ist f stetig, und Lösungen von (2.3) entsprechen den Nullstellen von f .

□

Beispiel 2.3 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform I)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex und $a_{ij}, b \in C_{loc}^{0,\beta}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $i, j = 1, \dots, n$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$, und

$$a_{ij}(x, z, w) \xi_i \xi_j > 0$$

für $(x, z, w) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Wir betrachten das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -a_{ij}(\cdot, u, \nabla u) \partial_{ij} u + b(\cdot, u, \nabla u) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wir definieren die Abbildung $f : C^{2,\alpha}(\Omega) \rightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ durch

$$f(u)(x) := -a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \partial_{ij} u(x) + b(x, u(x), \nabla u(x)).$$

Dann ist f stetig, und Lösungen von (2.4) entsprechen den Nullstellen von f in

$$C^{2,\alpha,0}(\Omega) := \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

□

Beispiel 2.4 (Lineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform I)

Es sei $B \in L_2(X, \mathbb{R}) \cong L(X, X^*)$ eine beschränkte Bilinearform. Ist X ein Hilbertraum, so haben wir die natürliche Isomorphie $X \xrightarrow{\approx} X^*$ durch

$$(x \mapsto \langle x, \cdot \rangle),$$

und wir ordnen B eine stetige, lineare Abbildung $B_0 \in L(X, X)$ durch

$$\langle B_0 x, y \rangle = B(x, y) \quad \text{für } x, y \in X$$

zu. Wir nehmen an, es gilt

$$B(x, x) \geq c_0 \|x\|^2 \quad \text{für } x \in X \quad (2.5)$$

für ein $c_0 > 0$.

Behauptung: (Satz von Lax-Milgram)

Dann ist $B : X \rightarrow X^*$ ein Isomorphismus.

Beweis:

Wir zeigen, daß $B_0 : X \rightarrow X$ ein Isomorphismus ist. Für $x \in X$ gilt

$$c_0 \|x\|^2 \leq B(x, x) = \langle B_0 x, x \rangle \leq \|B_0 x\| \|x\|,$$

also

$$c_0 \|x\| \leq \|B_0 x\|. \quad (2.6)$$

Daraus folgt, daß B_0 injektiv ist und $\text{im}(B_0)$ abgeschlossen ist.

Nun sei $z \in \text{im}(B_0)^\perp$. Dann gilt

$$0 = \langle B_0 z, z \rangle = B(z, z) \geq c_0 \|z\|^2,$$

also $z = 0$, und $\text{im}(B_0) = X$. Damit ist B_0 bijektiv, und mit (2.6) ist die Inverse stetig.

///

Wir betrachten die lineare elliptische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_j \partial_j u + du &= \varphi + \text{div } \psi \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\begin{aligned} a_{ij}, b_i, c_j, d &\in L^\infty(\Omega), \varphi \in L^2(\Omega), \psi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \\ a_{ij}(x)\xi_i\xi_j &\geq c_0|\xi|^2 \quad \text{für } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

wobei $c_0 > 0$. Wir definieren die Bilinearform $B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$B(u, v) := \int_{\Omega} (a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v + c_j \partial_j u v + duv).$$

Nach Voraussetzung an a_{ij}, b_i, c_j und d ist $B \in L_2(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ stetig. In Erweiterung von Beispiel 2.2 ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (2.7) genau dann, wenn

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\varphi v - \psi \nabla v) \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (2.8)$$

oder äquivalent

$$B(u, \cdot) = \Lambda_{\varphi, \psi} \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$$

mit

$$\Lambda_{\varphi, \psi} v := \int_{\Omega} (\varphi v - \psi \nabla v)$$

und

$$B \in L(W_0^{1,2}(\Omega), W_0^{1,2}(\Omega)^*).$$

Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir die sogenannte Garding-Ungleichung

$$B(u, u) = \int_{\Omega} (a_{ij} \partial_j u \partial_i u + b_i u \partial_i u + c_j (\partial_j u) u + du^2) \geq \tilde{c}_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.9)$$

wobei $\tilde{c}_0 > 0, C < \infty$. Vereinfachend nehmen wir hier

$$b_i, c_j = 0, \quad d \geq 0 \quad (2.10)$$

an. Damit erhalten wir mit der Poincaré-Ungleichung, siehe Übungsaufgaben,

$$B(u, u) = \int_{\Omega} (a_{ij} \partial_j u \partial_i u + du^2) \geq c_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \tilde{c}_0 \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2,$$

wobei $\tilde{c}_0 > 0$. Nach dem Satz von Lax-Milgram ist B ein Isomorphismus, und so existiert genau ein u , das (2.8) erfüllt, also genau eine Lösung von (2.7).

Für $\psi = 0$ definieren wir den Lösungsoperator

$$T : L^2(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^* \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega), \\ \varphi \mapsto \Lambda_{\varphi, 0} \mapsto B^{-1} \Lambda_{\varphi, 0} = u,$$

und sehen, daß $T \in L(L^2(\Omega), W_0^{1,2}(\Omega))$ stetig und linear ist.

□

Wir kommen zur Differentiation.

Definition 2.2 X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und $f : U \rightarrow Y$. Die Richtungsableitung von f bezüglich $e \in X$ in $x \in U$ ist definiert durch

$$\partial_e f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + te) - f(x)}{t},$$

falls der Limes existiert.

f heißt Gâteaux-differenzierbar in $x \in U$, falls $\partial_e f(x)$ für alle $e \in X$ existiert und für einen stetigen linearen Operator $T : X \rightarrow Y$

$$Te = \partial_e f(x)$$

erfüllt. Wir schreiben

$$\partial f(x) = T.$$

f heißt Fréchet-differenzierbar, kurz differenzierbar, in $x \in U$, falls ein stetiger linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ mit

$$\|f(x+y) - f(x) - Ty\| = o(\|y\|)$$

existiert. Wir schreiben

$$Df(x) = f'(x) = T.$$

□

Wir bemerken, dass Fréchet-Differenzierbarkeit die Gâteaux-Differenzierbarkeit impliziert.

Beispiel:

X sei ein Banachraum und $f(x) := \|x\|$.

(i) Die Richtungsableitung $\partial_e f(x)$ existiert für alle $x, e \in X$.

(ii) Ist X^* strikt konvex, d.h. für

$$\Lambda_1 \neq \Lambda_2 \in X^*, \|\Lambda_1\| = \|\Lambda_2\| = 1, 0 < t < 1 \implies \|(1-t)\Lambda_1 + t\Lambda_2\| < 1,$$

so ist f in jedem Punkt $x \neq 0$ Gâteaux-differenzierbar.

(iii) Für $X = L^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lebesguemeßbar, $\mathcal{L}^n(A) > 0$ ist f in keinem $u \in L^1(A)$ Fréchet-differenzierbar.

(iv) Für $X = L^p(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lebesguemeßbar $1 < p < \infty$, ist f in jedem $u \in L^p(A) - \{0\}$ Fréchet-differenzierbar.

Beweis:

(i) Die Funktion $(t \mapsto \|x + te\|)$ ist konvex, also existieren die einseitigen Ableitungen

$$\partial_e f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x + te\| - \|x\|}{t},$$

und es gilt

$$|\partial_e f(x)| \leq \|e\|.$$

//

(ii) Es sei $x_0 \neq 0$. Mit dem Satz von Hahn-Banach gibt es $\Lambda_0 \in X^*$ mit $\|\Lambda_0\| = 1$ und

$$\Lambda_0 x_0 = \|x_0\|.$$

Da X^* strikt konvex ist, ist Λ_0 eindeutig.

Wir zeigen

$$\partial_e f(x_0) = \Lambda_0 e,$$

also ist f Gâteaux-differenzierbar in x_0 .

Wir setzen

$$p(e) := \partial_e f(x_0).$$

Es gilt

$$p(te) = tp(e) \quad \text{für } t \geq 0,$$

und

$$p(e_1 + e_2) \leq p(e_1) + p(e_2).$$

Nun definieren wir für gegebenes $e \in X, e \neq 0$, das lineare Funktional $\Lambda : \text{span}\{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Lambda te := tp(e).$$

Es gilt

$$\Lambda \leq p \quad \text{auf } \text{span}\{e\},$$

denn für $t \geq 0$ gilt

$$\Lambda te := tp(e) = p(te)$$

und

$$\Lambda(-te) := -tp(e) \leq tp(-e) = p(-te),$$

da $0 = p(0) \leq p(e) + p(-e)$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir Λ linear auf X fortsetzen mit

$$\Lambda \leq p \quad \text{auf } X.$$

Es gilt

$$\pm \Lambda x = \Lambda(\pm x) \leq p(\pm x) = \partial_{\pm x} f(x_0) \leq \|\pm x\|,$$

also ist Λ stetig mit

$$\|\Lambda\| \leq 1.$$

Andererseits

$$\Lambda(-x_0) \leq p(-x_0) = \partial_{-x_0} f(x_0) = -\|x_0\|,$$

somit

$$\Lambda x_0 \geq \|x_0\|,$$

und es folgt

$$\Lambda = \Lambda_0$$

aus der Eindeutigkeit von Λ_0 . Daraus folgt

$$\partial_e f(x_0) = p(e) = \Lambda e = \Lambda_0 e.$$

//

(iii), (iv) siehe Übungsaufgaben.

//

Einfache Rechenregeln ergeben sich aus folgenden Propositionen.

Proposition 2.1 X, Y, Z seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$, $\emptyset \neq V \subseteq Y$ offen, und

$$f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow Z$$

seien differenzierbar in $x \in U$ und $y = f(x) \in V$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x , und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

Beweis:

Es gilt

$$f(x+h) = f(x) + Df(x).h + o(\|h\|)$$

und

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) &= g(f(x) + Df(x).h + o(\|h\|)) = \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x)).(Df(x).h + o(\|h\|)) + o(Df(x).h + o(\|h\|)) = \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x)) \circ Df(x).h + o(\|h\|), \end{aligned}$$

da

$$\|Df(x).h\| \leq \|Df(x)\| \|h\|.$$

Also ist $g \circ f$ in x differenzierbar, und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

///

Proposition 2.2 Es seien X, Y, Z, W Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen

$$f : U \rightarrow Y, g : U \rightarrow Z$$

seien differenzierbar in $x \in U$, und

$$B : Y \times Z \rightarrow W$$

sei eine stetige, bilineare Abbildung.

Dann ist

$$B(f, g) : U \rightarrow W$$

differenzierbar in $x \in U$, und es gilt

$$D(B(f, g))(x).h = B(Df(x).h, g(x)) + B(f(x), Dg(x).h).$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x).h + o(\|h\|), \\ g(x+h) &= g(x) + Dg(x).h + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} B(f, g)(x+h) &= B(f(x) + Df(x).h + o(\|h\|), g(x) + Dg(x).h + o(\|h\|)) = \\ &= B(f, g)(x) + B(Df(x).h, g(x)) + B(f(x), Dg(x).h) + R_h, \end{aligned}$$

wobei

$$R_h := B(o(\|h\|), g(x)) + B(f(x), o(\|h\|)) + B(Df(x).h + o(\|h\|), Dg(x).h + o(\|h\|)).$$

Da B stetig ist, gilt

$$\|B(y, z)\| \leq \|B\| \|y\| \|z\| \quad \text{für } y \in Y, z \in Z,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|R_h\| &\leq \|B\| \left((\|f(x)\| + \|g(x)\|) o(\|h\|) \right. \\ &\quad \left. + (\|Df(x)\| + o(1)) (\|Dg(x)\| + o(1)) \|h\|^2 \right) = o(\|h\|). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

///

Für Abschätzungen ist folgende Proposition nützlich.

Proposition 2.3 X sei ein Banachraum, $a < b \in \mathbb{R}$ und

$$f : [a, b] \rightarrow X$$

sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$. Weiter sei $\xi \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ mit

$$\|f'(t)\| \leq \xi'(t) \quad \text{für } t \in]a, b[.$$

Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \xi(b) - \xi(a), \tag{2.11}$$

insbesondere

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{t \in]a, b[} \|f'(t)\| |b - a|. \tag{2.12}$$

Beweis:

(2.12) folgt aus (2.11) für

$$\xi(t) := t \sup_{s \in]a, b[} \|f'(s)\|.$$

Um (2.11) zu beweisen, bemerken wir, daß für $\Lambda \in X^*$ die Abbildung

$$\gamma(t) := \Lambda f(t)$$

stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf $]a, b[$ und

$$|\gamma'(t)| = |\Lambda \cdot f'(t)| \leq \|\Lambda\| \cdot \xi'(t).$$

Insbesondere ist $(\gamma - \|\Lambda\| \xi)' \leq 0$ auf $[a, b]$, also ist $\gamma - \|\Lambda\| \xi$ monoton nicht wachsend mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, und wir erhalten

$$\Lambda(f(b) - f(a)) = \gamma(b) - \gamma(a) \leq \|\Lambda\| (\xi(b) - \xi(a)).$$

Mit dem Satz von Hahn-Banach wählen wir $\Lambda \in X^*$ mit $\|\Lambda\| = 1$ und

$$\Lambda(f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|.$$

Dies ergibt (2.11). ///

Ist $f : U \rightarrow Y$ in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar, so ist die Ableitung eine Abbildung

$$Df : U \rightarrow L(X, Y),$$

und wir können Df auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersuchen.

Definition 2.3 X, Y seien Banachräume und $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Wir definieren die Menge der stetigen Abbildungen

$$C^0(U, Y) := \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ ist stetig in jedem Punkt } x \in U\}.$$

und die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen

$$C^1(U, Y) := \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ ist stetig und differenzierbar in jedem Punkt } x \in U \\ \text{und } Df \in C^0(U, L(X, Y))\}.$$

Höher differenzierbare Funktionen definieren wir induktiv für $k \geq 2$ als

$$C^k(U, Y) := \{f \in C^1(U, Y) \mid Df \in C^{k-1}(U, L(X, Y))\}.$$

Mit der natürlichen Isomorphie

$$L(X, L(X, Y)) \cong L_2(X, Y) := \{B : X \times X \rightarrow Y \mid B \text{ stetig und bilinear.}\}$$

identifizieren wir

$$D(Df)(x) \in L(X, L(X, Y)) \quad \text{mit} \quad (D^2f)(x) \in L_2(X, Y)$$

durch

$$(D^2f)(x)(h_1, h_2) := ((D(Df)(x)).h_1).h_2$$

und betrachten allgemein

$$D^k f(x) \in L_k(X, Y) := \{B : X \times \dots \times X \rightarrow Y \mid B \text{ stetig und } k\text{-linear.}\}.$$

□

Wir beginnen mit folgender Verallgemeinerung des Satzes von Schwarz.

Proposition 2.4 Für $f \in C^k(U, Y)$, $x \in U \subseteq X$, ist $D^k f(x)$ eine symmetrische k -lineare Abbildung.

Beweis:

Es genügt $k = 2$ zu betrachten. Für $h_1, h_2 \in X, \Lambda \in Y^*$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\gamma(t_1, t_2) := \Lambda f(x + t_1 h_1 + t_2 h_2)$$

für $|t_i| < \varepsilon$. Da $f \in C^2(U, Y)$, ist γ zweifach stetig differenzierbar, und es gilt

$$\Lambda D^2 f(x)(h_1, h_2) = \partial_2 \partial_1 \gamma(0, 0) = \partial_1 \partial_2 \gamma(0, 0) = \Lambda D^2 f(x)(h_2, h_1),$$

also mit dem Satz von Hahn-Banach

$$D^2 f(x)(h_1, h_2) = D^2 f(x)(h_2, h_1),$$

da $\Lambda \in Y^*$ beliebig war.

///

Der Satz von Taylor gilt wie in der endlich-dimensionalen Analysis.

Proposition 2.5 (Satz von Taylor)

Es sei $f \in C^{k+1}(U, Y)$, $x + th \in U \subseteq X$ für $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{j=1}^k \frac{D^j f(x)(h, \dots, h)}{j!} + R_{k+1}(x, h),$$

wobei das Restglied für jedes $\Lambda \in Y^*$ die Identität

$$\Lambda R_{k+1}(x, h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \Lambda D^{k+1} f(x + th)(h, \dots, h) dt \quad (2.13)$$

erfüllt.

Beweis:

Für $\Lambda \in Y^*$ wenden wir den eindimensionalen Satz von Taylor auf die Funktion

$$\gamma(t) := \Lambda f(x + th)$$

an und erhalten

$$\gamma(1) = \sum_{j=0}^k \frac{\gamma^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \gamma^{(k+1)}(t) dt.$$

Da

$$\gamma^{(j)}(t) = \Lambda D^j f(x + th)(h, \dots, h),$$

folgt (2.13).

///

Im nächsten Paragraphen werden wir das Integral für Banachraumwertige Funktionen definieren und erhalten dann

$$R_{k+1}(x, h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1}f(x+th)(h, \dots, h) dt. \quad (2.14)$$

Im verbleibenden Teil dieses Paragraphen wollen wir den inversen und impliziten Funktionensatz auf Banachräume verallgemeinern.

Satz 2.1 (Inverser Funktionensatz)

X sei ein Banachraum, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen, $f \in C^1(U, X)$ und für $x_0 \in U$ sei

$$Df(x_0) \in L(X, X) \text{ invertierbar.}$$

Dann existieren offene Umgebungen $U(x_0) \subseteq U$ von x_0 und $V(y_0)$ von $y_0 = f(x_0)$, so daß

$$f : U(x_0) \xrightarrow{\approx} V(y_0)$$

bijektiv ist, und weiter existiert $g \in C^1(V(y_0), U(x_0))$ mit

$$g \circ f = id_{U(x_0)} \quad , \quad f \circ g = id_{V(y_0)}.$$

Schließlich gilt

$$Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}. \quad (2.15)$$

Beweis:

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $x_0 = 0$,

$$f(0) = 0,$$

$$Df(0) = id_X,$$

und

$$\| Df(x) - id_X \| \leq 1/2 \quad \text{für } x \in \overline{B_\delta(0)} \subseteq U. \quad (2.16)$$

Für $x \in \overline{B_\delta(0)}$ und $y \in X$ gilt

$$f(x) = y \quad (2.17)$$

genau dann, wenn

$$x = x - f(x) + y.$$

Wir definieren $F : \overline{B_\delta(0)} \rightarrow X$ durch

$$F(x) = x - f(x) + y$$

und erhalten

$$\| DF(x) \| = \| id - Df(x) \| \leq 1/2 \quad \text{für } x \in \overline{B_\delta(0)}.$$

Dann folgt aus Proposition 2.3, daß

$$\| F(x_1) - F(x_2) \| \leq 1/2 \| x_1 - x_2 \|$$

und

$$\| F(x) \| \leq \| F(0) \| + 1/2 \| x \| \leq \| y \| + \delta/2.$$

Für $y \in B_{\delta/2}(0)$ folgt

$$F : \overline{B_{\delta}(0)} \rightarrow B_{\delta}(0),$$

und F hat mit dem Fixpunktsatz von Banach genau einen Fixpunkt in $B_{\delta}(0)$, d.h. es existiert genau eine Lösung $x \in B_{\delta}(0)$ von (2.17). Wir setzen

$$U(0) := B_{\delta}(0) \cap f^{-1}(B_{\delta/2}(0)) \quad , \quad V(0) := B_{\delta/2}(0),$$

und sehen, daß

$$f : U(0) \xrightarrow{\sim} V(0)$$

bijektiv ist. Die Inverse sei

$$g := f^{-1} : V(0) \rightarrow U(0).$$

Wir zeigen, daß g in 0 differenzierbar ist und (2.15) erfüllt, d.h.

$$Dg(0) = id_X. \tag{2.18}$$

Zuerst bemerken wir mit Proposition 2.3 und (2.16), daß

$$\| f(x) \| \leq 3/2 \| x \| \quad \text{für } x \in B_{\delta}(0).$$

Umgekehrt gilt für $f(x) = y \in B_{\delta/2}(0)$, daß $F(x) = x$ und somit

$$\| x \| = \| F(x) \| \leq \| y \| + 1/2 \| x \|,$$

also

$$\| x \| \leq 2 \| f(x) \|.$$

Da $Df(0) = id_X$, erhalten wir

$$y = f(x) = x + o(\| x \|) = g(y) + o(\| y \|),$$

also (2.18) und schließlich (2.15).

Durch verkleinern von $U(x_0)$ und $V(y_0)$ können wir annehmen, daß

$$Df(x) \quad \text{für alle } x \in U(x_0) \text{ invertierbar ist.}$$

Dann erhalten wir mit (2.15), daß

$$Dg(y) = Df(g(y))^{-1} \quad \text{für alle } y \in V(y_0)$$

und $g \in C^1(V(y_0), U(x_0))$.

///

Der Satz über implizite Funktionen folgt als Korollar.

Korollar 2.2 (Satz über implizite Funktionen)

X, Y, Z , seien Banachräume, $\emptyset \neq W \subseteq X \times Y$ offen, $f \in C^1(W, Z)$ und für $(x_0, y_0) \in W$ gelte

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

$$D_y f(x_0, y_0) \in L(Y, Z) \quad \text{ist ein Isomorphismus.}$$

Dann existieren offene Umgebungen $U(x_0)$ von x_0 und $V(y_0)$ von y_0 mit $U(x_0) \times V(y_0) \subseteq W$ und für jedes $x \in U(x_0)$ existiert genau ein $y \in V(y_0)$ mit

$$f(x, y) = 0.$$

Betrachten wir die Abbildung $g : U(x_0) \rightarrow V(y_0)$, $x \mapsto y$, also

$$f(x, g(x)) = 0,$$

so ist $g \in C^1(U(x_0), V(y_0))$, und es gilt

$$Dg(x_0) = -D_y f(x_0, y_0)^{-1} D_x f(x_0, y_0). \quad (2.19)$$

Beweis:

Wir betrachten die Abbildung $F : W \rightarrow X \times Z$ mit

$$F(x, y) := (x, f(x, y)).$$

Es gilt

$$DF(x_0, y_0).(v, w) = (v, D_x f(x_0, y_0).v + D_y f(x_0, y_0).w),$$

und, da $D_y f(x_0, y_0) \in L(Y, Z)$ ein Isomorphismus ist, ist auch

$$DF(x_0, y_0) \in L(X \times Y, X \times Z)$$

ein Isomorphismus.

Nach dem Satz über inverse Funktionen, Satz 2.1, existieren offene Umgebungen $W(x_0, y_0) \subseteq W$ von (x_0, y_0) und $\tilde{U}(x_0) \times Z(0)$ von $(x_0, 0) = F(x_0, y_0)$ in $X \times Z$, so daß

$$F : W(x_0, y_0) \xrightarrow{\sim} \tilde{U}(x_0) \times Z(0)$$

bijektiv ist, und die Inverse $G := F^{-1} \in C^1(\tilde{U}(x_0) \times Z(0), W(x_0, y_0))$.

Wir definieren $g \in C^1(\tilde{U}(x_0), Y)$ durch

$$g(x) := P_Y.G(x, 0),$$

wobei $P_Y : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist.

Nun wählen wir eine offene Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und $V(y_0)$ von y_0 mit

$$U(x_0) \times V(y_0) \subseteq W(x_0, y_0) \subseteq W,$$

$$U(x_0) \subseteq \tilde{U}(x_0),$$

$$g(U(x_0)) \subseteq V(y_0).$$

Dies ist möglich durch Verkleinern von $U(x_0)$, da $g(x_0) = y_0$, da $G(x_0, 0) = (x_0, y_0)$.

Damit gilt für $x \in U(x_0)$, daß

$$f(x, g(x)) = 0 \quad , \quad g(x) \in V(y_0). \quad (2.20)$$

Andererseits gilt für $(x, y) \in U(x_0) \times V(y_0)$ mit $f(x, y) = 0$, daß $(x, y) \in W(x_0, y_0)$ und

$$F(x, y) = (x, 0),$$

also $G(x, 0) = (x, y)$ und

$$y = g(x).$$

Schließlich folgt (2.19) aus (2.20), da wir $g \in C^1(U(x_0), V(y_0))$ bereits wissen.

///

3 Integration

In diesem Paragraphen definieren wir das Lebesgueintegral für banachraumwertige Funktionen. Dabei betrachten wir ein äusseres Maß μ auf dem Definitionsbereich Ω , d.h. eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto [0, \infty]$ mit

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ für $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \Omega$.

Eine Menge $A \subseteq \Omega$ heißt μ -meßbar oder meßbar bezüglich μ , falls

$$\forall S \subseteq \Omega : \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S - A).$$

Die Menge $\mathcal{A}_\mu$ der μ -meßbaren Mengen bildet eine σ -Algebra auf Ω , und μ ist ein σ -additives Maß auf $\mathcal{A}_\mu$. Weiter gilt für $B \subseteq A$ mit $\mu(A) = 0$, daß B meßbar bezüglich μ ist, d.h. μ ist ein vollständiges Maß auf Ω .

Im folgenden betrachten wir allgemein einen vollständigen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, d.h. $\mathcal{A}$ ist eine σ -Algebra auf Ω , μ ist ein σ -additives Maß auf $\mathcal{A}$, und für $B \subseteq A$ mit $\mu(A) = 0$ folgt $B \in \mathcal{A}$.

Definition 3.1 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein vollständiger Maßraum und Y ein Banachraum. Eine Funktion $s : \Omega \rightarrow Y$ heißt einfach, falls $s(\Omega)$ endlich ist. Eine einfache Funktion heißt μ -meßbar bzw. meßbar bezüglich μ , falls

$$s^{-1}(U) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } U \subseteq Y \text{ offen}$$

bzw. äquivalent

$$s^{-1}(y) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Eine einfache, μ -meßbare Funktion heißt μ -integrierbar, falls

$$\int_{\Omega} \|s\| \, d\mu < \infty,$$

oder äquivalent

$$\mu(s^{-1}(y)) < \infty \quad \text{für alle } y \in Y - \{0\},$$

und wir definieren das Lebesgueintegral durch

$$\int_{\Omega} s \, d\mu := \sum_{y \in Y - \{0\}} \mu(s^{-1}(y)) \, y. \quad (3.1)$$

Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow Y$ heißt μ -integrierbar, falls es eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher, μ -integrierbarer Funktionen gibt, für die

$$s_k \rightarrow f \quad \text{fast überall bezüglich } \mu, \quad (3.2)$$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|s_k - s_l\| \, d\mu = 0.$$

Wir definieren dann

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s_k \, d\mu \quad (3.3)$$

und

$$L^1(\mu, Y) := \{f : \Omega \rightarrow Y \mid f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}.$$

□

Betrachten wir eine einfache Abbildung $s : \Omega \rightarrow Y$ als Abbildung $s : \Omega \rightarrow Y'$ für einen endlich dimensionalen Unterraum $Y' \subseteq Y$, der $\text{span}(s(\Omega))$ enthält, so sehen wir, daß μ -Meßbarkeit, μ -Integrierbarkeit und $\int_{\Omega} s \, d\mu$ aus der reellen Theorie und der Definition 3.1 übereinstimmt. Insbesondere gilt:

(i) Ist s eine μ -meßbare Funktion, so ist

$$\|s\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar bezüglich } \mu, \quad (3.4)$$

(ii) ist s weiter μ -integrierbar, so folgt

$$\left\| \int_{\Omega} s \, d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|s\| \, d\mu. \quad (3.5)$$

Insbesondere existiert der Limes in (3.3). Andererseits müssen wir zeigen, daß das Integral in (3.3) wohldefiniert ist.

Proposition 3.1 Die Definition (3.3) ist unabhängig von der Wahl der Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in (3.2).

Beweis:

Wir müssen zeigen, daß für eine Folge einfacher, μ -integrierbarer Funktionen $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$s_k \rightarrow 0 \text{ fast überall bezüglich } \mu,$$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|s_k - s_l\| \, d\mu = 0,$$

die Identität

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s_k \, d\mu = 0$$

folgt.

Gemäß (3.4) und (3.5) gilt

$$\|s_k\| \in L^1(\mu),$$

$$\|s_k\| \rightarrow 0 \text{ fast überall bezüglich } \mu,$$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\|s_k\| - \|s_l\|| \, d\mu = 0.$$

Damit ist $\|s_k\|$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mu)$, die in $L^1(\mu)$ gegen 0 konvergiert. Daraus folgt

$$\left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s_k \, d\mu \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|s_k\| \, d\mu = 0.$$

///

Einfache Eigenschaften des Lebesgueintegrals sind:

Proposition 3.2 *Es sei $f \in L^1(\mu, Y)$. Dann gilt:*

(i) $\|f\|$ ist μ -integrierbar und

$$\left\| \int_{\Omega} f \, d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty.$$

(ii) Für jede stetige, lineare Abbildung $T \in L(Y, Z)$ mit Z ein Banachraum gilt $T \circ f \in L^1(\mu, Z)$ und

$$\int_{\Omega} T \circ f \, d\mu = T \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

□

Beweis:

(i) Es sei $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in (3.2). Dann ist $\|s_k\|$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mu)$, die μ -fast überall gegen $\|f\|$ konvergiert. Daraus folgt $\|f\| \in L^1(\mu)$, also insbesondere μ -meßbar und

$$\int_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty.$$

Weiter folgt aus (3.3) und (3.5), daß

$$\left\| \int_{\Omega} f \, d\mu \right\| \leftarrow \left\| \int_{\Omega} s_k \, d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|s_k\| \, d\mu \rightarrow \int_{\Omega} \|f\| \, d\mu.$$

//

(ii) Wieder sei $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in (3.2). Dann ist $T \circ s_k$ einfach und μ -meßbar. Weiter gilt

$$\int_{\Omega} \|T \circ s_k\| \, d\mu \leq \|T\| \int_{\Omega} \|s_k\| \, d\mu < \infty,$$

$$T \circ s_k \rightarrow T \circ f \text{ fast überall bezüglich } \mu,$$

und

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|T \circ s_k - T \circ s_l\| \, d\mu \leq \lim_{k,l \rightarrow \infty} \|T\| \int_{\Omega} \|s_k - s_l\| \, d\mu = 0.$$

Wir erhalten aus (3.3)

$$\int_{\Omega} T \circ f \, d\mu \leftarrow \int_{\Omega} T \circ s_k \, d\mu = T \int_{\Omega} s_k \, d\mu \rightarrow T \int_{\Omega} f \, d\mu,$$

da T linear ist und $\int_{\Omega} s_k \, d\mu$ nach (3.1) eine endliche Summe ist.

///

Mit der üblichen Identifikation

$$f = g \text{ in } L^1(\mu, Y) \iff f = g \text{ fast überall bezüglich } \mu$$

sehen wir, daß

$$\|f\|_{L^1(\mu, Y)} := \int_{\Omega} \|f\| \, d\mu$$

eine Norm auf $L^1(\mu, Y)$ ist.

Proposition 3.3 $L^1(\mu, Y)$ ist ein Banachraum.

Beweis:

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mu, Y)$, d.h.

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_k - f_l\| \, d\mu = 0. \quad (3.6)$$

Für $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(s_{kj})_{j \in \mathbb{N}}$ wie in (3.2). Da $s_{kj} \rightarrow f_k$ fast überall bezüglich μ , folgt mit dem Lemma von Fatou, daß

$$\int_{\Omega} \|f_k - s_{kj}\| \, d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|s_{ki} - s_{kj}\| \, d\mu.$$

Also existieren einfache, μ -integrierbare Funktionen s_k mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_k - s_k\| \, d\mu = 0.$$

Aus (3.6) und der Dreiecksungleichung folgt

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|s_k - s_l\| \, d\mu = 0.$$

Da es genügt zu zeigen, daß eine Teilfolge von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, können wir annehmen, daß

$$\int_{\Omega} \|s_k - s_{k+1}\| \, d\mu \leq 2^{-k}.$$

Daraus folgt

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \|s_k - s_{k+1}\| \, d\mu < \infty$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|s_k - s_{k+1}\| < \infty \text{ fast überall bezüglich } \mu \text{ auf } \Omega.$$

Da Y ein Banachraum ist, konvergiert

$$s_k = s_1 + \sum_{j=2}^k (s_j - s_{j-1}) \rightarrow s_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (s_j - s_{j-1}) =: f \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Nach Definition gilt $f \in L^1(\mu, Y)$, und es gilt wieder mit dem Lemma von Fatou

$$\int_{\Omega} \|f - s_k\| \, d\mu \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|s_l - s_k\| \, d\mu,$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - s_k\| \, d\mu = 0$$

und schließlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_k\| \, d\mu = 0.$$

Dies ergibt

$$f_k \rightarrow f \quad \text{in } L^1(\mu, Y).$$

///

Auch der Satz von Lebesgue überträgt sich auf den Banachraumwertigen Fall.

Proposition 3.4 *Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mu, Y)$, $f : \Omega \rightarrow Y$ und $g \in L^1(\mu)$ mit*

(i) $f_k \rightarrow f$ fast überall bezüglich μ .

(ii) $\|f_k\| \leq g$ fast überall bezüglich μ .

Dann gilt $f \in L^1(\mu, Y)$ und

$$f_k \rightarrow f \quad \text{in } L^1(\mu, Y).$$

Beweis:

Nach Proposition 3.2 sind $\|f_k\|$ meßbar bezüglich μ und weiter gilt

$$\|f_k - f_l\| \leq 2g \quad \text{fast überall bezüglich } \mu,$$

$$\|f_k - f_l\| \rightarrow 0 \quad \text{fast überall bezüglich } \mu \text{ für } k, l \rightarrow \infty.$$

Dann folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_k - f_l\| \, d\mu = 0,$$

und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $L^1(\mu, Y)$. Also konvergiert $f_k \rightarrow \tilde{f}$ in $L^1(\mu, Y)$, d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|\tilde{f} - f_k\| \, d\mu = 0. \quad (3.7)$$

Andererseits folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\int_{\Omega} \|f - f_k\| \, d\mu \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_l - f_k\| \, d\mu,$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_k\| \, d\mu = 0.$$

Aus (3.7) folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\int_{\Omega} \|f - \tilde{f}\| \, d\mu = 0,$$

also

$$f = \tilde{f} \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Mit (3.2) folgt $f \in L^1(\mu, Y)$ und

$$f_k \rightarrow f \quad \text{in } L^1(\mu, Y).$$

///

Im Rest des Paragraphen wollen wir μ -Integrierbarkeit einer Funktion $f : \Omega \rightarrow Y$ durch Eigenschaften von f charakterisieren. Dazu definieren wir.

Definition 3.2 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein vollständiger Maßraum und Y ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow Y$ heißt μ -meßbar oder meßbar bezüglich μ , falls

- (i) $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle $U \subseteq Y$ offen,
- (ii) es existiert eine μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit

$$f(\Omega - N) \quad \text{ist separabel.}$$

□

Da das Bild einfacher Funktionen endlich ist, ist μ -Meßbarkeit für einfache Funktionen aus Definitionen 3.1 und 3.2 äquivalent.

μ -Meßbarkeit überträgt sich in folgenden Situationen.

Proposition 3.5 (i) Es seien $f_k : \Omega \rightarrow Y$ meßbar bezüglich μ und

$$f_k \rightarrow f \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Dann ist f auch μ -meßbar.

- (ii) $f : \Omega \rightarrow Y$ sei μ -meßbar, Z ein Banachraum und $\varphi : Y \rightarrow Z$ borelmeßbar, d.h.

$$\varphi^{-1}(U) \quad \text{ist eine Borelmenge für alle } U \subseteq Z \text{ offen,}$$

und φ bildet separable Mengen in Y in separable Mengen in Z ab.

Dann ist $\varphi \circ f$ auch μ -meßbar.

Beweis:

(i) Es gibt eine μ -Nullmenge N , so daß

$$\begin{aligned} f_k &\rightarrow f \quad \text{auf } \Omega - N, \\ f_k(\Omega - N) &\quad \text{ist separabel.} \end{aligned}$$

Zuerst gilt

$$f(\Omega - N) \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(\Omega - N)},$$

und, da die abzählbaren Vereinigungen separabler Mengen, der Abschluß und Teilmengen in metrischen Räumen von separablen Mengen wieder separabel sind, ist auch $f(\Omega - N)$ separabel.

Für $A \subseteq Y$ abgeschlossen und die offenen Umgebungen $U_{1/k}(A) := \{y \in Y \mid d(y, A) < 1/k\}$ gilt

$$f^{-1}(A) - N = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} f_i^{-1}(U_{1/k}(A)) - N.$$

Damit ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ und somit

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } U \subseteq Y \text{ offen.}$$

//

(ii) Mit der μ -Meßbarkeit von f existiert eine μ -Nullmenge N mit $f(\Omega - N)$ separabel. Da φ separable Mengen in separable Mengen abbildet, ist auch $(\varphi \circ f)(\Omega - N)$ separabel.

Da $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist und $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für $U \subseteq Y$ offen, gilt

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle Borelmengen } B \text{ von } Y.$$

Da φ borelmeßbar ist, ist $\varphi^{-1}(V)$ eine Borelmenge in Y für alle $V \subseteq Z$ offen und somit

$$(\varphi \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{A}.$$

///

Insbesondere gilt: für μ -meßbares f ist $\|f\|$ auch μ -meßbar. Wir erhalten folgendes Kriterium für μ -Integrierbarkeit.

Proposition 3.6 *Es gilt*

$$f \in L^1(\mu, Y) \iff f \text{ ist } \mu\text{-meßbar, } \int_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty.$$

Beweis:

($\implies$):

Aus Proposition 3.2 (ii) folgt $\int_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty$. Nun sei $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in (3.2). Da s_k meßbar bezüglich μ sind und $s_k \rightarrow f$ fast überall bezüglich μ , so folgt mit Proposition 3.5 (i), daß auch f meßbar bezüglich μ ist.

//

($\Leftarrow$):

Mit der μ -Meßbarkeit von f existiert eine μ -Nullmenge N mit $f(\Omega - N)$ separabel. Wir wählen eine abzählbar dichte Teilmenge $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von $f(\Omega - N)$, und sehen für alle $k \in \mathbb{N}$, daß

$$f(\Omega - N) \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} B_{1/k}(y_j).$$

Wir definieren induktiv

$$\begin{aligned} A_1 &:= f^{-1}(B_{1/k}(y_1)) - N, \\ A_j &:= f^{-1}(B_{1/k}(y_j)) - \cup_{i=1}^{j-1} A_i - N. \end{aligned}$$

Da f meßbar bezüglich μ ist, sind $A_j \in \mathcal{A}$. Weiter gilt

$$\Omega - N = \sum_{j=1}^{\infty} A_j,$$

und diese Vereinigung ist disjunkt.

Falls $\|y_j\| \leq 1/k$, so setzen wir $\tilde{y}_j = 0$.

Falls $\|y_j\| > 1/k$, so setzen wir

$$\tilde{y}_j := y_j - \frac{1}{k} \frac{y_j}{\|y_j\|},$$

und erhalten für $y \in B_{1/k}(y_j)$, daß

$$\|\tilde{y}_j\| = \|y_j\| - \frac{1}{k} \leq \|y_j\| - \|y - y_j\| \leq \|y\|.$$

In jedem Fall gilt

$$\begin{aligned} \|y_j - \tilde{y}_j\| &\leq 1/k, \\ \|\tilde{y}_j\| &\leq \|y\| \quad \text{für alle } y \in B_{1/k}(y_j). \end{aligned}$$

Nun definieren wir

$$s_k := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j} \tilde{y}_j$$

und

$$s_{kl} := \sum_{j=1}^l \chi_{A_j} \tilde{y}_j.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|s_{kl}\| &\leq \|s_k\| \leq \|f\|, \\ \|(f - s_k)(x)\| &\leq 2/k \quad \text{für } x \in \Omega - N, \end{aligned}$$

insbesondere

$$\begin{aligned} s_k &\rightarrow f \quad \text{fast überall bezüglich } \mu, \\ s_{kl} &\rightarrow s_k \quad \text{für } l \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und

s_{kl} ist einfach und μ -meßbar.

Zuerst folgt

$$\int_{\Omega} \|s_{kl}\| \, d\mu \leq \int_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty$$

und $s_{kl} \in L^1(\mu, Y)$.

Da $\|f\| \in L^1(\mu, Y)$, folgt mit dem Satz von Lebesgue, Proposition 3.4, daß

$$s_k \in L^1(\mu, Y)$$

und schließlich

$$f \in L^1(\mu, Y).$$

///

Als einfache Konsequenz ergibt sich.

Proposition 3.7 *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, μ ein Radon-Maß auf K und $f : K \rightarrow Y$ stetig. Dann gilt*

$$f \in L^1(\mu, Y).$$

Beweis:

Da K kompakt ist und f stetig ist, ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt und als kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes separabel.

Da f stetig ist, gilt für alle $U \subseteq Y$ offen, daß $f^{-1}(U)$ relativ offen in K ist, also insbesondere eine Borelmenge ist. Damit ist f meßbar bezüglich μ .

Da schließlich f beschränkt und $\mu(K) < \infty$, folgt

$$\int_K \|f\| \, d\mu < \infty,$$

und $f \in L^1(\mu, Y)$ mit Proposition 3.6.

///

Daraus erhalten wir, daß in der Situation von Proposition 2.5

$$I := \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(x+th)(h, \dots, h) \, dt \in Y$$

existiert.

Dann folgt mit (2.13) und Proposition 3.2 (ii) für $\Lambda \in Y^*$, daß

$$\Lambda.R_{k+1}(x, h) = \Lambda.I$$

und mit dem Satz von Hahn-Banach, daß

$$R_{k+1}(x, h) = I,$$

also (2.14) wie gewünscht.

4 Nichtlineare Abbildungen

In diesem Paragraphen stellen wir verschiedene nichtlineare Abbildungen vor.

Definition 4.1 X, Y seien Banachräume und $\emptyset \neq M \subseteq X$. Eine Abbildung $f : M \rightarrow Y$ heißt kompakt, falls f stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.

□

Kompakte Abbildungen bilden den Abschluß von stetigen, beschränkten Abbildungen mit endlich-dimensionalem Bild, wenn M beschränkt ist.

Proposition 4.1 Für beschränktes M ist $f : M \rightarrow Y$ genau dann kompakt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige, beschränkte Abbildung

$$f_\varepsilon : M \rightarrow Y_\varepsilon$$

mit $Y_\varepsilon \subseteq Y$ endlich-dimensional existiert, die

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^\infty(M)} \leq \varepsilon$$

erfüllt. Weiter kann f_ε so gewählt werden, daß

$$f_\varepsilon(M) \subseteq \text{convex } f(M).$$

Beweis:

($\Rightarrow$):

Da f kompakt und M beschränkt ist, ist $\overline{f(M)}$ kompakt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $y_1, \dots, y_m \in f(M)$ mit

$$\overline{f(M)} \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(y_i).$$

Wir definieren

$$\varphi_j : M \rightarrow [0, 1]$$

durch

$$\varphi_j(x) := \frac{d(f(x), Y - B_\varepsilon(y_j))}{\sum_{i=1}^m d(f(x), Y - B_\varepsilon(y_i))}.$$

Es gilt

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j = 1 \quad \text{auf } M.$$

Wir definieren

$$f_\varepsilon := \sum_{j=1}^m \varphi_j y_j$$

und

$$Y_\varepsilon := \text{span}\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq Y.$$

Es gilt

$$\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon \quad \text{auf } M$$

und

$$f_\varepsilon(M) \subseteq \text{convex } \{y_1, \dots, y_m\} \subseteq \text{convex } f(M)$$

ist beschränkt.

//

($\Leftarrow$):

Zuerst ist f als gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen wieder stetig. Nun sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Da $f_{1/k}(M) \subseteq Y_{1/k}$ beschränkt ist, können wir für eine Teilfolge annehmen, daß

$$f_{1/k}(x_i) \quad \text{für } i \rightarrow \infty \text{ und alle } k \in \mathbb{N} \text{ konvergiert.}$$

Dann gilt

$$\limsup_{i,j \rightarrow \infty} \|f(x_i) - f(x_j)\| \leq 2/k,$$

und $(f(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, also konvergent.

///

Beispiel 4.1 (Spektraltheorie für den Laplaceoperator)

Wir betrachten für $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ die Einbettung

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Behauptung: (Satz von Rellich)

Diese Einbettung ist eine kompakte, lineare Abbildung.

Beweis:

Es sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $W_0^{1,p}(\Omega)$, d.h.

$$\|u_j\|_{L^p(\Omega)}, \|\nabla u_j\|_{L^p(\Omega)} < \Lambda.$$

Wir müssen zeigen, daß eine Teilfolge in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Da $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ dicht liegt, nehmen wir o.B.d.A. $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ an.

Wir wählen $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi = 1$ und setzen

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$u_{j\varepsilon}(x) := \int \varphi_\varepsilon(x-z) u_j(z) \, dz$$

und sehen

$$u_{j\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

mit $\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \Omega) < \varepsilon\}$. Es gilt

$$|u_{j\varepsilon}(x) - u_{j\varepsilon}(y)| \leq C_\varepsilon |x - y| \int |u_j| \leq C_\varepsilon(\Omega) \|u_j\|_{L^p(\Omega)} |x - y|,$$

und $(u_{j\varepsilon})_{j \in \mathbb{N}}$ ist für festes $\varepsilon > 0$ gleichgradig stetig.

Da $\overline{\Omega_\varepsilon}$ kompakt ist, konvergiert nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine Teilfolge gleichmäßig, insbesondere für diese Teilfolge

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|u_{i\varepsilon} - u_{j\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Nun zeigen wir

$$\|u_{j\varepsilon} - u_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \|\nabla u_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \Lambda \varepsilon. \quad (4.1)$$

Wählen wir sukzessive Teilfolgen für $\varepsilon_k \rightarrow 0$, so folgt aus (4.1)

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|u_i - u_j\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

und $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$.

Beim Beweis von (4.1) unterdrücken wir den Index j . Es gilt

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z) |u(x) - u(x-z)| \, dz \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \varphi_\varepsilon(z) |\nabla u(x-tz)| |z| \, dt \, dz$$

und

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z) |z|^p |\nabla u(x-tz)|^p \, dx \, dt \, dz \leq \varepsilon^p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

also (4.1).

///

Nun betrachten wir den Lösungsoperator aus Beispiel 2.4 als Endomorphismus

$$T : L^2(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

T ist ein kompakter, linearer Operator.

Wir nehmen an, daß a_{ij} symmetrisch ist, d.h.

$$a_{ij} = a_{ji},$$

und $b_i = c_j = 0$ und $d \geq 0$.

Für $\varphi, \psi \in L^2(\Omega)$, $u = T\varphi$, $v = T\psi$ gilt

$$\langle T\varphi, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \psi = \int_{\Omega} (a_{ij} \partial_j v \partial_i u + d v u) = \int_{\Omega} \varphi v = \langle \varphi, T\psi \rangle_{L^2(\Omega)},$$

und T ist selbstadjungiert. Setzen wir T komplex-linear auf die komplexen Hilberträume $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ und $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{C})$ durch $T(\varphi + i\psi) = T\varphi + iT\psi$ fort, so bleibt T selbstadjungiert und kompakt, und mit dem Spektralsatz für normale, kompakte Operatoren auf separablen Hilberträumen existiert eine Orthonormalbasis

$$\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ von } L^2(\Omega, \mathbb{C})$$

aus Eigenvektoren von T zu den Eigenwerten $\mu_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Es gilt $\mu_k \neq 0$, da $\ker T = \{0\}$, denn sei $T\varphi = 0$, so gilt für $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, daß

$$\int_{\Omega} \varphi v = \int_{\Omega} (a_{ij} \partial_j 0 \partial_i v + d 0 v) = 0,$$

also $\varphi = 0$, da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist. Weiter sehen wir

$$\mu_k = \mu_k \langle u_k, u_k \rangle = \int_{\Omega} T u_k \overline{u_k} = \int_{\Omega} (a_{ij} \partial_j T u_k \overline{\partial_i T u_k} + d |T u_k|^2) \geq 0,$$

insbesondere sind alle Eigenwerte μ_k reell. Damit sind $\operatorname{Re}(u_k)$ und $\operatorname{Im}(u_k)$, falls diese nicht verschwinden, reellwertige Eigenfunktionen zum gleichen Eigenwert μ_k , und wir können die Orthonormalbasis $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ als reellwertige Funktionen auswählen. Insbesondere ist dann $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des reellen Hilbertraumes $L^2(\Omega)$.

Wir setzen

$$\lambda_k := \mu_k^{-1}$$

und bemerken

$$u_k = \lambda_k T u_k \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

und weiter, da $\mu_k > 0$,

$$0 < \lambda_k \rightarrow \infty \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wir ordnen

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Wir sehen

$$\begin{aligned} -\partial_i(a_{ij} \partial_j u_k) + d u_k &= \lambda_k u_k \quad \text{in } \Omega, \\ u_k &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Betrachten wir den Laplaceoperator, d.h. $a_{ij} = \delta_{ij}$, $d = 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} -\Delta u_k &= \lambda_k u_k \quad \text{in } \Omega, \\ u_k &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \nabla u_l = \lambda_k \int_{\Omega} \nabla T u_k \nabla u_l = \lambda_k \int_{\Omega} u_k u_l = \lambda_k \delta_{kl}.$$

Nun sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, also

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k$$

mit geeigneten $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Weiter gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla u_k = \lambda_k \int_{\Omega} u u_k = \lambda_k \alpha_k,$$

also, da $(\lambda_k^{-1/2} \nabla u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ orthonormal sind, folgt

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Daraus folgt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_1^{-1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

und die Poincaré-Ungleichung in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist für $C = \lambda_1^{-1/2}$ erfüllt. Dies ist optimal, da für $u = u_1$ Gleichheit gilt.

Ist schließlich $\partial\Omega$ glatt, so kann man mit elliptischer Regularitätstheorie zeigen, daß aus

$$-\Delta u = \varphi$$

im schwachen Sinne für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \in W^{l,2}(\Omega)$, $l = 0, \dots$, mit $W^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$, die höhere Regularität

$$u \in W^{l+2,2}(\Omega)$$

folgt, siehe [GT] Theorem 8.13. Somit gilt $u_k \in W^{l,2}(\Omega)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und mit Sobolev-Einbettungssätzen ergibt sich

$$u_k \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$u_k = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

□

Definition 4.2 X sei ein Banachraum und $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Eine Abbildung $f \in C^0(U, X^*)$ heißt Gradientenabbildung, falls ein $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit

$$f = DF$$

existiert.

□

Folgende Bedingungen sind äquivalent.

Proposition 4.2 X sei ein Banachraum, und $\emptyset \neq U \subseteq X$ sei offen und konvex. Für $f \in C^1(U, X^*)$ sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) f ist eine Gradientenabbildung.

(ii) Für einen C^1 -Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ in U ist

$$\int_\gamma f := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt$$

wegunabhängig.

(iii) Für $x \in U$ ist

$$f'(x) \in L(X, X^*) \cong L_2(X, \mathbb{R})$$

symmetrisch.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Da $f = DF$, gilt

$$\int_{\gamma} f = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) \, dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

//

(ii) $\Rightarrow$ (i):

O.B.d.A. sei $0 \in U$. Wir definieren

$$F(x) := \int_0^1 f(tx).x \, dt.$$

Da das Integral wegunabhängig ist, gilt

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 f(x+th).h \, dt$$

und

$$DF(x) = f(x).$$

//

(i) $\Rightarrow$ (iii):

Da $f = DF$, gilt

$$X^* \langle f'(x)h_1, h_2 \rangle_X = D^2F(x)(h_1, h_2) = D^2F(x)(h_2, h_1) = X^* \langle f'(x)h_2, h_1 \rangle_X.$$

//

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Wieder sei o.B.d.A. $0 \in U$ und wir definieren

$$F(x) := \int_0^1 f(tx).x \, dt.$$

Es gilt

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 f(tx+th).h \, dt + \int_0^1 (f(tx+th) - f(tx)).x \, dt.$$

Für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle f(tx + th) - f(tx), x \rangle dt &= \int_0^1 \int_0^t \langle f'(tx + sh).h, x \rangle ds dt = \\ &= \int_0^1 \int_s^1 \langle f'(tx + sh).x, h \rangle dt ds = \int_0^1 \langle f(x + sh) - f(sh), h \rangle ds, \end{aligned}$$

und es folgt

$$F(x + h) - F(x) = \int_0^1 f(x + th).h dt,$$

also

$$DF(x) = f(x).$$

///

Definition 4.3 X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq M \subseteq X$ und $f : M \rightarrow Y$.
 f heißt *koerziv*, falls für $x_j \in M$ gilt

$$\|x_j\| \rightarrow \infty \implies \|f(x_j)\| \rightarrow \infty.$$

f heißt *eigentlich*, falls f stetig ist und

$$f^{-1}(C) \text{ ist kompakt für alle kompakten } C \subseteq Y. \quad (4.2)$$

□

(4.2) ist äquivalent zu der Bedingung:

Für $x_j \in M$ mit $f(x_j) \rightarrow y$ folgt, daß

$$x_j \text{ hat eine in } M \text{ konvergente Teilfolge.} \quad (4.3)$$

Folgende Bedingungen sind äquivalent.

Proposition 4.3 X, Y seien Banachräume und $f \in C^0(X, Y)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

- (i) f ist eigentlich.
- (ii) f ist abgeschlossen und $f^{-1}(y)$ ist kompakt für alle $y \in Y$.
- (iii) f ist koerziv, falls X und Y endlich-dimensional sind.

Beweis:

(i) $\implies$ (ii):

Da $\{y\} \subseteq Y$ kompakt ist, folgt $f^{-1}(y)$ ist kompakt. Nun sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x_j \in A$ mit $f(x_j) \rightarrow y$. Aus (4.3) folgt, daß

$$x_j \rightarrow x \in A$$

für eine Teilfolge. Also gilt $y = f(x) \in f(A)$.

//

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Es sei $C \subseteq Y$ kompakt und $D := f^{-1}(C)$. Wir müssen zeigen, daß D kompakt ist. Dazu sei $\{D_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von D mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, d.h.

$$E_{I'} := \bigcap_{\alpha \in I'} D_\alpha \neq \emptyset \quad \text{für alle endlichen } I' \subseteq I.$$

Wir müssen

$$\bigcap_{\alpha \in I} D_\alpha \neq \emptyset \tag{4.4}$$

zeigen.

Die $E_{I'}$ sind abgeschlossen, und, da f abgeschlossen ist, ist

$$f(E_{I'}) \subseteq C \quad \text{abgeschlossen.}$$

Für endlich viele $(I'_i)_{i=1, \dots, k}$ ist $I'' := \bigcup_{i=1}^k I'_i$ wieder endlich, und es gilt

$$\bigcap_{i=1}^k f(E_{I'_i}) \supseteq f(\bigcap_{i=1}^k E_{I'_i}) = f(E_{I''}) \neq \emptyset.$$

Da C kompakt ist, existiert

$$y \in \bigcap_{I'} f(E_{I'}) \neq \emptyset.$$

Daraus folgt

$$\bigcap_{\alpha \in I'} (D_\alpha \cap f^{-1}(y)) = E_{I'} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset, \tag{4.5}$$

da $y \in f(E_{I'})$.

Andererseits ist $f^{-1}(y)$ nach Voraussetzung kompakt und $D_\alpha \cap f^{-1}(y)$ abgeschlossen. Damit folgt aus (4.5)

$$\bigcap_{\alpha \in I} D_\alpha \supseteq \bigcap_{\alpha \in I} (D_\alpha \cap f^{-1}(y)) \neq \emptyset,$$

also insbesondere (4.4).

//

(i) $\Leftrightarrow$ (iii):

Falls X und Y endlich-dimensional sind, so besagt Eigentlichkeit von f gerade, daß die Urbilder von beschränkten Mengen unter f wieder beschränkt sind. Dies ist Koerzivität.

///

Koerzive Abbildungen sind in folgenden Situationen eigentlich.

Proposition 4.4 *X, Y seien Banachräume und $f \in C^0(X, Y)$ sei koerziv. Dann ist f eigentlich, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

(i) *f ist die Summe einer eigentlichen Abbildung und einer kompakten Abbildung.*

(ii) *X ist reflexiv und für $x_j, x \in X$ gilt*

$$x_j \rightarrow x \text{ schwach in } X, f(x_j) \text{ konvergiert stark} \implies x_j \rightarrow x \text{ stark in } X.$$

Beweis:

Es sei $x_j \in X$ mit $f(x_j) \rightarrow y$. Da f koerziv ist, folgt, daß $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.

- (i) Nun ist $f = g + C$ mit g eigentlich und C kompakt. Für eine Teilfolge konvergiert $C(x_j) \rightarrow \tilde{y}$, also $g(x_j) \rightarrow y - \tilde{y}$. Da g eigentlich ist, konvergiert eine Teilfolge von $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

//

- (ii) Da X reflexiv ist, konvergiert eine Teilfolge $x_j \rightarrow x$ schwach. Da $f(x_j) \rightarrow y$, folgt nach Voraussetzung $x_j \rightarrow x$ stark in X .

///

Eigentliche Abbildungen haben die Eigenschaften, daß sich Lösungen der Gleichung

$$f(x) = y$$

stabil bei Störungen von y in folgendem Sinne verhalten.

Proposition 4.5 X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq M \subseteq X$ und $f \in C^0(M, Y)$ sei eigentlich. Dann existiert zu $y \in Y, \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(x) - y\| < \delta \Rightarrow d(x, f^{-1}(y)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M.$$

Beweis:

Angenommen, die Aussage ist falsch für ein $y \in Y, \varepsilon > 0$. Dann existiert $x_j \in M$ mit

$$f(x_j) \rightarrow y,$$

aber

$$d(x_j, f^{-1}(y)) \geq \varepsilon.$$

Mit (4.3) konvergiert $x_j \rightarrow x \in M$ für eine Teilfolge. Dann folgt $f(x) = y$ und somit

$$\|x_j - x\| \geq \varepsilon$$

im Widerspruch zu $x_j \rightarrow x$.

///

Beispiel 4.2 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform II)

Wir betrachten die quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform aus Beispiel 2.2. Dabei nehmen wir zusätzlich an, daß für jedes $\delta > 0$ ein $\varphi_\delta \in L^1(\Omega)$ existiert mit

$$\begin{aligned} |A(x, z, 0)| &\leq \varphi_\delta^{\frac{p-1}{p}}(x) + \delta |z|^{p-1}, \\ B(x, z, w)z &\geq -\varphi_\delta(x) - \delta(|z|^p + |w|^p). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Behauptung:

Dann ist der Differentialoperator $f : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)^*$ aus Beispiel 2.2 mit

$$f(u).v := \int_{\Omega} (A(., u, \nabla u) \nabla v + B(., u, \nabla u) v)$$

koerziv und eigentlich.

Beweis:

Mit (2.2) und (4.6) gilt

$$\begin{aligned} \langle f(u), u \rangle &= \int_{\Omega} (A(., u, \nabla u) - A(., u, 0))(\nabla u - 0) + \int_{\Omega} (A(., u, 0) \nabla u + B(., u, \nabla u) u) \geq \\ &\geq c_0 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - 2\delta \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - 2\delta \|u\|_{L^p(\Omega)}^p - C_{\delta}. \end{aligned}$$

Also für δ klein und der Poincaré-Ungleichung

$$\langle f(u), u \rangle \geq c_1 \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - C \quad (4.7)$$

und daraus

$$\|f(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^*} \geq \tilde{c}_1 \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} - C,$$

falls $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \geq 1$. Damit ist f koerziv.

$W_0^{1,p}(\Omega)$ ist als abgeschlossener Unterraum von $L^p(\Omega)^{n+1}$ reflexiv, und wir verwenden Proposition 4.4 (ii) zum Beweis, daß f eigentlich ist.

Dazu konvergiere $u_j \rightarrow u$ schwach in $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $f(u_j) \rightarrow \Lambda$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)^*$. Mit dem Satz von Rellich, Beispiel 4.1, können wir annehmen, daß $u_j \rightarrow u$ stark in $L^p(\Omega)$. Daraus folgt mit dem Konvergenzsatz von Vitali und der Wachstumsbedingung (2.1)

$$A(., u_j, \nabla u) \rightarrow A(., u, \nabla u) \quad \text{stark in } L^q(\Omega),$$

$$B(., u_j, \nabla u_j) \quad \text{ist beschränkt in } L^q(\Omega),$$

wobei $q = \frac{p}{p-1}$. Dann folgt mit (2.2), daß

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle f(u_j) - f(u), u_j - u \rangle = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} (A(., u_j, \nabla u_j) - A(., u_j, \nabla u))(\nabla u_j - \nabla u) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} (A(., u_j, \nabla u) - A(., u, \nabla u))(\nabla u_j - \nabla u) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} (B(., u_j, \nabla u_j) - B(., u, \nabla u))(u_j - u) \right) \geq \\ &\geq \limsup_{j \rightarrow \infty} c_0 \|\nabla u_j - \nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

also $u_j \rightarrow u$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$, und f ist eigentlich.

///

5 Fredholm-Abbildungen

Definition 5.1 X, Y seien Banachräume. Eine stetige, lineare Abbildung $T \in L(X, Y)$ heißt Fredholm-Abbildung, falls

- (i) $\text{im } T \subseteq Y$ ist abgeschlossen,
- (ii) $\ker T$ und $\text{coker } T := Y/\text{im } T$ sind endlich-dimensional.

Der Index einer Fredholm-Abbildung ist definiert durch

$$\text{ind } T := \dim \ker T - \dim \text{coker } T.$$

□

Wir wollen Fredholm-Abbildungen durch ihre transponierte Abbildung $T^* : Y^* \rightarrow X^*$,

$$T^* \Lambda := \Lambda \circ T,$$

charakterisieren. Dazu stellen wir folgende Resultate der linearen Funktionalanalysis zusammen. Für $M \subseteq X$ und $N \subseteq X^*$ sind die Annulatoren definiert durch

$$M^\perp := \{ \Lambda \in X^* \mid \Lambda x = 0 \text{ für alle } x \in M \} \subseteq X^*,$$

$${}^\perp N := \{ x \in X \mid \Lambda x = 0 \text{ für alle } \Lambda \in N \} \subseteq X.$$

Die Annulatoren sind abgeschlossene Unterräume, und $M^\perp$ ist sogar schwach*-abgeschlossen.

Sukzessives bilden von Annulatoren ergibt

$$\begin{aligned} {}^\perp(M^\perp) &= \overline{\text{span}(M)}, \\ ({}^\perp N)^\perp &= \overline{\text{span}(N)}^*, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei $\overline{}$ den Abschluß in der schwach*-Topologie bezeichnet.

Für einen abgeschlossenen Unterraum $U \subseteq X$ gilt

$$\begin{aligned} U^* &\cong X^*/U^\perp, \\ (X/U)^* &\cong U^\perp. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Für einen schwach*-abgeschlossenen Unterraum $V \subseteq X^*$ setzen wir $U := {}^\perp V$ und erhalten mit (5.1) $U^\perp = V$ und mit (5.2)

$$\begin{aligned} ({}^\perp V)^* &\cong X^*/V, \\ (X/{}^\perp V)^* &\cong V. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Die Beziehung zwischen Kern und Bild von T und T^* sind

$$\begin{aligned} \ker T &= {}^\perp \text{im } T^*, \\ \ker T^* &= \text{im}(T)^\perp. \end{aligned} \tag{5.4}$$

$\ker T$ und $\ker T^*$ sind abgeschlossene Unterräume, und $\ker T^*$ ist sogar schwach*-abgeschlossen. Für die Bilder gilt

$$\begin{aligned} & \text{im } T \text{ ist abgeschlossen,} \\ \iff & \text{im } T^* \text{ ist abgeschlossen,} \\ \iff & \text{im } T^* \text{ ist schwach*-abgeschlossen.} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Damit können wir folgende Charakterisierung beweisen.

Proposition 5.1 X, Y seien Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) T ist eine Fredholm-Abbildung.
- (ii) T^* ist eine Fredholm-Abbildung.
- (iii) $\text{im } T$ ist abgeschlossen und

$$\ker T, \ker T^* \text{ sind endlich-dimensional.}$$

In allen Fällen gilt

$$\begin{aligned} \text{ind } T &= \dim \ker T - \dim \ker T^*, \\ \text{ind } T^* &= -\text{ind } T. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Beweis:

Mit (5.5) können wir zum Beweis der Äquivalenz der Aussagen annehmen, daß

$$\begin{aligned} & \text{im } T \text{ abgeschlossen ist,} \\ & \text{im } T^* \text{ schwach*-abgeschlossen ist.} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Im folgenden Dimensionsvergleich der auftretenden Vektor- bzw Banachräume setzen wir im Fall unendlich-dimensionaler Räume U die Dimension $\dim U = \infty$. Mit dieser Konvention gilt für jeden Banachraum U , daß $\dim U = \dim U^*$.

Aus (5.7) folgt mit (5.2), (5.3) und (5.4), daß

$$\dim \ker T^* = \dim \text{im}(T)^\perp = \dim(Y/\text{im } T) = \dim \text{coker } T, \tag{5.8}$$

und

$$\dim \ker T = \dim {}^\perp \text{im } T^* = \dim(X^*/\text{im } T^*) = \dim \text{coker } T^*, \tag{5.9}$$

Aus (5.8) und (5.9) folgt die Äquivalenz und (5.6).

///

Fredholm-Abbildungen haben folgende kanonische Zerlegung.

Proposition 5.2 X, Y seien Banachräume und $T \in L(X, Y)$ eine lineare Fredholm-Abbildung. Dann kann T faktorisiert werden durch

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{T} & Y \\
\downarrow \pi & & \uparrow i \\
X/\ker T & \xrightarrow[\approx]{\tilde{T}} & \operatorname{im} T
\end{array}$$

Dabei ist π eine Quotientenabbildung mit endlich-dimensionalem Kern, $\tilde{T}$ ein Isomorphismus und i eine Inklusion mit endlich-dimensionalem Cokern.

Insbesondere sind $\pi, \tilde{T}$ und i Fredholm-Abbildungen, und es gilt

$$\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} \pi + \operatorname{ind} \tilde{T} + \operatorname{ind} i.$$

Beweis:

Die Faktorisierung existiert mit stetigen, linearen Abbildungen $\pi, \tilde{T}$ und i . Weiter ist $\tilde{T}$ bijektiv, und, da $\operatorname{im} T$ abgeschlossen ist, also ein Banachraum ist, ist $\tilde{T}$ ein Isomorphismus. Da $\dim \ker T, \dim(Y/\operatorname{im} T) < \infty$, sind $\pi, \tilde{T}$ und i Fredholm-Abbildungen.

Schließlich gilt

$$\operatorname{ind} \pi + \operatorname{ind} \tilde{T} + \operatorname{ind} i = \dim \ker T + 0 - \dim(Y/\operatorname{im} T) = \operatorname{ind} T.$$

///

Kompositionen von Fredholm-Abbildungen sind wieder Fredholm-Abbildungen.

Proposition 5.3 X, Y, Z seien Banachräume, und $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$ seien Fredholm-Abbildungen.

Dann ist $S \circ T \in L(X, Z)$ wieder eine Fredholm-Abbildung, und es gilt

$$\operatorname{ind} S \circ T = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T. \quad (5.10)$$

Beweis:

Wir faktorisieren T und S und müssen folgende Fälle betrachten.

- (i) T oder S ist ein Isomorphismus.
- (ii) $T = \pi$ ist eine Quotientenabbildung mit endlich-dimensionalem Kern.
- (iii) $S = i$ ist eine Inklusion mit endlich-dimensionalem Cokern.
- (iv) $S \circ T = \pi \circ i$ mit π und i wie in (ii) und (iii).

Im Fall (i) gilt die Aussage trivial.

Im Fall (ii) gilt $\operatorname{im} S \circ \pi = \operatorname{im} S$, und

$$p := \pi|_{(\ker S \circ \pi)} : \ker S \circ \pi \rightarrow \ker S$$

ist surjektiv mit $\ker p = \ker \pi$. Dies ergibt

$$\dim \ker S \circ \pi = \dim \ker \pi + \dim \ker S < \infty.$$

Im Fall (iii) gilt $\ker i \circ T = \ker T$ und

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{coker} i \circ T &= \dim(Z/\operatorname{im} T) = \\ &= \dim(Z/Y) + \dim(Y/\operatorname{im} T) = \dim \operatorname{coker} i + \dim \operatorname{coker} T < \infty. \end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir (iv) mit

$$\begin{aligned} i &: X \hookrightarrow Y, \\ \pi &: Y \rightarrow Z = Y/W \end{aligned}$$

mit abgeschlossenen Unterräumen $X, W \subseteq Y$ und

$$\dim W, \dim(Y/X) < \infty.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \ker \pi \circ i &= X \cap W, \\ \operatorname{im} \pi \circ i &= \pi(X) = (X + W)/W. \end{aligned}$$

Da X abgeschlossen ist und W endlich-dimensional ist, ist auch $X + W$ abgeschlossen. Und da $X + W = \pi^{-1}((X + W)/W)$ und π eine Quotientenabbildung ist, so ist auch $(X + W)/W \subseteq Y/W$ abgeschlossen.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \dim \ker \pi \circ i &\leq \dim W < \infty, \\ \dim \operatorname{coker} \pi \circ i &= \dim\left(\frac{Y/W}{(X+W)/W}\right) = \dim(Y/(X + W)) \leq \dim(Y/X) < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist $\pi \circ i$ eine Fredholm-Abbildung.

Schließlich gilt mit elementarer linearer Algebra

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} \pi \circ i &= \dim \ker \pi \circ i - \dim \operatorname{coker} \pi \circ i = \\ &= \dim X \cap W - \dim(Y/(X + W)) = \dim X \cap W - \dim\left(\frac{Y/X}{(X+W)/X}\right) = \\ &= \dim X \cap W + \dim((X + W)/X) - \dim(Y/X) = \\ &= \dim W - \dim(Y/X) = \dim \ker \pi - \dim \operatorname{coker} i = \\ &= \operatorname{ind} \pi + \operatorname{ind} i. \end{aligned}$$

///

Fredholm-Abbildungen bleiben unter gewissen Störungen Fredholm-Abbildungen mit gleichem Index.

Proposition 5.4 X, Y seien Banachräume und $T \in L(X, Y)$ eine lineare Fredholm-Abbildung. $S \in L(X, Y)$ sei eine stetige, lineare Abbildung, die eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $\|S\| < \varepsilon$, wobei ε von T abhängt.

(ii) S ist kompakt.

Dann ist $T + S$ wieder eine Fredholm-Abbildung, und es gilt

$$\operatorname{ind}(T + S) = \operatorname{ind} T. \quad (5.11)$$

Im Fall (i) gilt weiter für ε klein genug

$$\begin{aligned} \dim \ker(T + S) &\leq \dim \ker T, \\ \dim \operatorname{coker}(T + S) &\leq \dim \operatorname{coker} T. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Beweis:

(i) Da $\dim \ker T$, $\dim(Y/\operatorname{im} T) < \infty$ und $\operatorname{im} T$ abgeschlossen ist existieren abgeschlossene Unterräume $\tilde{X} \subseteq X$ und $\tilde{Y} \subseteq Y$ mit

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X} \oplus \ker T, \\ Y &= \operatorname{im} T \oplus \tilde{Y}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

und es gilt

$$\operatorname{ind} T = \dim \ker T - \dim \tilde{Y}.$$

Es folgt, daß die Abbildung $\Phi : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow Y$ mit

$$\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) := T\tilde{x} + \tilde{y}$$

stetig und bijektiv ist, also ein Isomorphismus ist. Dann ist für $\varepsilon < \|\Phi^{-1}\|^{-1}$ die Abbildung $\tilde{\Phi} : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow Y$ mit

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) + S\tilde{x} = (T + S)\tilde{x} + \tilde{y}$$

auch ein Isomorphismus.

Nun betrachten wir

$$S_0 := S|_{\ker T} : \ker T \rightarrow Y$$

und $\Psi : X \times \tilde{Y} = (\tilde{X} \oplus \ker T) \times \tilde{Y} \rightarrow Y$ mit

$$\begin{aligned} \Psi(x, \tilde{y}) &= \Psi(\tilde{x} + k, \tilde{y}) := \\ &= \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + S_0 k = (T + S)\tilde{x} + \tilde{y} + S k = \\ &= (T + S)x + \tilde{y}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

wobei $x = \tilde{x} + k$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $k \in \ker T$. Ψ ist surjektiv, da $\tilde{\Phi}$ surjektiv ist, und es gilt

$$\ker \Psi = \{(\tilde{x} + k, \tilde{y}) \mid k \in \ker T, (\tilde{x}, \tilde{y}) = -\tilde{\Phi}^{-1} S_0 k\},$$

insbesondere

$$\dim \ker \Psi = \dim \ker T < \infty, \quad (5.15)$$

und Ψ ist eine Fredholm-Abbildung mit

$$\operatorname{ind} \Psi = \dim \ker T. \quad (5.16)$$

Die Inklusion $i : X \hookrightarrow X \times \tilde{Y}$ ist auch eine Fredholm-Abbildung mit

$$\text{ind } i = -\dim \tilde{Y} = -\dim \text{coker } T. \quad (5.17)$$

Mit (5.14) erhalten wir

$$T + S = \Psi \circ i. \quad (5.18)$$

Mit Proposition 5.3 ist $T + S$ eine Fredholm-Abbildung und mit (5.10), (5.16) und (5.17) gilt weiter

$$\text{ind}(T + S) = \text{ind } \Psi + \text{ind } i = \dim \ker T - \dim \text{coker } T = \text{ind } T,$$

also (5.11).

Aus (5.18) folgt $\ker(T + S) \subseteq \ker \Psi$ und mit (5.15) folgt

$$\dim \ker(T + S) \leq \dim \ker T.$$

Zusammen mit (5.11) ergibt dies (5.12).

//

(ii) Nun sei S kompakt. Zuerst zeigen wir, daß

$$\text{im}(T + S) \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist.} \quad (5.19)$$

Dazu betrachten wir $x_j \in X$ mit

$$(T + S)x_j \rightarrow y. \quad (5.20)$$

Zunächst nehmen wir an, daß $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, und zeigen, daß für eine Teilfolge

$$x_j \text{ konvergiert in } X. \quad (5.21)$$

Da S kompakt ist, konvergiert $Sx_j \rightarrow \tilde{y}$ für eine Teilfolge und $Tx_j \rightarrow y - \tilde{y}$.

Wir zerlegen $x_j = \tilde{x}_j + k_j$ mit $\tilde{x}_j \in \tilde{X}$ und $k_j \in \ker T$ und $X = \tilde{X} \oplus \ker T$ wie in (5.13). Dann gilt

$$\|k_j\| \leq C \|x_j\|$$

und für eine Teilfolge konvergiert $k_j \rightarrow k$ als beschränkte Folge in dem endlich-dimensionalen Raum $\ker T$.

Weiter ist $T|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \rightarrow \text{im } T$ ein Isomorphismus, da diese Abbildung stetig und bijektiv ist und $\text{im } T$ abgeschlossen ist. Also existiert ein $c_0 > 0$ mit

$$c_0 \|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\| \leq \|T\tilde{x}_i - T\tilde{x}_j\| = \|Tx_i - Tx_j\|,$$

und $(\tilde{x}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, also konvergent. Dies ergibt (5.21).

Wie kehren zu (5.20) zurück und wollen $y \in \text{im}(T + S)$ zeigen. Wir können o.B.d.A. annehmen

$$\|x_j\| \leq 2d(x_j, \ker(T + S)) =: 2d_j.$$

Falls $d_j \rightarrow \infty$, so setzen wir $z_j := d_j^{-1}x_j$ und erhalten

$$\begin{aligned} \|z_j\| &\leq 2, \\ d(z_j, \ker(T+S)) &= 1, \\ (T+S)z_j &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Mit (5.21) konvergiert $z_j \rightarrow z$ für eine Teilfolge. Daraus folgt $z \in \ker(T+S)$ und

$$\|z_j - z\| \geq 1$$

im Widerspruch zu $z_j \rightarrow z$.

Damit ist d_j beschränkt und mit (5.21) konvergiert $x_j \rightarrow x$ für eine Teilfolge. Dies ergibt

$$y = (T+S)x \in \operatorname{im}(T+S)$$

und (5.19) ist bewiesen.

Nun betrachten wir eine beschränkte Folge $x_j \in \ker(T+S)$. Insbesondere ist $(T+S)x_j = 0$ konstant, also konvergent. Mit (5.21) konvergiert $x_j \rightarrow x \in \ker(T+S)$ für eine Teilfolge. Dies besagt, daß die abgeschlossene Einheitskugel in $\ker(T+S)$ kompakt ist, und somit ist $\ker(T+S)$ endlich-dimensional.

Da S^* auch kompakt ist und T^* nach Proposition 5.1 eine Fredholm-Abbildung ist, erhalten wir aus dem eben Gezeigten

$$\dim \ker (T+S)^* < \infty,$$

und $T+S$ ist nach Proposition 5.1 eine Fredholm-Abbildung.

Insbesondere ist $T+tS$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Fredholm-Abbildung, und nach (i) ist $(t \mapsto \operatorname{ind}(T+tS))$ lokal konstant, also konstant. Dies ergibt (5.11) im Fall (ii).

///

Beispiel 5.1 (Lineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform II)

Wir betrachten die allgemeine lineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform aus Beispiel 2.4

$$Bu := -\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_j \partial_j u + du = \varphi + \operatorname{div} \psi \quad \text{in } \Omega \tag{5.23}$$

für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dabei sind $a_{ij}, b_i, c_j, d \in L^\infty(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$,

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2 \quad \text{für } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $c_0 > 0$.

Falls die Koeffizienten die Bedingung

$$\int_{\Omega} (b_i \partial_i v + dv) \geq 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ mit } v \geq 0 \tag{5.24}$$

erfüllen, so folgt mit dem schwachen Maximumprinzip, siehe [GT] Theorem 8.1, daß für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$-\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_j \partial_j u + du = 0 \Rightarrow u = 0. \tag{5.25}$$

Behauptung:

Ist (5.24) erfüllt, so hat (5.23) eine eindeutige Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, und der Differentialoperator $B : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^*$ ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Wir definieren die Abbildung $K : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^*$ durch

$$K(u, v) := \int_{\Omega} uv.$$

Mit dem Satz von Rellich aus Beispiel 4.1 ist K eine kompakte, lineare Abbildung.

Aus der Garding-Ungleichung (2.9) folgt für $t \in \mathbb{R}$ groß genug, daß

$$\langle (B + tK)u, u \rangle \geq c_1 \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \quad \text{für } u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

wobei $c_1 > 0$.

Dann folgt mit dem Satz von Lax-Milgram aus Beispiel 2.4, daß $B + tK : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^*$ ein Isomorphismus ist, also insbesondere eine Fredholm-Abbildung mit Index 0 ist.

Da K kompakt ist, folgt mit Proposition 5.4 (ii), daß auch B eine Fredholm-Abbildung mit Index 0 ist. (5.25) besagt, daß B injektiv ist. Daraus folgt, daß B bijektiv ist, und somit ein Isomorphismus ist.

///

Definition 5.2 X, Y seien Banachräume und $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und zusammenhängend. Eine Abbildung $f \in C^1(U, Y)$ heißt (nichtlineare) Fredholm-Abbildung, falls $Df(x) \in L(X, Y)$ für alle $x \in U$ eine lineare Fredholm-Abbildung ist. Wir definieren den Index von f durch

$$\text{ind } f := \text{ind } Df(x),$$

der mit Proposition 5.4 unabhängig von $x \in U$ ist, da U zusammenhängend ist.

□

Beispiel: Es sei $f, g \in C^1(U, Y)$, f eine Fredholm-Abbildung und g eine kompakte Abbildung. Dann ist $f + g$ mit Proposition 5.4 und den Übungsaufgaben wieder eine Fredholm-Abbildung mit $\text{ind}(f + g) = \text{ind } f$.

□

Folgende Zerlegung ist fundamental für Fredholm-Abbildungen.

Lemma 5.5 X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ sei offen und zusammenhängend und $f \in C^1(U, Y)$ eine Fredholm-Abbildung.

Für jedes $x_0 \in U$ existiert eine Zerlegung

$$X = \tilde{X} \oplus K,$$

$$Y = Z \oplus \tilde{Y},$$

in abgeschlossenen Unterräumen $\tilde{X}, K \subseteq X$ und $Z, \tilde{Y} \subseteq Y$ mit $K = \ker Df(x_0)$, $\tilde{Y}$ endlich-dimensional und $Z = \operatorname{im} Df(x_0)$, $x_0 = \tilde{x}_0 + k_0$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $k_0 \in K$ und offene, konvexe Umgebungen $U(\tilde{x}_0)$ von $\tilde{x}_0$ in $\tilde{X}$ und $U(k_0)$ von k_0 in K , mit $\overline{U(k_0)}$ kompakt, $U(x_0) = U(\tilde{x}_0) \times U(k_0)$,

$$\overline{U(x_0)} = \overline{U(\tilde{x}_0)} \times \overline{U(k_0)} \subseteq U,$$

für $k \in \overline{U(k_0)}$ ist

$$f(\cdot + k) : \overline{U(\tilde{x}_0)} \rightarrow Y \text{ eigentlich,}$$

$$f(\cdot + k) : \overline{U(\tilde{x}_0)} \rightarrow f(\overline{U(\tilde{x}_0)} + k) \text{ ein Homöomorphismus,}$$

die Abbildung $\Phi_x \in L(\tilde{X} \times \tilde{Y}, Y)$ mit

$$\Phi_x(\tilde{x}, \tilde{y}) := D_{\tilde{x}}f(x) \cdot \tilde{x} + \tilde{y},$$

und insbesondere

$$\pi_Z \circ D_{\tilde{x}}f(x) : \tilde{X} \rightarrow Z$$

mit der Projektion $\pi_Z : Y \rightarrow Z$, ist ein Isomorphismus für $x \in \overline{U(x_0)}$, und

$$\sup_{x \in \overline{U(x_0)}} \|Df(x)\| < \infty.$$

Beweis:

Für x_0 ist $T := Df(x_0)$ eine lineare Fredholm-Abbildung. Wir zerlegen

$$X = \tilde{X} \oplus K,$$

$$Y = Z \oplus \tilde{Y},$$

in abgeschlossenen Unterräumen $\tilde{X}, K \subseteq X$ und $Z, \tilde{Y} \subseteq Y$ mit $K = \ker T$, $\tilde{Y}$ endlich-dimensional und $Z = \operatorname{im} T$ wie in (5.13).

Wir betrachten die Abbildung $F : U \times \tilde{Y} \rightarrow Y \times K$ mit

$$F(x, \tilde{y}) := (f(x) + \tilde{y}, P_K x),$$

wobei $P_K : X \rightarrow K$ die stetige Projektion von X auf K mit Kern $\tilde{X}$ ist.

Es gilt

$$DF(x_0, 0) \cdot (x, \tilde{y}) = (T \cdot x + \tilde{y}, P_K x) = (T \cdot \tilde{x} + \tilde{y}, k),$$

wobei $x = \tilde{x} + k$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $k \in K$. Dann ist $DF(x_0, 0) \in L(X \times \tilde{Y}, Y \times K)$ ein Isomorphismus. Es sei $x_0 = \tilde{x}_0 + k_0$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $k_0 \in K$ und $y_0 = f(x_0)$. Dann existieren nach dem Satz über inverse Funktionen, Satz 2.1, offene Umgebungen, so daß

$$F : V(\tilde{x}_0) \times V(k_0) \times V(0) \rightarrow V(y_0, k_0)$$

ein C^1 -Diffeomorphismus mit Inversen

$$G := F^{-1} : V(y_0, k_0) \rightarrow V(\tilde{x}_0) \times V(k_0) \times V(0)$$

ist.

Wir wählen sukzessive offene, konvexe Umgebungen mit

$$\overline{U(y_0, k_0)} \subseteq V(y_0, k_0),$$

$$\overline{U(\tilde{x}_0)} \subseteq V(\tilde{x}_0),$$

$$\overline{U(k_0)} \subseteq V(k_0) \text{ kompakt,}$$

$$U(x_0) = U(\tilde{x}_0) \times U(k_0),$$

und

$$F(\overline{U(\tilde{x}_0)} \times \overline{U(k_0)} \times \{0\}) \subseteq U(y_0, k_0).$$

Nun sei $k \in \overline{U(k_0)}$ und $\tilde{x}_j \in \overline{U(\tilde{x}_0)}$ mit

$$f(\tilde{x}_j + k) = y_j \rightarrow y.$$

Dann folgt $(y_j, k) \in U(y_0, k_0)$ und $(y, k) \in \overline{U(y_0, k_0)} \subseteq V(y_0, k_0)$. Weiter gilt

$$(\tilde{x}_j + k, 0) = G(y_j, k_0) \rightarrow G(y, k_0) =: (\tilde{x} + k, k_0),$$

also $\tilde{x}_j \rightarrow \tilde{x}$, $\tilde{x} \in \overline{U(\tilde{x}_0)} \subseteq V(\tilde{x}_0)$ und $f(\tilde{x} + k) = y$. Damit ist $f(\cdot + k)|_{\overline{U(\tilde{x}_0)}}$ eigentlich, und seine Inverse ist stetig.

Aufgrund der Zerlegung von X, Y wissen bereits, daß

$$\Phi_{x_0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = T.\tilde{x} + \tilde{y}$$

ein Isomorphismus ist. Wählen wir die Umgebungen genügend klein, so daß

$$\|\Phi_x - \Phi_{x_0}\| \leq \|Df(x) - Df(x_0)\| \leq \min(1, \|\Phi_{x_0}^{-1}\|^{-1}) \quad \text{für } x \in \overline{U(x_0)},$$

so ist auch Φ_x ein Isomorphismus und

$$\sup_{x \in \overline{U(x_0)}} \|Df(x)\| \leq \|Df(x_0)\| + 1 < \infty.$$

///

Wir wollen eine Verallgemeinerung von Smale des Satzes von Sard für nichtlineare Fredholm-Abbildungen beweisen. Dazu definieren wir.

Definition 5.3 X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Für $f \in C^1(U, Y)$ heißt $x \in U$ regulärer Punkt, falls $Df(x) \in L(X, Y)$ surjektiv ist. Andernfalls heißt x singulärer Punkt.

Die singulären Werte von f sind die Bilder der singulären Punkte, und die regulären Werte sind das Komplement der singulären Werte.

□

Proposition 5.6 X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und zusammenhängend und $f \in C^1(U, Y)$ eine Fredholm-Abbildung. Dann ist die Menge der singulären Punkte abgeschlossen in U .

Beweis:

Die Menge der singulären Punkte ist

$$S := \{x \in U \mid \dim \operatorname{coker} Df(x) \geq 1\}.$$

Nach Proposition 5.4 (5.12) ist $(x \mapsto \dim \operatorname{coker} Df(x))$ oberhalbstetig und somit S abgeschlossen in U .

///

Bevor wir zum Satz von Smale kommen, brauchen wir noch folgende Proposition.

Proposition 5.7 *X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und zusammenhängend und $f \in C^1(U, Y)$ eine Fredholm-Abbildung.*

Dann ist f lokal eigentlich, d.h. zu jedem $x \in U$ existiert eine offene Umgebung mit $\overline{U(x)} \subseteq U$, so daß

$$f|_{\overline{U(x)}} : \overline{U(x)} \rightarrow Y$$

eigentlich ist, also insbesondere abgeschlossen ist.

Beweis:

Wir betrachten die Zerlegung aus Lemma 5.5 für $x_0 \in U$. Nun sei $x_j = \tilde{x}_j + k_j \in \overline{U(x_0)}$ mit $f(x_j) = y_j \rightarrow y$. Da $\overline{U(k_0)}$ kompakt ist, konvergiert $k_j \rightarrow k \in \overline{U(k_0)}$ für eine Teilfolge. Da die Umgebungen konvex sind und $\|Df(x)\| \leq M$ für $x \in \overline{U(x_0)}$ und $M < \infty$ geeignet, sehen wir

$$\|f(\tilde{x}_j + k_j) - f(\tilde{x}_j + k)\| \leq M \|k_j - k\| \rightarrow 0,$$

also

$$f(\tilde{x}_j + k) \rightarrow y.$$

Da $f(\cdot + k)$ eigentlich ist, konvergiert $\tilde{x}_j \rightarrow \tilde{x} \in \overline{U(\tilde{x}_0)}$ für eine Teilfolge, und schließlich $x_j = \tilde{x}_j + k_j \rightarrow \tilde{x} + k \in \overline{U(x_0)}$.

///

Nun kommen wir zum Satz von Smale.

Satz 5.1 (Satz von Smale 1965)

X, Y seien separable Banachräume, und $f \in C^l(X, Y)$ sei eine Fredholm-Abbildung mit

$$l > \max(\operatorname{ind} f, 0). \quad (5.26)$$

Dann ist die Menge der singulären Werte von f von erster Kategorie in Y .

□

Beweis:

Für $x_0 \in X$ existiert mit Proposition 5.7 eine Umgebung $U(x_0)$, so daß

$$f|_{\overline{U(x_0)}} : \overline{U(x_0)} \rightarrow Y$$

eigentlich, also auch abgeschlossen ist.

Durch Verkleinern können wir annehmen, daß die Zerlegung aus Lemma 5.5 in $U(x_0)$ gilt, d.h.

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X} \oplus K, \\ Y &= Z \oplus \tilde{Y}, \end{aligned}$$

für abgeschlossene Unterräume $\tilde{X}, K \subseteq X$ und $Z, \tilde{Y} \subseteq Y$ mit $\dim K, \dim \tilde{Y} < \infty$ und

$$\dim f = \dim K - \dim \tilde{Y}. \quad (5.27)$$

Weiter ist die Abbildung $\Phi_x \in L(\tilde{X} \times \tilde{Y}, Y)$ mit

$$\Phi_x(\tilde{x}, \tilde{y}) := D_{\tilde{x}}f(x) \cdot \tilde{x} + \tilde{y}, \quad (5.28)$$

und insbesondere

$$\pi_Z \circ D_{\tilde{x}}f(x) : \tilde{X} \rightarrow Z, \quad (5.29)$$

ein Isomorphismus für $x \in \overline{U(x_0)}$.

Mit Proposition 5.6 wissen wir, daß

$$S_{x_0} := f(\overline{U(x_0)}) \cap \{ \text{singuläre Punkte von } f \}$$

abgeschlossen ist.

Da Mengen von erster Kategorie die abzählbare Vereinigungen nirgendsdichter Mengen sind, d.h. Mengen, deren Abschluß leeres Inneres hat, und X eine abzählbare Basis hat, genügt es zu zeigen, daß

$$\text{int } S_{x_0} = \emptyset. \quad (5.30)$$

Es sei $y_0 \in S_{x_0}$, $y_0 = z_0 + \tilde{y}_0 \in Z \oplus \tilde{Y}$. Da $f|_{\overline{U(x_0)}}$ eigentlich ist, ist

$$C := f^{-1}(y_0) \cap \overline{U(x_0)} \text{ kompakt.}$$

Wir betrachten $f_0 : \tilde{X} \oplus K \rightarrow Z$, $f_0 := \pi_Z \circ f$. Für $x_1 \in C$, $x_1 = \tilde{x}_1 + k_1 \in \tilde{X} \oplus K$ gilt $f(x_1) = y_0 = z_0 + \tilde{y}_0$, also

$$f_0(\tilde{x}_1, k_1) = z_0.$$

Mit (5.29) und dem impliziten Funktionensatz existiert eine C^l -Funktion $\tilde{x}_1 : U(k_1) \rightarrow U(\tilde{x}_1)$, $\tilde{x}_1(k_1) = \tilde{x}_1$, und

$$f_0(\tilde{x}_1(k), k) = z_0.$$

Weiter sind dies die einzigen Lösungen der Gleichung $f_0(x) = z_0$ in einer Umgebung $U(x_1)$ von x_1 . Da C kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung

$$C \subseteq \cup_{j=1}^m U(x_j)$$

mit $x_j \in C$ und Umgebungen $U(x_j)$ wie eben. Weiter existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(C) := \{x \in X \mid d(x, C) < \varepsilon\} \subseteq \cup_{j=1}^m U(x_j). \quad (5.31)$$

Da $f|_{\overline{U(x_0)}}$ eigentlich ist, existiert mit Proposition 4.5 ein $\delta > 0$ mit

$$x \in \overline{U(x_0)}, \|f(x) - y_0\| < \delta \Rightarrow x \in U_\varepsilon(C). \quad (5.32)$$

Nun definieren wir $g_j \in C^l(U(k_j), \tilde{Y})$ durch

$$g_j(k) := \pi_{\tilde{Y}} f(\tilde{x}_j(k), k),$$

also

$$f(\tilde{x}_j(k), k) = z_0 + g_j(k). \quad (5.33)$$

Mit (5.26) und (5.27) und dem Satz von Sard, siehe [M] bzw. Satz A.1 für glatte Funktionen und [S], ist die Menge der singulären Werte eines jeden g_j eine Nullmenge in $\tilde{Y}$. Also existiert ein regulärer Wert $\tilde{y}$ aller $g_j, j = 1, \dots, m$, beliebig nahe an $\tilde{y}_0$, und $y := (z_0, \tilde{y})$ ist beliebig nahe an y_0 , insbesondere

$$\|y - y_0\| < \delta. \quad (5.34)$$

Wir behaupten

$$y \notin S_{x_0}. \quad (5.35)$$

Daraus folgt (5.30) sofort.

Um (5.35) zu beweisen, müssen wir für $x \in \overline{U(x_0)}$ mit $f(x) = y$ zeigen, daß x ein regulärer Punkt von f ist, d.h.

$$Df(x) : X \rightarrow Y \text{ ist surjektiv.} \quad (5.36)$$

Mit (5.31), (5.32) und (5.34) folgt zuerst

$$x \in U(x_j) \quad \text{für ein } j \in \{1, \dots, m\}.$$

Da $f(x) = y = (z_0, \tilde{y})$, also $f_0(x) = z_0$, erhalten wir $x = (\tilde{x}_j(k), k)$ für ein $k \in U(k_j)$ und $g_j(k) = \tilde{y}$. Da $\tilde{y}$ ein regulärer Wert von g_j ist, folgt

$$Dg_j(k) : K \rightarrow \tilde{Y} \text{ ist surjektiv.}$$

Zum Beweis der Surjektivität in (5.36) wählen wir zu beliebigem $y' \in Y$ mit (5.28) ein $\tilde{x}' \in \tilde{X}, \tilde{y}' \in \tilde{Y}$ mit

$$\Phi_x(\tilde{x}', \tilde{y}') = Df(x).\tilde{x}' + \tilde{y}' = y'.$$

Mit der Surjektivität von $Dg_j(k)$ existiert ein $k' \in K$ mit

$$Dg_j(k).k' = \tilde{y}'.$$

Aus (5.33) folgt

$$Df(x).(\tilde{x}'_j(k).k' + k') = Dg_j(k).k' = \tilde{y}'.$$

Setzen wir $x' := \tilde{x}' + \tilde{x}'_j(k).k' + k' \in X$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} Df(x).x' &= Df(x).\tilde{x}' + Df(x).(\tilde{x}'_j(k).k' + k') = \\ &= Df(x).\tilde{x}' + Dg_j(k).k' = Df(x).\tilde{x}' + \tilde{y}' = \Phi_x(\tilde{x}', \tilde{y}') = y', \end{aligned}$$

also ist $Df(x)$ surjektiv, und (5.36) ist bewiesen.

///

Folgende Proposition ergibt sich als Korollar.

Proposition 5.8 *X, Y seien separable Banachräume, und $f \in C^1(X, Y)$ sei eine Fredholm-Abbildung mit negativem Index. Dann ist $f(X)$ von erster Kategorie in Y .*

Beweis:

Für $x \in X$ gilt

$$\dim \operatorname{coker} Df(x) \geq -\operatorname{ind} f > 0$$

und $Df(x)$ ist nicht surjektiv. Damit sind alle $x \in X$ singuläre Punkte von f , und $f(X)$ die Menge der singulären Werte. Mit dem Satz von Smale, Satz 5.1, ist diese von erster Kategorie.

///

Teil II

Lösen Nichtlinearer Gleichungen

6 Kontinuitätsmethode

Satz 6.1 X, Y seien Banachräume und $L_t := (1-t)L_0 + tL_1 \in L(X, Y)$ mit

$$\|x\| \leq C \|L_t x\| \quad \text{für } x \in X \quad (6.1)$$

mit $C < \infty$ unabhängig von $t \in [0, 1]$.

Ist L_0 ein Isomorphismus, so ist auch L_1 ein Isomorphismus.

Beweis: Falls L_t für $t \in [0, 1]$ ein Isomorphismus ist, so gilt mit (6.1)

$$\|L_t^{-1}\| \leq C.$$

Dann folgt für $\tilde{t} \in [0, 1]$ mit

$$|t - \tilde{t}| \|L_1 - L_0\| < C^{-1},$$

daß

$$\|L_t - L_{\tilde{t}}\| < \|L_t^{-1}\|^{-1},$$

also ist auch

$$L_{\tilde{t}} \text{ ein Isomorphismus.} \quad (6.2)$$

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N} \|L_1 - L_0\| < C^{-1}$$

und setzen $t_j := \frac{j}{N}, j = 1, \dots, N$. Nach Voraussetzung ist $L_{t_0} = L_0$ ein Isomorphismus. Daraus folgt sukzessive mit (6.2), daß L_{t_j} und schließlich $L_{t_N} = L_1$ ein Isomorphismus ist.

///

Beispiel 6.1 (Lineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand und $0 < \alpha < 1$, $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2,$$

$$\|a_{ij}, b_i, c\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda,$$

mit $c_0 > 0$ und $\Lambda < \infty$.

Aus der Regularitätstheorie elliptischer Differentialgleichungen, ist bekannt, daß für $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, das die lineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform mit Nullrandwerten

$$\begin{aligned} -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_iu + cu &= \varphi \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.3)$$

und $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ erfüllt, die folgenden Schauder-Abschätzungen

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \alpha, c_0, \Lambda)(\|\varphi\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C_b^0(\Omega)}) \quad (6.4)$$

gelten, siehe [GT] Theorem 6.6.

Falls $c \geq 0$ folgt mit dem Maximumprinzip, siehe [GT] Theorem 3.3, für $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, daß

$$-a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_iu + cu = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \implies u = 0. \quad (6.5)$$

Behauptung:

Für $c \geq 0$ hat (6.3) eine eindeutige Lösung in $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, und der Differentialoperator $\{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \rightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Wir setzen $C^{2,\alpha,0}(\Omega) := \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ und $L : C^{2,\alpha,0}(\Omega) \rightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$Lu := -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_iu + cu.$$

Es genügt zu zeigen, daß L ein Isomorphismus ist.

Zuerst zeigen wir, daß

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \alpha, c_0, \Lambda) \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \quad \text{für } u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega) \quad (6.6)$$

falls $c \geq 0$.

Gilt dies nicht, so existieren Operatoren L_k mit Koeffizienten wie oben und $u_k \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ mit $\|u_k\|_{C_b^0(\Omega)} = 1$ und

$$k \|L_k u_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}.$$

Dann folgt mit (6.4)

$$k \|L_k u_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C (\|L_k u_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u_k\|_{C_b^0(\Omega)}),$$

also für $k > C$

$$\|L_k u_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \frac{C}{k - C} \|u_k\|_{C_b^0(\Omega)} \leq \frac{C}{k - C},$$

und

$$L_k u_k \rightarrow 0 \quad \text{in } C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Wieder folgt mit (6.4)

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq \tilde{C}.$$

Somit konvergiert für eine Teilfolge $u_k \rightarrow u$ stark in $C^2(\Omega)$ mit $u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ und $u_k \rightarrow u$ stark in $C_b^0(\Omega)$, also $\|u\|_{C_b^0(\Omega)} = 1$. Weiter konvergieren die Koeffizienten von L_k stark in $C_b^0(\Omega)$ gegen Koeffizienten in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ wie oben und somit $L_k \rightarrow L$. Daraus folgt $L_k u_k \rightarrow Lu$ stark in $C_b^0(\Omega)$, also $Lu = 0$.

Mit (6.5) folgt $u = 0$ im Widerspruch zu $\|u\|_{C_b^0(\Omega)} = 1$, und (6.6) ist bewiesen.

//

Nun betrachten wir den Laplace-Operator $L = -\Delta$, d.h. $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i, c = 0$. Für $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega)$ existiert nach Beispiel 2.4 ein eindeutiges $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$-\Delta u = \varphi$$

im schwachen Sinne. Mit elliptischer Regularitätstheorie folgt wie in Beispiel 4.1, siehe [GT] Theorem 8.13, daß $u \in W^{l,2}(\Omega)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und mit Sobolev-Einbettungen, daß $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Insbesondere ist $u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ und $Lu = \varphi$.

Nun sei $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Wir wählen eine Folge $\varphi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_k &\rightarrow \varphi \quad \text{stark in } C_b^0(\Omega), \\ \varphi_k &\text{ ist beschränkt in } C^{0,\alpha}(\Omega). \end{aligned}$$

Dann sei $u_k \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ mit $Lu_k = \varphi_k$ wie eben gezeigt. Aus (6.6) folgt

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C \|\varphi_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)},$$

und u_k ist beschränkt in $C^{2,\alpha}(\Omega)$, also wie oben für eine Teilfolge $u_k \rightarrow u$ stark in $C^2(\Omega)$ mit $u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ und $Lu = \varphi$. Damit ist $L = -\Delta$ surjektiv.

Andererseits ist L mit (6.5) bzw. (6.6) für allgemeine Koeffizienten injektiv. Da L auch stetig ist, folgt, daß

$$-\Delta : C^{2,\alpha,0}(\Omega) \rightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$$

ein Isomorphismus ist.

Schließlich setzen wir für $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} a_{ij,t} &:= (1-t)\delta_{ij} + ta_{ij}, \\ b_{i,t} &:= tb_i, \quad c_t := tc, \end{aligned}$$

und

$$L_t u := -a_{ij,t} \partial_{ij} u + b_{i,t} \partial_i u + c_t u.$$

Dann erfüllt L_t (6.6) mit einer von t unabhängigen Konstanten. Da $L_0 = -\Delta$ wie bereits gezeigt ein Isomorphismus ist, folgt mit Satz 6.1, daß auch L ein Isomorphismus ist.

///

7 Der Brouwersche Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$

Wir beginnen mit der axiomatischen Definition des Brouwerschen Abbildungsgrades.

Definition 7.1 *Eine Abbildung*

$$(f, \Omega, y) \mapsto \deg(f, \Omega, y) \in \mathbb{R}$$

mit

$$\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, nichtleer,}$$

$$f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n),$$

$$y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega),$$

heißt Brouwerscher Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$, falls $\deg$ folgende Axiome erfüllt:

(i) *Normierung:*

Es gilt

$$\deg(\text{id}, B_1(0), 0) = 1. \quad (7.1)$$

(ii) *Additivität:*

Für $\emptyset \neq \Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ und

$$y \in \mathbb{R}^n - f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$$

gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^2 \deg(f, \Omega_i, y). \quad (7.2)$$

(iii) *Randbedingungen:*

Für $f = g$ auf $\partial\Omega$ gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y). \quad (7.3)$$

(iv) *Translationsinvarianz:*

Es gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0). \quad (7.4)$$

□

Im folgenden nehmen wir an, daß $\deg$ der Brouwersche Abbildungsgrad gemäß Definition 7.1 ist. Am Ende dieses Paragraphen zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit.

Die Additivität in Definition 7.1 kann für $\Omega_2 = \emptyset$ formuliert werden und ergibt die Ausschneidungseigenschaft.

Proposition 7.1 (Ausschneidungseigenschaft) Für $\emptyset \neq \Omega_0 \subseteq \Omega$ offen und

$$y \in \mathbb{R}^n - f(\overline{\Omega} - \Omega_0)$$

gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_0, y). \quad (7.5)$$

Beweis:

Die Menge $K := f^{-1}(y) \subseteq \Omega_0$ ist kompakt. Wir wählen $x_0 \in \Omega_0 - K$ und $\varepsilon > 0$, so daß

$$B_\varepsilon(x_0), U_\varepsilon(K) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) < \varepsilon\} \subseteq \Omega_0,$$

$$B_\varepsilon(x_0) \cap U_\varepsilon(K) = \emptyset.$$

Dann folgt mit (7.2), daß

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, U_\varepsilon(K), y) + \deg(f, B_\varepsilon(x_0), y) = \deg(f, \Omega_0, y),$$

also (7.5). ///

Die Additivität in Definition 7.1 und Proposition 7.1 ergeben die Lösungseigenschaft.

Proposition 7.2 (Lösungseigenschaft)

$$\deg(f, \Omega, y) \neq 0 \implies y \in f(\Omega). \quad (7.6)$$

Beweis:

Angenommen $y \notin f(\overline{\Omega})$. Dann wählen wir disjunkte Bälle

$$B_\varepsilon(x_1), B_\varepsilon(x_2) \subseteq \Omega$$

und erhalten mit (7.2) und (7.5) für $j = 1, 2$, daß

$$\deg(f, B_\varepsilon(x_j), y) = \deg(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^2 \deg(f, B_\varepsilon(x_i), y),$$

also

$$\deg(f, \Omega, y) = 0. \quad \text{///}$$

Aus Definition 7.1 (iii) ergibt sich die Homotopieinvarianz.

Proposition 7.3 (Homotopieinvarianz) *Es sei*

$$f : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig, } f_t(x) := f(x, t)$$

und

$$y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig}$$

mit

$$y(t) \in \mathbb{R}^n - f_t(\partial\Omega). \quad (7.7)$$

Dann ist

$$\deg(f_t, \Omega, y(t))$$

unabhängig von $0 \leq t \leq 1$.

Beweis:

Mit (7.4) können wir $y(t) = 0$ für $0 \leq t \leq 1$ annehmen.

Da f stetig und $\partial\Omega \times [0, 1]$ kompakt ist, existiert mit (7.7) ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$|f_t(x)| \geq \varepsilon \quad \text{für } d(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Weiter existiert $\delta > 0$ mit

$$\|f_t - f_{\tilde{t}}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon/2 \quad \text{für } |t - \tilde{t}| \leq \delta.$$

Die Proposition folgt, wenn wir für solche $t, \tilde{t}$ zeigen, daß

$$\deg(f_t, \Omega, 0) = \deg(f_{\tilde{t}}, \Omega, 0). \quad (7.8)$$

Wir wählen $\eta \in C_0^0(\Omega)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ auf $\Omega_\varepsilon := \Omega - \overline{U_\varepsilon(\partial\Omega)}$ und setzen

$$g := (1 - \eta)f_t + \eta f_{\tilde{t}}.$$

Auf $\overline{U_\varepsilon(\partial\Omega)}$ gilt

$$|g| \geq |f_t| - |\eta(f_t - f_{\tilde{t}})| \geq \varepsilon/2 > 0,$$

also

$$0 \in \mathbb{R}^n - g(\overline{U_\varepsilon(\partial\Omega)}).$$

Da weiter

$$g = f_t \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und

$$g = f_{\tilde{t}} \quad \text{auf } \partial\Omega_\varepsilon,$$

folgt mit (7.3) und Proposition 7.1, daß

$$\deg(f_t, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega_\varepsilon, 0) = \deg(f_{\tilde{t}}, \Omega_\varepsilon, 0) = \deg(f_{\tilde{t}}, \Omega, 0),$$

also (7.8).

///

Bemerkung:

Mit der Homotopieinvarianz erhalten wir für $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\deg(f(\cdot + x_0), \Omega - x_0, y) = \deg(f, \Omega, y).$$

□

In folgenden Spezialfällen kann der Abbildungsgrad durch die sogenannte Index- bzw. Determinantenformel angegeben werden.

Proposition 7.4 *Es sei $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$.*

(i) *Indexformel:*
Falls

$$\Omega \cap f^{-1}(y) \text{ endlich ist,}$$

so gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{ind}(f, x), \quad (7.9)$$

wobei

$$\text{ind}(f, x) := \deg(f, U(x), f(x))$$

für eine beschränkte, offene Umgebung $U(x)$ von x mit $\overline{U(x)} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$.

(ii) *Für $f \in C^0(B_\varepsilon(x_0), \mathbb{R}^n)$ differenzierbar in x_0 und*

$$Df(x_0) \text{ invertierbar}$$

gilt

$$\text{ind}(f, x_0) = \text{sgn det } Df(x_0). \quad (7.10)$$

(iii) *Determinantenformel:*

Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $y \notin f(\partial\Omega)$ ein regulärer Wert von f , d.h.

$$Df(x) \text{ ist invertierbar für alle } x \in f^{-1}(y),$$

gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn det } Df(x). \quad (7.11)$$

Beweis:

(i) (7.9) und die Wohldefiniertheit von ind folgen direkt aus Proposition 7.1 und (7.2).

//

(ii) Mit der Translationsinvarianz in Definition 7.1 und der Homotopieinvarianz in Proposition 7.3 und der darauf folgenden Bemerkung können wir $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ annehmen und setzen $T := Df(0)$. Zuerst zeigen wir

$$\text{ind}(f, 0) = \text{ind}(T, 0). \quad (7.12)$$

Dazu setzen wir

$$g_t(x) := (1 - t)f(x) + tTx$$

für $x \in B_\varepsilon(0)$ und $0 \leq t \leq 1$.

Da T invertierbar ist, existiert $c_0 > 0$ mit

$$|Tx| \geq c_0|x|,$$

und, da $Df(0) = T$, gilt

$$|g_t(x)| \geq |Tx| - |f(x) - Tx| \geq c_0|x| - o(|x|),$$

also

$$g_t \neq 0 \quad \text{auf } \overline{B_\delta(0)} - \{0\}$$

für $0 < \delta \ll \varepsilon$ klein. Damit folgt aus Proposition 7.3, daß

$$\text{ind}(f, 0) = \deg(f, B_\delta(0), 0) = \deg(T, B_\delta(0), 0) = \text{ind}(T, 0),$$

also (7.12).

Es verbleibt zu zeigen, daß

$$\text{ind}(T, 0) = \text{sgn } \det T. \quad (7.13)$$

Wir zerlegen

$$T = UP,$$

wobei U orthogonal und P positiv definit und symmetrisch ist. In einer geeigneten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ist P diagonal

$$P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \lambda_i > 0,$$

und mit der Homotopie

$$P_t := (1 - t)P + tI_n$$

können wir mit Proposition 7.3 o.B.d.A. $P = I_n$ annehmen, also $T = U$ orthogonal.

In einer geeigneten Orthonormalbasis hat T die blockdiagonale Darstellung

$$T = \text{diag}(D_{\varphi_1}, \dots, D_{\varphi_k}, I_l, -I_m),$$

wobei

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

eine zweidimensionale Drehung um den Winkel φ ist. Weiter gilt

$$2k + l + m = n,$$

$$m \in \{0, 1\}$$

und

$$\det T = (-1)^m.$$

Mit der Homotopie

$$T_t = \text{diag}(D_{t\varphi_1}, \dots, D_{t\varphi_k}, I_l, -I_m),$$

reduziert sich (7.13) schließlich auf die Fälle

$$T = I_n$$

und

$$T = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $T = I_n$ folgt aus (7.1), daß

$$\text{ind}(I_n, 0) = \text{deg}(I_n, B_1(0), 0) = 1,$$

also (7.13).

Im zweiten Fall schreiben wir $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und betrachten

$$\Omega_1 := \{(y, s) \mid |y| < 1, -1 < s < 1\},$$

$$\Omega_2 := \{(y, s) \mid |y| < 1, 1 < s < 3\},$$

$$\Omega := \{(y, s) \mid |y| < 1, -1 < s < 3\}.$$

Wir setzen

$$g(y, s) := (y, -1 + |s - 1|)$$

und

$$h(y, s) := (y, s - 2),$$

also

$$g = T \quad \text{auf } \Omega_1$$

und

$$g = h \quad \text{auf } \Omega_2.$$

Mit Proposition 7.1 folgt

$$\text{deg}(g, \Omega, 0) = \text{deg}(T, \Omega_1, 0) + \text{deg}(h, \Omega_2, 0) = \text{ind}(T, 0) + \text{deg}(h, \Omega, 0). \quad (7.14)$$

Nun ergibt die Homotopie

$$\Phi(x, t) := (1 - t)g(x) + t(y, 1)$$

mit Proposition 7.3, daß

$$\text{deg}(g, \Omega, 0) = \text{deg}((y, s) \mapsto (y, 1), \Omega, 0) = 0, \quad (7.15)$$

mit Proposition 7.2, da $(y, 1) \neq 0$.

Weiter ergibt die Homotopie

$$\Psi(x, t) := h(x) + 2te_n$$

mit Proposition 7.3, daß

$$\text{deg}(h, \Omega, 0) = \text{deg}(\text{id}, \Omega, 0) = \text{deg}(\text{id}, B_1(0), 0) = 1, \quad (7.16)$$

mit Proposition 7.1 und (7.1).

Schließlich folgt (7.13) aus (7.14), (7.15) und (7.16).

//

(iii) (7.11) folgt sofort aus (7.9) und (7.10).

///

Kombinieren wir Proposition 7.4 (iii) mit dem Satz von Sard, so erhalten wir bereits die Eindeutigkeit des Abbildungsgrades.

Proposition 7.5 *Es gibt höchstens einen Abbildungsgrad, und dieser ist ganzzahlig.*

Beweis:

Es sei (f, Ω, y) wie in Definition 7.1. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(x) - y| \geq \varepsilon \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

Es existiert $\tilde{g} \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - \tilde{g}\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon/2.$$

Weiter existiert mit dem Satz von Sard, siehe Satz A.1, ein regulärer Wert $\tilde{y}$ von $\tilde{g}$ mit

$$|y - \tilde{y}| < \varepsilon/2.$$

Wir setzen $g := \tilde{g} - \tilde{y} + y$ und sehen

$$g \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n),$$

$$\|f - g\|_{C^0(\overline{\Omega})} < \varepsilon,$$

y ist ein regulärer Wert von g .

Mit Proposition 7.3 ergibt die Homotopie

$$\Phi(x, t) := (1 - t)f(x) + tg(x),$$

daß für jeden Abbildungsgrad

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y),$$

also mit Proposition 7.4 (iii)

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \det Dg(x) \in \mathbb{Z}.$$

Also ist der Abbildungsgrad ganzzahlig, und es gibt höchstens einen.

///

Zum Beweis der Existenz des Abbildungsgrades schreiben wir (7.11) in Integralform.

Proposition 7.6 *Für $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, y ein regulärer Wert von f , $\varphi \in C_0^0(B_1(0))$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ und $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ gilt*

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} \det Df(x) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) \det Df(x) \, dx, \quad (7.17)$$

falls $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(f, y)$.

Beweis:

Da $y \notin f(\partial\Omega)$ ein regulärer Wert von f ist, gilt

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \Omega$$

und

$$Df(x_i) \text{ ist invertierbar.}$$

Für ε klein genug, existieren offene, paarweise disjunkte Umgebungen $U(x_i)$ der x_i , so daß

$$f|_{U(x_i)} : U(x_i) \xrightarrow{\approx} B_\varepsilon(y)$$

ein C^1 -Diffeomorphismus ist, und

$$f(\overline{\Omega} - \cup_{i=1}^m U(x_i)) \subseteq \mathbb{R}^n - B_\varepsilon(y).$$

Dann gilt mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) \det Df(x) \, dx &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} \det Df(x_i) \int_{U(x_i)} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) |\det Df(x)| \, dx = \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} \det Df(x_i) \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} \det Df(x_i). \end{aligned}$$

///

Wir verallgemeinern dies zur Gebietsintegralformel von Heinz.

Lemma 7.7 (Gebietsintegralformel von Heinz) *Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ und U die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, in der y liegt.*

Dann gilt für jede C^0 - n -Differentialform ω mit

$$\operatorname{spt} \omega \subset\subset U, \quad \int \omega = 1, \tag{7.18}$$

daß

$$\deg(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} f^\# \omega. \tag{7.19}$$

Beweis:

Zuerst wählen wir eine offene, zusammenhängende Menge V mit

$$\{y\}, \operatorname{spt} \omega \subseteq V \subset\subset U.$$

Dazu betrachten wir die kompakte Menge

$$K := \{y\} \cup \operatorname{spt} \omega \subseteq U.$$

Dann existiert eine endliche Überdeckung

$$K \subseteq \cup_{i=1}^m B_{\varrho_i}(x_i) \subset\subset U.$$

Da U zusammenhängend ist, existiert für $i = 2, \dots, m$ jeweils eine Folge von Bällen $B_{i,j} \subset\subset U, j = 0, \dots, m_i$, mit

$$B_{i,0} = B_{\varrho_{i-1}}(x_{i-1}) \quad , \quad B_{i,m_i} = B_{\varrho_i}(x_i)$$

und

$$B_{i,j-1} \cap B_{i,j} \neq \emptyset \quad j = 1, \dots, m_i.$$

Fügt man diese Bälle o.B.d.A. den $B_{\varrho_i}(x_i)$ hinzu, so gilt o.B.d.A.

$$B_{\varrho_{i-1}}(x_{i-1}) \cap B_{\varrho_i}(x_i) \neq \emptyset$$

und

$$V := \cup_{i=1}^m B_{\varrho_i}(x_i) \subset\subset U$$

ist zusammenhängend und enthält K .

Nun wählen wir $f_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\omega_k \in C_0^\infty(V, \Lambda^n \mathbb{R}^n)$, $\int \omega_k = 1$ und $y_k \in V$ mit

$$\begin{aligned} f_k &\rightarrow f \quad \text{in } C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), \\ \omega_k &\rightarrow \omega \quad \text{in } C_0^0(V, \Lambda^n \mathbb{R}^n), \\ y_k &\text{ ein regulärer Wert von } f_k, \\ y_k &\rightarrow y. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_{\Omega} f^\# \omega \leftarrow \int_{\Omega} f_k^\# \omega_k,$$

und mit Proposition 7.3 gilt für große k , daß

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f_k, \Omega, y_k).$$

Da $V \subset\subset U \subseteq \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, gilt weiter für großes k , daß

$$V \subseteq \mathbb{R}^n - f_k(\partial\Omega),$$

und somit ist $\text{spt } \omega_k \subseteq V$ in der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n - f_k(\partial\Omega)$, in der $y_k \in V$ liegt, enthalten.

Also können wir f und ω als glatt annehmen und weiter, daß y ein regulärer Wert von f ist.

Nun folgt aus (7.11) und Proposition 7.6 für $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$, daß die glatte Differentialform

$$\omega = \varphi_\varepsilon(\cdot - y) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

(7.18) und (7.19) erfüllt.

Andererseits zeigt das nächste Lemma, daß für glattes f und ω die rechte Seite von (7.19) unabhängig von ω ist, das (7.18) erfüllt. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.

///

Lemma 7.8 *Es sei $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, und $U \subseteq \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ offen und zusammenhängend.*

Dann ist für jede $C^\infty - n$ -Differentialform ω mit

$$\text{spt } \omega \subset \subset U, \quad \int \omega = 1,$$

das Integral

$$\int_{\Omega} f^\# \omega \in \mathbb{Z}$$

ganzzahlig und unabhängig von ω .

Beweis:

Nach Proposition 7.6 ist das Integral für $B_\varepsilon(y) \subseteq U$ und

$$\omega = \varphi_\varepsilon(\cdot - y) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

ganzzahlig, und es verbleibt die Unabhängigkeit von ω zu zeigen. Dazu müssen wir zeigen, daß

$$\int_{\Omega} f^\# \omega = 0$$

für

$$\text{spt } \omega \subset \subset U, \quad \int \omega = 0.$$

Schreiben wir

$$\omega = \varphi \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

mit $\varphi \in C_0^\infty(U)$, $\int \varphi = 0$, so folgt aus dem nächsten Lemma, daß $\psi \in C_0^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\text{div } \psi = \varphi$$

existiert. Setzen wir

$$\sigma := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \psi_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n,$$

so folgt

$$d\sigma = \omega.$$

Dann ist

$$\text{spt } d(f^\# \sigma) \subseteq \text{spt } f^\# \sigma \subseteq f^{-1}(\text{spt } \sigma) \subseteq \Omega$$

kompakt und mit dem Satz von Stokes

$$\int_{\Omega} f^\# \omega = \int_{\Omega} f^\# (d\sigma) = \int_{\Omega} d(f^\# \sigma) = 0.$$

///

Bemerkung:

Alternativ kann am Ende des obigen Beweises für das Vektorfeld

$$\Psi_j := \sum_{i=1}^n (\psi_i \circ f) \operatorname{Cof}(Df)_{ij} \in C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}),$$

wobei Cof die Kofaktormatrix bezeichnet, die Identität

$$\operatorname{div} \Psi = (\varphi \circ f) \det Df$$

bestätigt und verwendet werden.

□

Lemma 7.9 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $\varphi \in C_0^\infty(U)$ mit*

$$\int \varphi = 0.$$

Dann existiert $\psi \in C_0^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\operatorname{div} \psi = \varphi.$$

□

Beweis: Zuerst reduzieren wir das Lemma auf den Fall, wenn $\operatorname{spt} \varphi$ in einem kleinen Ball enthalten ist. Es sei o.B.d.A. $0 \in U$. Weiter sei für $\operatorname{spt} \varphi \subset\subset V \subset\subset U$, V offen und ϱ beliebig klein

$$\operatorname{spt} \varphi \subseteq \cup_{i=1}^m B_{\varrho}(x_i) \subset\subset V,$$

$$\gamma_i : [0, 1] \rightarrow U \text{ glatt,}$$

$$\gamma_i(0) = 0, \quad \gamma_i(1) = x_i,$$

$$B_{\varrho}(\gamma_i(t)) \subset\subset V \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1,$$

und

$$\eta_i \in C_0^\infty(B_{\varrho}(x_i)),$$

$$0 \leq \eta_i \leq 1,$$

$$\sum_{i=1}^m \eta_i = 1 \quad \text{auf } \operatorname{spt} \varphi$$

eine Partition der Eins auf $\operatorname{spt} \varphi$.

Wir setzen

$$\varphi_t(x) := \sum_{i=1}^m (\eta_i \varphi)(x + x_i - \gamma_i(t)).$$

Es gilt $\varphi_1 = \varphi$ und

$$\operatorname{spt} \varphi_t \subseteq \cup_{i=1}^m B_{\varrho}(\gamma_i(t)) \subset\subset V,$$

insbesondere

$$\operatorname{spt} \varphi_0 \subseteq B_{\varrho}(0).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi_t &= \sum_{i=1}^m \nabla(\eta_i \varphi)(x + x_i - \gamma_i(t)) \gamma_i'(t) = \\ &= \operatorname{div}_x \left(- \sum_{i=1}^m (\eta_i \varphi)(x + x_i - \gamma_i(t)) \gamma_i'(t) \right) = \operatorname{div} \psi_t,\end{aligned}$$

wobei

$$\psi_t(x) := - \sum_{i=1}^m (\eta_i \varphi)(x + x_i - \gamma_i(t)) \gamma_i'(t),$$

insbesondere $\operatorname{spt} \psi_t \subset \subset V$. Daraus folgt

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \operatorname{div} \left(\int_0^1 \psi_t \right)$$

mit $\operatorname{spt} \int_0^1 \psi_t \subset \subset U$, insbesondere

$$\int \varphi_0 = 0,$$

und es genügt die Behauptung für φ_0 zu zeigen. Da

$$\operatorname{spt} \varphi_0 \subseteq B_\varrho(0) \subset \subset U,$$

genügt es den Fall

$$U =]-1, 1[^n$$

zu betrachten.

Dies beweisen wir per Induktion nach n . Für $n = 1$ setzen wir

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^x \varphi$$

und erhalten $\psi \in C_0^\infty(]-1, 1[)$ und $\psi' = \varphi$.

Für $n \geq 2$ schreiben wir $x = (y, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\tilde{\varphi}(y) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, t) \, dt.$$

Es gilt $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(]-1, 1[^{n-1})$ und $\int \tilde{\varphi} = 0$. Damit folgt durch Induktion, daß $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(]-1, 1[^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1})$ existiert mit

$$\operatorname{div} \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}.$$

Wir wählen $\chi \in C_0^\infty(]-1, 1[)$ mit $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$ und setzen

$$\lambda(y, t) := \int_{-\infty}^t (\varphi(y, s) - \tilde{\varphi}(y) \chi(s)) \, ds.$$

Gemäß der Definition von $\tilde{\varphi}$ und $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$ folgt $\lambda \in C_0^\infty([-1, 1]^n)$ und weiter gilt

$$\partial_t \lambda(y, t) = \varphi(y, t) - \tilde{\varphi}(y) \chi(t).$$

Schließlich setzen wir

$$\psi(y, t) := (\tilde{\psi}(y) \chi(t), \lambda(y, t))$$

und sehen

$$\operatorname{div} \psi = \chi \operatorname{div} \tilde{\psi} + \partial_t \lambda = \chi \tilde{\varphi} + \varphi - \tilde{\varphi} \chi = \varphi.$$

///

Wir verwenden die Gebietsintegralformel von Heinz zur Definition des Abbildungsgrades und zeigen damit die Existenz des Abbildungsgrades.

Definition 7.2 Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ definieren wir

$$\deg(f, \Omega, y) := \int_{\Omega} f^\# \omega, \quad (7.20)$$

wobei ω eine C^∞ - n -Differentialform mit $\int \omega = 1$ und Träger in der Zusammenhangskomponente U von $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, in der y liegt.

Für $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ definieren wir

$$\deg(f, \Omega, y) := \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f_k, \Omega, y) \quad (7.21)$$

für eine Folge $f_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $y \in \mathbb{R}^n - f_k(\partial\Omega)$ und

$$\|f_k - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0.$$

□

Zunächst bemerken wir, daß $\deg$ für glattes f mit Lemma 7.8 durch (7.20) wohldefiniert ist. Der nächste Satz besagt, daß durch (7.21) der Abbildungsgrad definiert ist.

Satz 7.1 Die Funktion $\deg$ aus Definition 7.2 ist wohldefiniert und erfüllt die Axiome von Definition 7.1. Damit ist $\deg$ der gemäß Proposition 7.5 eindeutige Abbildungsgrad.

□

Zum Beweis dieses Satzes ist folgendes Lemma fundamental.

Lemma 7.10 Für $f_0, f_1 \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f_0 - f_1\|_{C^0(\partial\Omega)} < d(y, f_1(\partial\Omega)) \quad (7.22)$$

gilt

$$\deg(f_0, \Omega, y) = \deg(f_1, \Omega, y), \quad (7.23)$$

wobei $\deg$ aus Definition 7.2 (7.20) ist.

Beweis:

Wir setzen

$$f_t := (1 - t)f_0 + tf_1 \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n).$$

Aus (7.22) folgt für $x \in \partial\Omega$, daß

$$|f_t(x) - y| \geq |f_1(x) - y| - |f_1(x) - f_0(x)| \geq d(y, f_1(\partial\Omega)) - \|f_0 - f_1\|_{C^0(\partial\Omega)} =: \varepsilon > 0.$$

Damit ist die offene, zusammenhängende Menge $B_\varepsilon(y)$ in allen $\mathbb{R}^n - f_t(\partial\Omega)$ enthalten. Wir wählen $\omega \in C_0^\infty(B_\varepsilon(y), \Lambda^n \mathbb{R}^n)$ mit $\int \omega = 1$ und erhalten mit (7.20)

$$\deg(f_t, \Omega, y) = \int_{\Omega} f_t^\# \omega.$$

Dies ändert sich stetig in $t \in [0, 1]$ und ist ganzzahlig nach Lemma 7.8, also konstant. Dies ergibt (7.23).

///

Beweis von Satz 7.1: Zuerst zeigen wir, daß $\deg$ aus Definition 7.2 wohldefiniert ist. Für $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ existiert $f_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f_k - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0.$$

Für $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ folgt

$$d(y, f_k(\partial\Omega)) \rightarrow d(y, f(\partial\Omega)) > 0,$$

insbesondere $y \in \mathbb{R}^n - f_k(\partial\Omega)$ für große k . Weiter gilt für große k, l , daß

$$\|f_k - f_l\|_{C^0(\partial\Omega)} < d(y, f_k(\partial\Omega)).$$

Somit ist $\deg(f_k, \Omega, y)$ konstant für große k , insbesondere konvergent. Damit existiert der Limes in (7.21).

Weiter ist der Limes eindeutig, denn sei $f'_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f'_k - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0,$$

so betrachten wir die gemischte Folge

$$g_k := \begin{cases} f_{k/2} & k \text{ gerade,} \\ f'_{(k-1)/2} & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daraus folgt $\|g_k - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0$ und der Limes $\lim_{k \rightarrow \infty} \deg(g_k, \Omega, y)$ existiert wie oben gezeigt. Dies ergibt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f_k, \Omega, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(g_k, \Omega, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f'_k, \Omega, y),$$

also die Eindeutigkeit des Limes in (7.21), und $\deg$ ist wohldefiniert.

Für $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ kann die konstante Folge $f_k := f$ gewählt werden, und somit ist $\deg$ in (7.21) eine Erweiterung von (7.20).

Schließlich verifizieren wir die Axiome aus Definition 7.1.

(i) Für $\omega = \varphi \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$, $\int \varphi = 1$, folgt mit (7.20), daß

$$\deg(id, B_1(0), 0) = \int_{B_1(0)} id^\# \omega = 1,$$

also (7.1).

//

(ii) Es sei $\emptyset \neq \Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ und

$$y \in \mathbb{R}^n - f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)) \subseteq \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega), \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega_i). \quad (7.24)$$

Zuerst sei $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. V bzw. U, U_i seien die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n - f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ bzw. $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega_i)$ in der y liegt.

Es gilt

$$V \subseteq U, U_1, U_2.$$

Wir wählen $\omega \in C_0^\infty(V, \Lambda^n \mathbb{R}^n)$ mit $\int \omega = 1$. Da

$$f^\# \omega = 0 \quad \text{auf } \overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

folgt mit (7.20), daß

$$\deg(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} f^\# \omega = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f^\# \omega = \sum_{i=1}^2 \deg(f, \Omega_i, y),$$

also (7.2).

Nun sei $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $f_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0$. Aus (7.24) folgt für großes k , daß

$$y \in \mathbb{R}^n - f_k(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

Dies ergibt mit (7.21), daß

$$\deg(f, \Omega, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f_k, \Omega, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \deg(f_k, \Omega_i, y) = \sum_{i=1}^2 \deg(f, \Omega_i, y),$$

also (7.2).

//

(iii) Nun sei $f, g \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$f = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega) = \mathbb{R}^n - g(\partial\Omega)$. Wir wählen $f_k, g_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f_k - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0, \quad \|g_k - g\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|f_k - g_k\|_{C^0(\partial\Omega)} &\rightarrow \|f - g\|_{C^0(\partial\Omega)} = 0, \\ d(y, f_k(\partial\Omega)) &\rightarrow d(y, f(\partial\Omega)) > 0, \end{aligned}$$

also für große k , daß

$$\|f_k - g_k\|_{C^0(\partial\Omega)} < d(y, f_k(\partial\Omega)).$$

Dann folgt mit dem Lemma 7.10, daß

$$\deg(f_k, \Omega, y) = \deg(g_k, \Omega, y)$$

und mit (7.21)

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y)$$

also (7.3).

//

(iv) Da für glattes f, ω die Identität

$$f^\# \omega = (f - y)^\# \omega(\cdot + y)$$

und

$$\text{spt } \omega(\cdot + y) = (\text{spt } \omega) - y$$

gilt, folgt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0).$$

Mit (7.21) überträgt sich dies auf nicht glattes f .

///

8 Fixpunktsätze

In diesem Paragraphen werden die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder und einige Varianten bewiesen.

Lemma 8.1 *Es sei $f \in C^0(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R}^n)$ mit*

$$\langle f(x), x \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \partial B_1(0).$$

Dann hat f eine Nullstelle.

Beweis:

Angenommen, f habe keine Nullstelle. Wir definieren

$$f_t(x) := (1-t)f(x) + tx$$

und sehen für $x \in \partial B_1(0)$, daß

$$\langle f_t(x), x \rangle = (1-t)\langle f(x), x \rangle + t|x|^2 \geq t.$$

Insbesondere

$$f_t \neq 0 \quad \text{auf } \partial B_1(0)$$

für $0 < t \leq 1$, und nach Annahme an f gilt dies auch für $t = 0$.

Aus Proposition 7.3 und (7.1) folgt

$$\deg(f, B_1(0), 0) = \deg(id, B_1(0), 0) = 1,$$

und schließlich mit Proposition 7.2

$$0 \in f(B_1(0)),$$

und f hat eine Nullstelle.

///

Eine einfache Konsequenz ist, daß $\partial B_1(0)$ kein Retrakt von $\overline{B_1(0)}$ ist. Genauer gilt:

Proposition 8.2 *Es gibt keine stetige Abbildung*

$$f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \partial B_1(0)$$

mit

$$f|_{\partial B_1(0)} = id_{\partial B_1(0)}.$$

□

Damit können wir den Fixpunktsatz von Brouwer beweisen.

Satz 8.1 (Fixpunktsatz von Brouwer)

Jede stetige Selbstabbildung

$$f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$$

hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:

Wir betrachten $g : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$g(x) := x - f(x).$$

Für $x \in \partial B_1(0)$ gilt

$$\langle g(x), x \rangle = |x|^2 - \langle f(x), x \rangle \geq 1 - |f(x)| \geq 0.$$

Also hat g mit Lemma 8.1 eine Nullstelle und somit f einen Fixpunkt.

///

Korollar 8.2 *Es sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe, kompakte Teilmenge und f eine stetige Selbstabbildung*

$$f : K \rightarrow K.$$

Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:

Wir betrachten die stetige Projektion

$$P : \mathbb{R}^n \rightarrow K,$$

die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den eindeutig nächsten Punkt in K zuordnet, d.h.

$$|x - P(x)| = d(x, K) \quad , \quad P(x) \in K.$$

Wir wählen $R > 0$ mit $K \subseteq B_R(0)$ und definieren

$$g := f \circ P : \overline{B_R(0)} \rightarrow K \subseteq \overline{B_R(0)}.$$

Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer, Satz 8.1, hat g einen Fixpunkt $x \in \overline{B_R(0)}$, d.h.

$$x = g(x) = f(P(x)) \in K.$$

Dies ergibt

$$P(x) = x$$

und somit

$$f(x) = x,$$

also ein Fixpunkt von f .

///

Die Verallgemeinerung für Banachräume ist der Fixpunktsatz von Schauder.

Satz 8.3 (Fixpunktsatz von Schauder)

X sei ein Banachraum, $\emptyset \neq C \subseteq X$ abgeschlossen und konvex. Weiter sei f eine stetige Selbstabbildung

$$f : C \rightarrow C$$

und

$$f(C) \text{ ist relativ kompakt.}$$

Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist

$$K := \overline{f(C)} \subseteq C$$

kompakt. Für $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Überdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)$$

mit $x_i \in C$. Wir definieren $\varphi_\varepsilon^i : K \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\varphi_\varepsilon^i(x) := \frac{d(x, X - B_\varepsilon(x_i))}{\sum_{j=1}^m d(x, X - B_\varepsilon(x_j))}.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^m \varphi_\varepsilon^i = 1 \quad \text{auf } K.$$

Wir definieren

$$P_\varepsilon : K \rightarrow C_\varepsilon := \text{convex}\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq C$$

durch

$$P_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^m \varphi_\varepsilon^i(x) x_i.$$

Für $x \in K$ gilt

$$\|P_\varepsilon(x) - x\| \leq \sum_{i=1}^m \varphi_\varepsilon^i(x) \|x_i - x\| \leq \varepsilon, \quad (8.1)$$

da $\varphi_\varepsilon^i(x) = 0$ für $\|x_i - x\| \geq \varepsilon$.

Nun betrachten wir

$$f_\varepsilon := P_\varepsilon \circ f|_{C_\varepsilon} : C_\varepsilon \rightarrow C_\varepsilon.$$

Da $\emptyset \neq C_\varepsilon \subseteq \text{span}(\{x_1, \dots, x_m\})$ konvex und kompakt ist, hat f_ε nach Korollar 8.2 mindestens einen Fixpunkt $x_\varepsilon \in C_\varepsilon$, d.h.

$$P_\varepsilon(f(x_\varepsilon)) = x_\varepsilon.$$

Da $f(x_\varepsilon) \in K$, existiert eine Teilfolge $\varepsilon_i \downarrow 0$ mit

$$f(x_{\varepsilon_i}) \rightarrow \bar{x} \in K \subseteq C.$$

Aus (8.1) folgt

$$\|f(x_{\varepsilon_i}) - x_{\varepsilon_i}\| = \|f(x_{\varepsilon_i}) - P_{\varepsilon_i}(f(x_{\varepsilon_i}))\| \leq \varepsilon_i,$$

also

$$x_{\varepsilon_i} \rightarrow \bar{x},$$

und, da f stetig ist,

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

///

Korollar 8.4 X sei ein Banachraum, und

$$\begin{aligned} f : \overline{B_1(0)} &\rightarrow X \text{ ist stetig,} \\ f(\overline{B_1(0)}) &\text{ ist relativ kompakt,} \\ f(\partial B_1(0)) &\subseteq \overline{B_1(0)}. \end{aligned}$$

Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:

Es sei $g : \overline{B_1(0)} \rightarrow X$ mit

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } \|f(x)\| \leq 1, \\ \frac{f(x)}{\|f(x)\|} & \text{für } \|f(x)\| \geq 1. \end{cases}$$

g ist eine stetige Selbstabbildung

$$g : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$$

und $g(\overline{B_1(0)})$ ist relativ kompakt, da $f(\overline{B_1(0)})$ relativ kompakt ist.

Nach dem Fixpunktsatz von Schauder, Satz 8.3, hat g einen Fixpunkt $x \in \overline{B_1(0)}$, d.h.

$$g(x) = x.$$

Falls $\|f(x)\| \leq 1$, so folgt

$$x = g(x) = f(x),$$

und x ist ein Fixpunkt von f .

Falls $\|f(x)\| > 1$, so folgt

$$\|x\| = \|g(x)\| = \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\| = 1,$$

also $x \in \partial B_1(0)$ und nach Annahme

$$f(x) \in \overline{B_1(0)},$$

im Widerspruch zu $\|f(x)\| > 1$.

///

Die folgende Verallgemeinerung kann als nichtlineare Version der Kontinuitätsmethode angesehen werden.

Satz 8.5 (Fixpunktsatz von Leray - Schauder)

X sei ein Banachraum, und

$$f : X \times [0, 1] \rightarrow X, \quad f_t(x) = f(x, t)$$

eine kompakte Abbildung mit

$$f_0 = 0.$$

Weiter existiere $\Lambda < \infty$, so daß

$$f(x, t) = x \implies \|x\| < \Lambda. \quad (8.2)$$

Dann hat f_1 mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:

Wir können $\Lambda = 1$ annehmen und definieren für $0 < \varepsilon < 1$ die Abbildung $g_\varepsilon : \overline{B_1(0)} \rightarrow X$ durch

$$g_\varepsilon(x) := \begin{cases} f\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{1-\|x\|}{\varepsilon}\right) & \text{für } 1-\varepsilon \leq \|x\| \leq 1, \\ f\left(\frac{x}{1-\varepsilon}, 1\right) & \text{für } \|x\| \leq 1-\varepsilon. \end{cases}$$

g_ε ist stetig, $g(\overline{B_1(0)})$ ist relativ kompakt, da f eine kompakte Abbildung ist, und für $x \in \partial B_1(0)$ gilt

$$g_\varepsilon(x) = f(x, 0) = 0,$$

also

$$g_\varepsilon(\partial B_1(0)) \subseteq B_1(0).$$

Mit Korollar 8.4 hat g_ε einen Fixpunkt $x_\varepsilon \in \overline{B_1(0)}$, d.h.

$$g_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Setzen wir

$$(y_\varepsilon, t_\varepsilon) := \begin{cases} \left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}, \frac{1-\|x_\varepsilon\|}{\varepsilon}\right) & \text{falls } 1-\varepsilon \leq \|x_\varepsilon\| \leq 1, \\ \left(\frac{x_\varepsilon}{1-\varepsilon}, 1\right) & \text{falls } \|x_\varepsilon\| \leq 1-\varepsilon, \end{cases}$$

so gilt

$$f(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Insbesondere gilt $x_\varepsilon = \|x_\varepsilon\| y_\varepsilon$ oder $x_\varepsilon = (1-\varepsilon)y_\varepsilon$, und in jedem Fall

$$\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| = \left| \|x_\varepsilon\| - \|y_\varepsilon\| \right| \leq \varepsilon \|y_\varepsilon\| \leq \varepsilon. \quad (8.3)$$

Da f kompakt ist, können wir eine Teilfolge $\varepsilon_i \downarrow 0$ wählen mit

$$(x_{\varepsilon_i}, t_{\varepsilon_i}) \rightarrow (x, t).$$

Mit (8.3) folgt $(y_{\varepsilon_i}, t_{\varepsilon_i}) \rightarrow (x, t)$ und $f(x, t) = x$, da f stetig ist.

Daraus folgt mit (8.2), daß

$$\|x\| < 1.$$

und

$$\|x_{\varepsilon_i}\| \rightarrow \|x\| < 1 \leftarrow 1 - \varepsilon_i,$$

also

$$\|x_{\varepsilon_i}\| < 1 - \varepsilon_i$$

für großes i . Dies ergibt $t_{\varepsilon_i} = 1 = t$ und

$$f_1(x) = x,$$

also ist x ein Fixpunkt von f_1 .

///

Beispiel 8.1 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform II)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand und $a_{ij}, b \in C_{loc}^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $i, j = 1, \dots, n$, $0 < \alpha < 1$, mit

$$a_{ij}(x, z, w)\xi_i\xi_j > 0$$

für $(x, z, w) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Weiter nehmen wir an, daß $\beta > 0, \Lambda < \infty$ existieren, so daß jede Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ der quasilinearen elliptischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -a_{ij}(., u, \nabla u)\partial_{ij}u + tb(., u, \nabla u) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{8.4}$$

mit $t \in [0, 1]$ die apriori-Abschätzung

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\Omega)} < \Lambda \tag{8.5}$$

erfüllt.

Behauptung:

Dann existiert eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ von (8.4) für $t = 1$.

Beweis:

Für $v \in C^{1,\beta}(\Omega)$ gilt $a_{ij}(., v, \nabla v), b(., v, \nabla v) \in C^{0,\alpha\beta}(\Omega)$ und mit Beispiel 6.1 existiert eine eindeutige Lösung $u =: f(v) \in C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega)$ der linearen elliptischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -a_{ij}(., v, \nabla v)\partial_{ij}u + b(., v, \nabla v) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Weiter gilt die Abschätzung

$$\|v\|_{C^{1,\beta}(\Omega)} \leq M \Rightarrow \|u\|_{C^{2,\alpha\beta}(\Omega)} \leq C(M),$$

wobei $C(M)$ neben M von Ω, α, β und den Koeffizienten a_{ij}, b abhängt. Somit bildet $f : C^{1,\beta}(\Omega) \rightarrow C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\Omega)$ beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen ab.

Weiter ist f stetig, denn sei $v_k \rightarrow v$ stark in $C^{1,\beta}(\Omega)$, so konvergieren $a_{ij}(., v_k, \nabla v_k) \rightarrow a_{ij}(., v, \nabla v)$, $b(., v_k, \nabla v_k) \rightarrow b(., v, \nabla v)$ gleichmäßig auf Ω und $u_k := f(v_k)$ sind beschränkt in $C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega)$. Für eine Teilfolge können wir annehmen, daß $u_k \rightarrow u$ stark in $C^2(\overline{\Omega})$ und $u \in C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega)$. Dann ist u eine Lösung von (8.6), also $u = f(v)$ und somit $f(v_k) \rightarrow f(v)$ stark in $C^2(\overline{\Omega})$.

Damit ist f eine kompakte Abbildung. Wir setzen $f(v, t) := tf(v)$ für $t \in [0, 1]$ und sehen, daß auch $f(., .)$ kompakt ist.

Gilt $u = f(u, t) = tf(u)$, so ist $u \in C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega)$ eine Lösung von (8.4). Zuerst folgt $a_{ij}(., u, \nabla u), b(., u, \nabla u) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Dann folgt mit der Eindeutigkeit der Lösung der linearen Gleichung von Beispiel 6.1, daß $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, also mit (8.5), daß

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\Omega)} < \Lambda.$$

Dann folgt mit dem Fixpunktsatz von Leray-Schauder, Satz 8.5, daß f_1 einen Fixpunkt $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$ hat. Wie eben folgt dann $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, und u ist eine Lösung von (8.4) für $t = 1$.

///

In der Theorie der elliptischen Differentiagleichungen wird die apriori-Abschätzung (8.5) unter weiteren Voraussetzung an die Koeffizienten nach folgendem Schema bewiesen, siehe [GT] §11:

- (i) Abschätzung für $\|u\|_{C^0(\Omega)}$.
- (ii) Abschätzung für $\|\nabla u\|_{C^0(\partial\Omega)}$ durch $\|u\|_{C^0(\Omega)}$.
- (iii) Abschätzung für $\|\nabla u\|_{C^0(\Omega)}$ durch $\|u\|_{C^0(\Omega)}$ und $\|\nabla u\|_{C^0(\partial\Omega)}$.
- (iv) Abschätzung für $höl_{\Omega,\beta}\nabla u$ durch $\|u\|_{C^0(\Omega)}$ und $\|\nabla u\|_{C^0(\Omega)}$.

9 Variationsungleichungen

X sei ein Banachraum, $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Gradientenabbildung, z.B. $f = DF$ mit $F : U(M) \rightarrow \mathbb{R}$.

Nun sei $u \in M$ ein absolutes Minimum von F auf M , d.h.

$$F(u) \leq F(v) \quad \text{für alle } v \in M.$$

Daraus folgt

$$0 \leq \partial_{v-u} F(u) = \langle DF(u), v - u \rangle,$$

also

$$\langle f(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M. \quad (9.1)$$

(9.1) heißt Variationsungleichung. Für $u \in \text{int}(M)$ folgt $f(u) = 0$.

Wir betrachten hier Variationsungleichungen im Zusammenhang mit monotonen Operatoren.

Definition 9.1 X sei ein Banachraum und $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex. Eine Abbildung

$$A : M \rightarrow X^*$$

heißt *monotoner Operator*, falls

(i) A *hemistetig* ist, d.h.

$$t \mapsto \langle A((1-t)u + tv), w \rangle \text{ ist stetig für } u, v \in M, w \in X,$$

(ii) A *ist monoton*, d.h.

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } u, v \in M.$$

A heißt *strikt monoton*, falls

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle > 0 \quad \text{für alle } u \neq v \in M.$$

A heißt *stark monoton*, falls

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq \gamma(\|u - v\|) \|u - v\| \quad \text{für alle } u, v \in M,$$

wobei $\gamma(t) > 0$ für $t > 0$, $\gamma(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ und γ monoton nichtfallend ist.

□

Grundlegend für die Betrachtung von Variationsungleichungen für monotone Operatoren ist das folgende Lemma.

Lemma 9.1 (Minty-Lemma) X sei ein Banachraum, $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex und $A : M \rightarrow X^*$ sei ein monotoner Operator.

Dann sind für $u \in M, \Lambda \in X^*$ folgende Aussagen äquivalent.

(i)

$$\langle A(u) - \Lambda, u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M,$$

(ii)

$$\langle A(v) - \Lambda, u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Es gilt

$$\langle A(v) - \Lambda, u - v \rangle = \langle A(u) - \Lambda, u - v \rangle - \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \leq 0,$$

da A monoton ist.

//

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Für $v \in M$ sei $v_\varepsilon := (1 - \varepsilon)u + \varepsilon v = u + \varepsilon(v - u)$ für $\varepsilon > 0$ klein. Dann gilt

$$0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \langle u - v_\varepsilon, A(v_\varepsilon) - \Lambda \rangle = \langle u - v, A((1 - \varepsilon)u + \varepsilon v) - \Lambda \rangle \rightarrow \langle u - v, A(u) - \Lambda \rangle,$$

da A hemistetig ist.

///

Beispiel 9.1 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform III)

Wir betrachten die quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform aus Beispiel 2.2 und 4.2

$$\begin{aligned} -\partial_i(A_i(., u, \nabla u)) + B(., u, \nabla u) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{9.2}$$

mit den Bedingungen (2.1) und (2.2) und den Differentialoperator $f : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)^*$ mit

$$f(u).v := \int_{\Omega} (A(., u, \nabla u) \nabla v + B(., u, \nabla u) v).$$

Betrachten wir vereinfachend, daß $A_i(x, z, w) = A_i(x, w)$ und $B(x, z, w) = B(x)$, so gilt

$$\langle f(u) - f(v), u - v \rangle = \int_{\Omega} (A(., \nabla u) - A(., \nabla v)) (\nabla u - \nabla v) \geq c_0 \|u - v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p,$$

wobei wir (2.2) und die Poincaré-Ungleichung verwendet haben. Damit ist f stark monoton.

Im allgemeinen ist f aber nicht monoton.

□

Um mehr Anwendungen zu haben, betrachten wir Störungen von monotonen Operatoren. Wir kommen zum Hauptsatz dieses Paragraphen.

Satz 9.1 X sei ein reflexiver Banachraum, $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen, und $A : M \times M \rightarrow X^*$, $f : M \rightarrow X^*$ mit $f(u) = A(u, u)$ erfüllen folgende Bedingungen:

(i)

$$A(w, \cdot) \text{ ist ein monotoner Operator, für alle } w \in M, \quad (9.3)$$

(ii)

$$A(\cdot, u) \text{ ist schwach-stark-stetig auf beschränkten Mengen, für alle } u \in M, \quad (9.4)$$

d.h. auf beschränkten Mengen ist $A(\cdot, u)$ stetig von der schwachen Topologie auf X in die starke Topologie von X^* ,

(iii) f koerziv bezüglich eines Punktes $u_0 \in M$, genauer für $u_k \in M$ gilt

$$\|u_k\| \rightarrow \infty \implies \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle f(u_k), u_k - u_0 \rangle > 0, \quad (9.5)$$

(iv) f ist beschränkt auf endlich-dimensionalen Unterräumen, genauer für endlich-dimensionale Unterräume $j : Y \hookrightarrow X$ ist

$$j^* \circ f \circ j : M \cap Y \rightarrow Y^* \text{ eine beschränkte Abbildung.} \quad (9.6)$$

Dann hat die Variationsungleichung

$$\langle f(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M \quad (9.7)$$

eine Lösung.

Ist weiter $X = M$, so folgt (9.6) aus (9.3), (9.4).

□

Zuerst kann mit der Koerzitivitätsbedingung (9.5) die Lösung der Variationsungleichung (9.7) auf beschränktes M reduziert werden.

Proposition 9.2 X sei ein Banachraum und $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex, abgeschlossen und $f : M \rightarrow X^*$ erfülle (9.5).

Falls (9.7) für alle konvexen, abgeschlossenen und beschränkten $M' \subseteq M$ eine Lösung hat, so hat (9.7) auch eine Lösung auf M .

Beweis:

Mit (9.5) existiert $u_0 \in M, R > 0$, so daß

$$\langle f(u), u - u_0 \rangle > 0,$$

falls $\|u\| \geq R$. Es sei

$$M' := M \cap \overline{B_R(0)},$$

und gemäß Voraussetzung existiert $u \in M'$ mit

$$\langle f(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M'. \quad (9.8)$$

Sei weiter $R \geq \|u_0\|$, also $u_0 \in M'$, so folgt

$$\langle f(u), u - u_0 \rangle \leq 0,$$

also $\|u\| < R$. Daraus folgt für beliebiges $v \in M$, daß

$$v_\varepsilon := (1 - \varepsilon)u + \varepsilon v = u + \varepsilon(v - u) \in M',$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Wieder folgt mit (9.8), daß

$$0 \geq \langle f(u), u - v_\varepsilon \rangle = \varepsilon \langle f(u), u - v \rangle,$$

also löst u (9.7) auf M .

///

Wir approximieren den allgemeinen Fall in Satz (9.1) durch endlich-dimensionale Räume.

Proposition 9.3 (9.7) hat unter den Bedingungen von Satz 9.1 eine Lösung, wenn zusätzlich $\dim X < \infty$.

Beweis:

Mit Proposition 9.2 können wir $M \subseteq B_R(0)$ als beschränkt annehmen. Falls $M \neq \emptyset$ einpunktig ist, so ist (9.7) trivial. Also habe M mindestens zwei Punkte, und wir nehmen o.B.d.A. $M \subseteq X = \mathbb{R}^n$ mit $\text{int}(M) \neq \emptyset$ an. Wir identifizieren $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ und betrachten $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n, A : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Für $\delta > 0$ ist

$$M_\delta := M - U_\delta(\partial M)$$

konvex, abgeschlossen und nichtleer, falls δ klein.

Behauptung:

$f|_{M_\delta}$ ist stetig.

Beweis:

Dazu sei $u_k, u \in M_\delta$ mit $u_k \rightarrow u$. Mit (9.4) folgt für $v \in M$, daß $A(u_k, v) \rightarrow A(u, v)$. Weiter ist $f(u_k)$ mit (9.6) beschränkt, also $A(u_{k_l}, u_{k_l}) = f(u_{k_l}) \rightarrow \Lambda \in \mathbb{R}^n$ für eine Teilfolge. Daraus folgt mit (9.3), daß

$$\langle A(u, v) - \Lambda, u - v \rangle \leftarrow \langle A(u_{k_l}, v) - A(u_{k_l}, u_{k_l}), u_{k_l} - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Mit dem Minty-Lemma 9.1 angewandt auf $A(u, \cdot)$ folgt

$$\langle A(u, u) - \Lambda, u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Da $u \in M_\delta \subseteq \text{int}(M)$, folgt $f(u) = A(u, u) = \Lambda$, und damit

$$f(u_k) \rightarrow f(u).$$

//

Nun sei

$$h_\delta := P_{M_\delta} \circ (id - f)|_{M_\delta} : M_\delta \rightarrow M_\delta,$$

wobei $P_{M_\delta} : \mathbb{R}^n \rightarrow M_\delta$ die orthogonale Projektion auf die konvexe, kompakte Menge M_δ ist.

Mit dem Fixpunktsatz von Brouwer, Korollar 8.2, hat h_δ mindestens einen Fixpunkt $u_\delta \in M_\delta$. Dann gilt für $w_\delta := u_\delta - f(u_\delta)$, daß $P_{M_\delta}(w_\delta) = u_\delta$ und mit der Definition von P_{M_δ} , daß

$$0 \geq \langle u_\delta - w_\delta, u_\delta - v \rangle = \langle f(u_\delta), u_\delta - v \rangle \quad \text{für alle } v \in M_\delta, \quad (9.9)$$

also löst u_δ (9.7) auf M_δ .

Da $u_\delta \in M$ und M beschränkt ist, folgt mit (9.6) für eine Teilfolge $\delta_k \rightarrow 0$, daß

$$u_{\delta_k} \rightarrow u \in M, \quad A(u_{\delta_k}, u_{\delta_k}) = f(u_{\delta_k}) \rightarrow \Lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt für $v \in M$ mit (9.4), daß

$$A(u_{\delta_k}, v) \rightarrow A(u, v),$$

und mit (9.3), daß

$$\langle A(u, v) - \Lambda, u - v \rangle \leftarrow \langle A(u_{\delta_k}, v) - A(u_{\delta_k}, u_{\delta_k}), u_{\delta_k} - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Mit dem Minty-Lemma 9.1 angewandt auf $A(u, \cdot)$ erhalten wir

$$\langle A(u, u) - \Lambda, u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Für $v \in \text{int}(M) = \cup_{k \in \mathbb{N}} M_{\delta_k}$ folgt mit (9.9)

$$\langle \Lambda, u - v \rangle \leftarrow \langle f(u_{\delta_k}), u_{\delta_k} - v \rangle \leq 0$$

und

$$\langle f(u), u - v \rangle = \langle A(u, u) - \Lambda, u - v \rangle + \langle \Lambda, u - v \rangle \leq 0.$$

Da $M = \overline{\text{int}(M)}$, erhalten wir (9.7).

///

Beweis von Satz 9.1:

Mit Proposition 9.2 können wir $M \subseteq B_R(0)$ als beschränkt annehmen.

Für $v \in M$ definieren wir

$$S(v) := \{u \in M \mid \langle A(u, v), u - v \rangle \leq 0\}.$$

Behauptung:

$S(v)$ ist schwach kompakt.

Beweis:

Da $S(v) \subseteq M$ beschränkt und X reflexiv ist, genügt es nach dem Satz von Banach-Alaoglu zu zeigen, daß $S(v)$ schwach abgeschlossen ist. Da M konvex und abgeschlossen ist, ist M auch schwach abgeschlossen, siehe [Ru] Theorem 3.12, und es genügt zu zeigen, dass $S(v)$ in M schwach abgeschlossen ist.

Dazu sei $u \in M - S(v)$, also $\langle A(u, v), u - v \rangle =: \mu > 0$. Wegen (9.4) gibt es eine schwache Umgebung U von u , so daß für alle $w \in U \cap M$ gilt

$$|\langle A(u, v), u - w \rangle| < \frac{\mu}{2}, \quad \|A(w, v) - A(u, v)\| < \frac{\mu}{4R}.$$

Daraus folgt für $w \in U \cap M$, daß

$$\begin{aligned} & \langle A(w, v), w - v \rangle = \\ &= \langle A(w, v) - A(u, v), w - v \rangle + \langle A(u, v), w - u \rangle + \langle A(u, v), u - v \rangle > \\ &> -\frac{\mu}{4R} \|w - v\| - \frac{\mu}{2} + \mu \geq 0, \end{aligned}$$

da $M \subseteq B_R(0)$. Dies ergibt $U \cap M \cap S(v) = \emptyset$, und $S(v)$ ist schwach abgeschlossen in M , also schwach abgeschlossen.

//

Falls nun für beliebige, endlich viele $v_1, \dots, v_m \in M$

$$S(v_1) \cap \dots \cap S(v_m) \neq \emptyset, \quad (9.10)$$

so existiert

$$u \in \cap_{v \in M} S(v) \neq \emptyset,$$

d.h.

$$\langle A(u, v), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Mit dem Minty-Lemma 9.1 folgt

$$\langle f(u), u - v \rangle = \langle A(u, u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M,$$

und u löst (9.7) auf M .

Wir zeigen (9.10). Dazu sei $Y := \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq X$ endlich-dimensional. Setzen wir $\tilde{M} := M \cap Y$ und definieren wir $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow Y^*$, $\tilde{A}: \tilde{M} \times \tilde{M} \rightarrow Y^*$ durch

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}(w, u), v \rangle &:= \langle A(w, u), v \rangle \quad \text{für } w, u \in \tilde{M}, v \in Y, \\ \tilde{f}(u) &:= \tilde{A}(u, u) \quad \text{für } u \in \tilde{M} \end{aligned}$$

so existiert mit Proposition 9.3 ein $u \in \tilde{M}$, das

$$\langle A(u, u), u - v \rangle = \langle \tilde{f}(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in \tilde{M}$$

erfüllt. Mit dem Minty-Lemma 9.1 folgt

$$\langle A(u, v), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in \tilde{M},$$

also

$$u \in S(v_1) \cap \dots \cap S(v_m),$$

da $v_k \in M \cap Y = \tilde{M}$. Dies ergibt (9.10).

//

Es verbleibt zu zeigen, daß (9.6) im Fall $X = M$ aus (9.3), (9.4) folgt. Für $j : Y \hookrightarrow X$ endlich-dimensional ist

$$\tilde{A} := j^* \circ A \circ (j \times j) : Y \times Y \rightarrow Y^*, \quad \tilde{f}(u) := \tilde{A}(u, u),$$

im ersten Argument stetig und im zweiten Argument ein monotoner Operator.

Angenommen

$$\|\tilde{f}(u_k)\| \rightarrow \infty$$

für eine beschränkte Folge $u_k \in Y$. Für eine Teilfolge gilt

$$u_k \rightarrow u \quad \text{stark in } Y, \quad \frac{\tilde{f}(u_k)}{\|\tilde{f}(u_k)\|} \rightarrow \Lambda \quad \text{stark in } Y^*,$$

mit $\|\Lambda\| = 1$.

Da $\tilde{A}$ im zweiten Argument monoton ist, folgt für alle $v \in Y$, daß

$$0 \leq \|\tilde{A}(u_k, u_k)\|^{-1} \langle \tilde{A}(u_k, u_k) - \tilde{A}(u_k, v), u_k - v \rangle \rightarrow \langle \Lambda, u - v \rangle,$$

da $\tilde{A}(u_k, v) \rightarrow \tilde{A}(u, v)$ und $\|\tilde{A}(u_k, u_k)\| \rightarrow \infty$.

Da $v \in Y$ beliebig war, folgt $\Lambda = 0$ im Widerspruch zu $\|\Lambda\| = 1$. Damit ist (9.6) bewiesen.

///

Als Korollar ergibt sich folgender klassischer Satz für Variationsungleichungen für monotone Operatoren.

Korollar 9.2 (Satz von Brouwer 1963, Minty 1963)

X sei ein reflexiver Banachraum und $A : X \rightarrow X^*$ ein monotoner Operator, der koerziv ist im Sinne von

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = \infty. \quad (9.11)$$

Dann ist A surjektiv.

Beweis:

Für $\Lambda \in X^*$ ist

$$f(u) := A(u) - \Lambda$$

ein monotoner Operator. Aus (9.11) folgt

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle f(u), u \rangle}{\|u\|} = \infty,$$

also insbesondere (9.5) für $u_0 = 0$.

Mit Satz 9.1 existiert $u \in X$ mit

$$\langle f(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in X,$$

also $f(u) = 0$ und $A(u) = \Lambda$.

///

Für separables X erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 9.3 *Ist X separabel, so kann in Satz 9.1 die Stetigkeitsbedingung (9.4) durch Vollstetigkeit ersetzt werden, d.h. für $w_k, w \in M, w_k \rightarrow w$ schwach in X gilt*

$$A(w_k, u) \rightarrow A(w, u) \text{ stark in } X^*. \quad (9.12)$$

Beweis:

Wir zeigen allgemein für Banachräume X, Y mit X separabel und reflexiv, $\emptyset \neq M \subseteq X$ beschränkt, daß eine vollstetige Abbildung $g : M \rightarrow Y$ auch schwach-stark-stetig ist.

Da X separabel und reflexiv ist, ist auch X^* separabel, siehe [A] Satz 6.8. Es sei $\{\Lambda_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ dicht in X^* .

Nun sei $V \subseteq Y$ offen in der starken Topologie von Y und $U := g^{-1}(V) \subseteq M \subseteq X$. Wir zeigen, daß U schwach offen in M ist.

Angenommen $x \in U \subseteq M$ sei kein schwach innerer Punkt von U in M , dann existieren $x_k \in M - U$ mit

$$|\Lambda_l(x_k - x)| < 1/k \quad \text{für } l = 1, \dots, k.$$

Daraus folgt

$$\Lambda_l x_k \rightarrow \Lambda_l x \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \text{ für alle } l \in \mathbb{N},$$

und, da $x_k \in M$ beschränkt sind,

$$\Lambda x_k \rightarrow \Lambda x \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \text{ für alle } \Lambda \in X^*.$$

Also

$$x_k \in M - U, \quad x \in M, \quad x_k \rightarrow x \text{ schwach in } X.$$

Da g vollstetig ist, folgt

$$g(x_k) \rightarrow g(x) \in V \quad \text{stark in } Y,$$

also

$$g(x_k) \in V \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dies ist ein Widerspruch, da

$$x_k \notin U = g^{-1}(V).$$

///

Beispiel 9.2 (Quasilineare elliptische Systeme in Divergenzform IV)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty$ und

$$A_i : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$B : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

seien Caratheodoryfunktionen mit den Wachstumsbedingungen

$$|A_i(x, z, w)|, |B(x, z)| \leq \varphi(x) + C(|z|^{p-1} + \|w\|^{p-1}), \quad (9.13)$$

wobei $\varphi \in L^q(\Omega)$, $q = \frac{p}{p-1}$,
mit der Monotoniebedingung

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A_i^j(x, z, w_2) - A_i^j(x, z, w_1)) (w_2 - w_1)_i^j \geq 0 \quad (9.14)$$

und mit den Koerzivitätsbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_i^j(x, z, w) w_i^j &\geq c_0 \|w\|^p - \delta |z|^p - \varphi_\delta(x), \\ \sum_{j=1}^m B^j(x, z) z^j &\geq -\delta |z|^p - \varphi_\delta(x), \end{aligned} \quad (9.15)$$

für ein $c_0 > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ existiert $\varphi_\delta \in L^1(\Omega)$.

Dann hat das quasilineare elliptische System

$$\begin{aligned} -\partial_i(A_i^j(., u, \nabla u)) + B^j(., u) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (9.16)$$

eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, d.h.

$$\int_{\Omega} (A_i^j(., u, \nabla u) \partial_i v^j + B^j(., u) v^j) = 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Beweis:

Es sei $X := W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und $A : X \times X \rightarrow X^*$ mit

$$\langle A(w, u), v \rangle := \int_{\Omega} (A_i^j(., w, \nabla u) \partial_i v^j + B^j(., w) v^j).$$

Mit (9.13) ist A wohldefiniert, beschränkt und stetig, und mit (9.14) ist A im zweiten Argument ein monotoner Operator.

A ist im ersten Argument vollstetig, denn sei $w_k \rightarrow w$ schwach in $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so folgt mit dem Satz von Rellich, Beispiel 4.1, $w_k \rightarrow w$ stark in $L^p(\Omega)$ und mit Beispiel 2.1, daß

$$A(., w_k, \nabla u) \rightarrow A(., w, \nabla u) \quad \text{und} \quad B(., w_k) \rightarrow B(., w) \quad \text{stark in } L^q(\Omega).$$

Für $v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt

$$\begin{aligned} |\langle A(w_k, u) - A(w, u), v \rangle| &\leq \\ &\leq \|A(., w_k, \nabla u) - A(., w, \nabla u)\|_{L^q(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \\ &\quad + \|B(., w_k) - B(., w)\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\|A(w_k, u) - A(w, u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^*} \leq \\ &\leq \|A(., w_k, \nabla u) - A(., w, \nabla u)\|_{L^q(\Omega)} + \|B(., w_k) - B(., w)\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Schließlich verifizieren wir die Koerzitivitätsbedingung (9.5) für $f(u) := A(u, u)$. Es gilt mit (9.15) und der Poincaré-Ungleichung

$$\begin{aligned}\langle f(u), u \rangle &= \int_{\Omega} (A(\cdot, u, \nabla u) \nabla u + B(\cdot, u) u) \geq \\ &\geq c_0 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - 2\delta \|u\|_{L^p(\Omega)}^p - C_{\delta} \geq \\ &\geq c_1 \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - C_{\delta}\end{aligned}$$

für δ klein genug.

Mit Satz 9.1 und Korollar 9.3 existiert eine Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ der Variationsungleichung

$$\langle f(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

also $f(u) = 0$, und u löst (9.16).

///

Beispiel 9.3

Wir betrachten die semilineare elliptische Differentialgleichung

$$\begin{aligned}-\Delta u + B(u) &= \varphi \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{9.17}$$

wobei $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in L^2(\Omega)$, $B \in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R})$ monoton nichtfallend ist.

B erfüllt i.a. nicht die Wachstumsbedingung aus Beispiel 9.2. Wegen der Monotonie von B gilt:

Behauptung:

Es existiert eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $B(u) \in L^2(\Omega)$ von (9.17).

Beweis:

Dazu wählen wir $B_k \in C_b^1(\mathbb{R})$ nichtfallend mit

$$B_k \rightarrow B \quad \text{gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R}.$$

Wir definieren $A_k : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^*$ durch

$$\langle A_k(u), v \rangle := \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + B_k(u) v).$$

Dann ist A_k stetig, monoton und koerziv im Sinne von (9.11), da

$$\begin{aligned}\langle A_k(u) - A_k(v), u - v \rangle &\geq \int_{\Omega} (|\nabla(u - v)|^2 + (B_k(u) - B_k(v))(u - v)) \geq \\ &\geq \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_0 \|u - v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2\end{aligned}$$

mit der Poincaré-Ungleichung.

Mit dem Satz von Brouwer-Minty, Korollar 9.2, existiert $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $A_k(u_k) = \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$, d.h.

$$\int_{\Omega} (\nabla u_k \nabla v + B_k(u_k)v) = \int_{\Omega} \varphi v \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (9.18)$$

Wir können o.B.d.A. $B(0) = B_k(0) = 0$ annehmen, indem wir B durch $B - B(0)$ und φ durch $\varphi - B(0)$ ersetzen. Dann gilt $B_k(z)z \geq 0$ für $z \in \mathbb{R}$.

Für $v = u_k$ in (9.18) folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} (|\nabla u_k|^2 + B_k(u_k)u_k) = \\ &= \int_{\Omega} \varphi u_k \leq \delta \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\delta \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\delta \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\delta \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

mit der Poincaré-Ungleichung, also

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Für eine Teilfolge gilt mit dem Satz von Rellich, Beispiel 4.1,

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \quad \text{schwach in } W_0^{1,2}(\Omega), \text{ stark in } L^2(\Omega), \\ B_k(u_k) &\rightarrow B(u) \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Da $B_k \in C_b^1(\mathbb{R})$, $B_k(0) = 0$, überzeugt man sich leicht, daß $B_k(u_k) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\nabla(B_k(u_k)) = B'_k(u_k)\nabla u_k.$$

Da $B'_k \geq 0$, folgt mit $v = B_k(u_k)$ in (9.18), daß

$$\begin{aligned} \|B_k(u_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} (B'_k(u_k)|\nabla u_k|^2 + B_k(u_k)^2) = \\ &= \int_{\Omega} \varphi B_k(u_k) \leq \frac{1}{2} \|B_k(u_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

also

$$\|B_k(u_k)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mit (9.19), dem Lemma von Fatou und dem Konvergenzsatz von Vitali folgt $B(u) \in L^2(\Omega)$ und

$$B_k(u_k) \rightarrow B(u) \quad \text{schwach in } L^2(\Omega).$$

Dann ergibt (9.18) für $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, daß

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + B(u)v) \leftarrow \int_{\Omega} (\nabla u_k \nabla v + B_k(u_k)v) = \int_{\Omega} \varphi v,$$

also ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine Lösung von (9.17) mit $B(u) \in L^2(\Omega)$.

///

Beispiel 9.4 (Hindernisproblem)

Es seien Ω, A_i, B wie in Beispiel 9.2 für $m = 1$. Weiter sei $u_{\pm} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ meßbar mit

$$u_- \leq 0 \leq u_+.$$

Wir setzen

$$M := \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid u_- \leq v \leq u_+ \text{ fast überall auf } \Omega\}.$$

$M \neq \emptyset$ ist konvex und abgeschlossen in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann existiert nach Satz 9.1 und Korollar 9.3 ein $u \in M$ mit

$$\int_{\Omega} (A(\cdot, u, \nabla u) \nabla(u-v) + B(\cdot, u)(u-v)) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Formal heißt dies

$$\begin{aligned} u_- \leq u \leq u_+ & \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\partial_i(A_i(\cdot, u, \nabla u)) + B(\cdot, u) &= 0 \quad \text{in } [u_- < u < u_+], \\ -\partial_i(A_i(\cdot, u_+, \nabla u_+)) + B(\cdot, u_+) &= \\ = -\partial_i(A_i(\cdot, u, \nabla u)) + B(\cdot, u) &\leq 0 \quad \text{in } [u = u_+], \\ -\partial_i(A_i(\cdot, u_-, \nabla u_-)) + B(\cdot, u_-) &= \\ = -\partial_i(A_i(\cdot, u, \nabla u)) + B(\cdot, u) &\geq 0 \quad \text{in } [u = u_-]. \end{aligned}$$

□

Beispiel 9.5 (Stationäre Navier-Stokes Gleichung in $\mathbb{R}^3$)

Die stationäre Navier-Stokes Gleichung in $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + u \nabla u + \nabla p &= \varphi \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u^0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Dabei ist $\emptyset \neq \Omega \subset \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\partial\Omega$ glatt, $\nu > 0$, $\varphi \in L^{6/5}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und $u^0 \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div} u^0 = 0$.

$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ heißt Lösung von (9.20), falls

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nu \partial_i u_j \partial_i v_j + u_i \partial_i u_j v_j) &= \int_{\Omega} \varphi_j v_j \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ mit } \operatorname{div} v = 0, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u - u^0 &\in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3). \end{aligned} \tag{9.21}$$

Behauptung:

Es existiert $\varepsilon = \varepsilon(\Omega) > 0$ mit:

Falls

$$\|u^0 - \bar{u}^0\|_{L^3(\Omega)} < \varepsilon \nu \quad \text{für ein } \bar{u}^0 \in \mathbb{R}^3, \quad (9.22)$$

so existiert eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ von (9.20).

Beweis:

Es sei $X := \{v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} v = 0\}$ und

$$M := \{v \in X \mid v - u^0 \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)\} = u^0 + (X \cap W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)).$$

Weiter seien $f, A, K : M \rightarrow X^*, f := A + K - \varphi$ und

$$\langle A(u), v \rangle := \int_{\Omega} \nu \partial_i u_j \partial_i v_j, \quad \langle K(u), v \rangle := - \int_{\Omega} u_i u_j \partial_i v_j, \quad \langle \varphi, v \rangle := \int_{\Omega} \varphi_j v_j,$$

für $v \in X$. Dabei beachten wir, daß die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ stetig ist. Daher sind f, A, K für $\varphi \in L^{6/5}(\Omega)$ wohldefiniert und stetig. Weiter bilden f, A, K beschränkte Mengen von $M \subseteq X$ in beschränkte Mengen von X^* ab.

Mit Approximation von $u \in X \subseteq W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und $v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ durch Funktionen aus $C^\infty(\bar{\Omega})$ bzw. $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ zeigt man für $u \in M, v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ die Identität

$$\langle K(u), v \rangle = - \int_{\Omega} u_i u_j \partial_i v_j = \int_{\Omega} (\partial_i u_i) u_j v_j + \int_{\Omega} u_i \partial_i u_j v_j = \int_{\Omega} u_i \partial_i u_j v_j.$$

Damit sehen wir für eine Lösung $u \in M$ der Variationsungleichung

$$\langle f(u), u - \tilde{v} \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{v} \in M \quad (9.23)$$

und für $v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} v = 0$, also $v \in X \cap W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, durch Einsetzen von $\tilde{v} := u \pm v \in u^0 + (X \cap W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)) = M$, dass

$$0 = \langle f(u), v \rangle = \int_{\Omega} (\nu \partial_i u_j \partial_i v_j + u_i \partial_i u_j v_j - \varphi_j v_j),$$

und u erfüllt (9.21) und ist somit eine Lösung der stationären Navier-Stokes Gleichung (9.20).

Klarerweise ist A ein monotoner Operator.

Um die Stetigkeitsbedingung für $A(w, u) := A(u) + K(w) - \varphi$ im ersten Argument zu verifizieren, genügt es zu zeigen, daß K vollstetig ist.

Dazu sei $u^k, u \in M$ und $u^k \rightharpoonup u$ schwach in X . Mit der stetigen Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, dem Satz von Rellich, Beispiel 4.1, und dem Konvergenzsatz von Vitali folgt

$$u^k \rightarrow u \quad \text{stark in } L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

und

$$u_i^k u_j^k \rightarrow u_i u_j \quad \text{stark in } L^2(\Omega). \quad (9.24)$$

Daraus folgt

$$\|K(u^k) - K(u)\|_{X^*} \leq \sum_{i,j=1}^3 \|u_i^k u_j^k - u_i u_j\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mit (9.24) folgt $K(u^k) \rightarrow K(u)$ stark in X^* , und K ist vollstetig.

Es verbleibt die Koerzitivitätsbedingung (9.5) zu verifizieren. Dazu betrachten wir für $u \in M, v := u - u^0 \in X \cap W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und rechnen

$$\langle f(u) - f(u^0), u - u^0 \rangle = \nu \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} (u_i u_j - u_i^0 u_j^0) \partial_i v_j. \quad (9.25)$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} u_i u_j - u_i^0 u_j^0 &= v_i u_j^0 + u_i^0 v_j + v_i v_j = \\ &= v_i \bar{u}_j^0 + (\bar{u}_i^0 + v_i) v_j + \left(v_i (u_j^0 - \bar{u}_j^0) + (u_i^0 - \bar{u}_i^0) v_j \right). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Setzen wir die ersten beiden Terme in (9.25) ein, so erhalten wir

$$\int_{\Omega} v_i \bar{u}_j^0 \partial_i v_j = - \int_{\Omega} (\partial_i v_i) \bar{u}_j^0 v_j = 0$$

und

$$\int_{\Omega} (\bar{u}_i^0 + v_i) v_j \partial_i v_j = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{u}_i^0 + v_i) \partial_i (|v|^2) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_i (\bar{u}_i^0 + v_i) |v|^2 = 0,$$

da $|v|^2 \in L^3(\Omega)$, $v_j \partial_i v_j \in L^{3/2}(\Omega)$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, also $|v|^2 \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$ und $v + \bar{u}^0 \in W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$.

Setzen wir die letzten beiden Terme aus (9.26) in (9.25) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (v_i (u_j^0 - \bar{u}_j^0) + (u_i^0 - \bar{u}_i^0) v_j) \partial_i v_j \right| \leq \\ & \leq C \|v\|_{L^6(\Omega)} \|u^0 - \bar{u}^0\|_{L^3(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \varepsilon \nu \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

wobei wir (9.22) und die Stetigkeit der Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ verwendet haben.

Mit (9.25) und der Poincaré-Unlgeichung erhalten wir

$$\langle f(u) - f(u^0), u - u^0 \rangle \geq c_0 \nu \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2,$$

falls ε klein genug ist. Daraus folgt für $u \in M$ mit $\|u\|_X \rightarrow \infty$, daß

$$\frac{\langle f(u) - f(u^0), u - u^0 \rangle}{\|u - u^0\|_X} \rightarrow \infty$$

und

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \langle f(u), u - u^0 \rangle = \infty,$$

d.h. (9.5). Aus Satz 9.1 und Korollar 9.3 folgt nun, daß eine Lösung $u \in M$ der Variationsungleichung (9.23) existiert. Wie oben bemerkt, erfüllt u (9.21) und ist somit eine Lösung der stationären Navier-Stokes Gleichung (9.20).

///

Teil III

Appendix

A Der Satz von Sard

In diesem Anhang geben wir einen Beweis für den Satz von Sard für glatte Abbildungen und folgen dabei und [M].

Satz A.1 (Satz von Sard [S], [M]) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, und $f \in C_{loc}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann ist die Menge der singulären Werte von f , d.h. die Menge aller $y \in \mathbb{R}^m$ für die ein $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$ und*

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ ist nicht surjektiv}$$

existiert, eine $\mathcal{L}^m$ -Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.

Beweis:

Wir betrachten die Mengen der singulären Punkte

$$C_0 := \{x \in \Omega \mid \text{rank } Df(x) < m\}$$

und

$$C_k := \{x \in \Omega \mid D^j f(x) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, k\} \quad \text{für } k = 1, \dots, l,$$

$C_{l+1} := \emptyset, l \in \mathbb{N}$, und zeigen

$$\mathcal{L}^m(f(C_k - C_{k+1})) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, l, \quad (\text{A.1})$$

wenn $lm \geq n$, was die Behauptung beweist.

Für $k = l, lm \geq n$ und $x \in C_l$ sehen wir mit dem Satz von Taylor, dass $f(x+h) - f(x) = o(|h|^l)$, genauer existiert mit der gleichmässigen Stetigkeit von $D^l f$ für jedes kompakte $K \subseteq \Omega$ und $\varepsilon > 0$ ein $\varrho_{K,\varepsilon} > 0$ mit $d(K, \partial\Omega) > \varrho_{K,\varepsilon}$ und

$$f(B_{\varrho}(x)) \subseteq B_{\varepsilon \varrho^l}(f(x)) \quad \text{für alle } 0 < \varrho < \varrho_{K,\varepsilon}, x \in C_l \cap K. \quad (\text{A.2})$$

Nun wählen wir für $0 < \varrho < \varrho_{K,\varepsilon}$ eine maximale Menge paarweise verschiedener Punkte $x_j \in C_l \cap K, j \in J$, mit $|x_i - x_j| \geq \varrho$ für $i \neq j$. Dann gilt mit der Maximalität

$$C_l \cap K \subseteq \bigcup_{j \in J} B_{\varrho}(x_j) \quad (\text{A.3})$$

und andererseits sind $B_{\varrho/2}(x_j), j \in J$, paarweise disjunkt, insbesondere

$$\begin{aligned} |J| \varrho^n 2^{-n} \mathcal{L}^n(B_1(0)) &= \sum_{j \in J} \mathcal{L}^n(B_{\varrho/2}(x_j)) = \mathcal{L}^n(\bigcup_{j \in J} B_{\varrho/2}(x_j)) \leq \\ &\leq \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) < \varrho_{K,\varepsilon}\}) =: M_K < \infty, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

und $|J|$ ist endlich. Mit (A.2) und (A.3) erhalten wir

$$\mathcal{L}^m(f(C_l \cap K)) \leq \mathcal{L}^m(\cup_{j \in J} f(B_{\varrho}(x_j))) \leq \sum_{j \in J} \mathcal{L}^m(B_{\varepsilon \varrho^l}(f(x_j))) \leq |J|(\varepsilon \varrho^l)^m \mathcal{L}^m(B_1(0)).$$

Da $lm \geq n$, ergibt dies für $\varepsilon, \varrho_{K,\varepsilon} < 1$ mit (A.4), dass

$$\mathcal{L}^m(f(C_l \cap K)) \leq |J| \varepsilon \varrho^n \mathcal{L}^m(B_1(0)) \leq C_{n,m} M_K \varepsilon,$$

also $\mathcal{L}^m(f(C_l \cap K)) = 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\mathcal{L}^n(f(C_l)) = 0$ mit einer abzählbaren Ausschöpfung von Ω mit kompakten Mengen. Dies ergibt (A.1) für $k = l$.

Für $n = 1, k = 0, \dots, l-1$ besteht

$$C_k - C_{k+1} \subseteq [f^{(k)} = 0] \cap [f^{(k+1)} \neq 0]$$

nur aus isolierten Punkten, ist also höchstens abzählbar. Daraus folgt (A.1) für $k = 0, \dots, l-1$ sofort, und der Satz ist für $n = 1$ bewiesen.

Für $n \geq 2$ beweisen wir den Satz mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für $k = 0, m = 1$ sehen wir

$$C_0 = \{x \in \Omega \mid \text{rank } Df(x) < m = 1\} = [Df = 0] = C_1,$$

also $C_0 - C_1 = \emptyset$, und (A.1) ist für $k = 0, m = 1$ trivial erfüllt. Für $k = 0, m \geq 2$ und $x \in C_0 - C_1$ ist $Df(x) \neq 0$, z.B. $\partial_n f_m(x) \neq 0$ nach Ummumerierung, und zum Beweis von (A.1) für $k = 0$ genügt es zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^m(f(C_0 \cap [\partial_n f_m \neq 0])) = 0.$$

Da $A := C_0 \cap [\partial_n f_m \neq 0]$ in $\Omega \cap [\partial_n f_m \neq 0]$ abgeschlossen ist, kann diese Menge als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen geschrieben werden. Da deren Bild unter der stetigen Abbildung f wieder kompakt sind, ist $f(C_0 \cap [\partial_n f_m \neq 0])$ eine Borelmenge, insbesondere $\mathcal{L}^m$ -messbar.

Da $m \geq 2$, genügt mit dem Satz von Fubini zu zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{m-1}(\{z \in \mathbb{R}^{m-1} \mid (z, t) \in f(A)\}) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir

$$A_t := A \cap [f_m = t] = C_0 \cap [f_m = t] \cap [\partial_n f_m \neq 0]$$

und $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}, \pi(z, z_m) := z$, so müssen wir zeigen, dass

$$\mathcal{L}^{m-1}((\pi \circ f)(A_t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.5})$$

Da $n \geq 2$, existiert zu $x \in A_t = C_0 \cap [f_m = t] \cap [\partial_n f_m \neq 0]$ mit dem Satz über implizite Funktionen eine C^∞ -Funktion $\psi : V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi(0) = 0$ und

$$U(x) \cap [f_m = f_m(x) = t] \subseteq x + \{(y, \psi(y)) \mid y \in V(0)\}$$

für geeignet kleine Umgebungen $U(x) \subseteq \mathbb{R}^n, V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Machen wir in $U(x)$ den C^∞ -Parameterwechsel $(y, s) \mapsto x + (y, \psi(y) + s)$, was das Bild von $\pi \circ f$ unverändert

lässt, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\psi \equiv 0, x = 0$, also $f_m(y, 0) = t$. Setzen wir $\varphi(y) := (\pi \circ f)(y, 0)$, so erhalten wir

$$Df(y, 0) = \begin{pmatrix} D\varphi(y) & * \\ 0 & \partial_n f_m(y, 0) \end{pmatrix}.$$

Da $\partial_n f_m(y, 0) \neq 0$ für $V(0)$ genügend klein, da $\partial_n f_m(x) \neq 0$, so sehen wir

$$\text{rank } Df(y, 0) = 1 + \text{rank } D\varphi(y)$$

oder anders ausgedrückt

$$Df(y, 0) \text{ ist surjektiv} \iff D\varphi(y) \text{ ist surjektiv.}$$

Da $Df(y, 0)$ für $(y, 0) \in C_0$ nicht surjektiv ist, sehen wir

$$(\pi \circ f)(A_t \cap U(x)) \subseteq \{ \text{singuläre Werte von } \varphi \}.$$

Da $\varphi \in C^\infty$, erhalten wir mit Induktion

$$\mathcal{L}^{m-1}((\pi \circ f)(A_t \cap U(x))) = 0 \quad \text{für jedes } x \in A_t.$$

Überdecken wir A_t mit abzählbar vielen $U(x)$, so folgt (A.5), und (A.1) ist für $k = 0$ bewiesen.

Für $k = 1, \dots, l-1$ und $x \in C_k - C_{k+1}$ gilt $D^j f(x) = 0$ für $j = 1, \dots, k$ und $D(D^k f)(x) = D^{k+1} f(x) \neq 0$, z.B. $\partial_n D^\gamma f_m(x) \neq 0$ für einen Multiindex γ mit $|\gamma| = k \geq 1$ nach Umnummerierung. Da $D^k f \in C^\infty$, existiert mit dem Satz über implizite Funktionen und eine C^∞ -Funktion $\psi : V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$U(x) \cap C_k - C_{k+1} \subseteq U(x) \cap [D^\gamma f_m = 0] \subseteq x + \{(y, \psi(y)) \mid y \in V(0)\}$$

für geeignet kleine Umgebungen $U(x) \subseteq \mathbb{R}^n, V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Nun betrachten wir $\varphi : V(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(y) := f(x + (y, \psi(y)))$. Für $x + (y, \psi(y)) \in C_k - C_{k+1}$ haben wir insbesondere $Df(x + (y, \psi(y))) = 0$, also auch $D\varphi(y) = 0$. Dies ergibt

$$f(U(x) \cap C_k - C_{k+1}) \subseteq \{ \text{singuläre Werte von } \varphi \}.$$

Da $\varphi \in C^\infty$, erhalten wir mit Induktion

$$\mathcal{L}^m(U(x) \cap C_k - C_{k+1}) = 0 \quad \text{für jedes } x \in C_k - C_{k+1}.$$

Überdecken wir $C_k - C_{k+1}$ mit abzählbar vielen $U(x)$, so folgt (A.1) für $k = 1, \dots, l-1$, und der Satz ist bewiesen.

///

Bemerkung:

Tatsächlich gilt der Satz von Sard für C^l -Abbildungen $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$l > \max(n - m, 0), \tag{A.6}$$

siehe [S].

□

B Topologische Anwendungen des Abbildungsgrades

Satz B.1 (Satz vom Igel)

Es sei $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \in \Omega$ und

$$f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

sei stetig. Wenn n ungerade ist, so existiert $x \in \partial\Omega$ und $\lambda \neq 0$ mit

$$f(x) = \lambda x.$$

Beweis:

Da n ungerade ist, gilt mit Proposition 7.4 (ii)

$$\deg(-id, \Omega, 0) = \text{ind}(-id, 0) = -1.$$

In jedem Fall gilt mit (7.1)

$$\deg(id, \Omega, 0) = \text{ind}(id, 0) = 1.$$

Wir erweitern f zu einer stetigen Abbildung

$$f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

und wählen $\sigma \in \{\pm 1\}$ mit

$$\deg(f, \Omega, 0) \neq \deg(\sigma id, \Omega, 0).$$

Mit Proposition 7.3 hat die Homotopie

$$\Phi(x, t) := (1 - t)f(x) + \sigma tx$$

eine Nullstelle $(x, t) \in \partial\Omega \times]0, 1[$. Dies ergibt

$$f(x) = -\frac{\sigma t}{1 - t}x.$$

///

Korollar B.2 *Es existiert ein stetiges, tangentiales, nicht verschwindendes Vektorfeld an $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn n gerade ist.*

Beweis:

Ist $n = 2m$ gerade, so definieren wir $f : S^{n-1} = \partial B_1(0) \rightarrow S^{n-1}$ durch

$$f(x_1, \dots, x_{2m}) := (x_{m+1}, \dots, x_{2m}, -x_1, \dots, -x_m).$$

Dann ist f stetig, $f \neq 0$ und $f(x)$ orthogonal zu x , also tangential an S^{n-1} .

Ist n ungerade, und f ein stetiges, nichtverschwindendes Vektorfeld an S^{n-1} , d.h.

$$f : S^{n-1} = \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\},$$

so existiert nach dem Satz vom Igel, Satz B.1, ein $x \in S^{n-1}$ und $\lambda \neq 0$ mit

$$f(x) = \lambda x,$$

und $f(x)$ ist nicht tangential an S^{n-1} in x .

///

Satz B.3 (Satz von Borsuk)

Es sei $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, symmetrisch bezüglich 0 und $0 \in \Omega$. Für stetiges, ungerades

$$f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\},$$

d.h.

$$f(-x) = -f(x),$$

gilt nach Erweiterung zu $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, daß

$$\deg(f, \Omega, 0) \text{ ungerade ist.}$$

Beweis:

Wir erweitern f zu $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und setzen

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Dann ist $\tilde{f}$ ungerade und

$$\tilde{f} = f \text{ auf } \partial\Omega,$$

da f ungerade auf $\partial\Omega$ ist. Daher betrachten wir o.B.d.A. $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ungerade.

Nun wählen wir $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f_i - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0.$$

Wir setzen

$$\tilde{f}_i(x) := \frac{1}{2}(f_i(x) - f_i(-x)).$$

Dann ist $\tilde{f}_i$ ungerade, und es gilt

$$\|\tilde{f}_i - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \rightarrow 0.$$

da f ungerade ist. Für große i gilt

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(\tilde{f}_i, \Omega, 0),$$

und wir können o.B.d.A. annehmen, daß $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

Schließlich wählen wir $\lambda \notin \text{spec}(Df(0))$, $\lambda > 0$ beliebig klein und setzen $\bar{f} = f - \lambda id$, also o.B.d.A.

$$Df(0) \text{ invertierbar.}$$

Im nächsten Schritt wollen wir 0 als regulären Wert erhalten. Genauer:

Behauptung:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $g \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ungerade mit

$$\|g - f\|_{C^0(\overline{\Omega})} < \varepsilon,$$

und 0 ist regulärer Wert von g .

□

Aus der Behauptung folgt der Satz leicht, denn für ε klein gilt mit Proposition 7.4 (iii), $0 \in \Omega$ und $g(0) = 0$, daß

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0) = \operatorname{sgn} \det Dg(0) + \sum_{0 \neq x \in g^{-1}(0)} \operatorname{sgn} \det Dg(x). \quad (\text{B.1})$$

Da g ungerade ist, gilt für $x \neq 0$ mit $g(x) = 0$ auch $g(-x) = 0$, und g hat eine ungerade Anzahl von Nullstellen. Für jede dieser Nullstellen x , auch für $x = 0$, gilt $\operatorname{sgn} \det Dg(x) \in \{\pm 1\} \equiv 1 \text{ modulo } 2$, also ist $\deg(f, \Omega, 0) \equiv 1 \text{ modulo } 2$, d.h. ungerade, wie im Satz behauptet.

//

Beweis der Behauptung:

Für $k = 0, \dots, n$ betrachten wir die offenen Mengen

$$\Omega_k := \{x \in \Omega \mid x_i \neq 0 \text{ für ein } 1 \leq i \leq k\},$$

insbesondere $\Omega_0 = \emptyset$. Wir wählen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ungerade, mit $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi(t) \neq 0$ für $t \neq 0$.

Wir definieren durch Induktion über $k = 0, \dots, n$ Funktionen $g_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ beliebig nahe an f in $C^0(\overline{\Omega})$ und ungerade mit

$$Dg_k(0) = Df(0), \quad (\text{B.2})$$

0 ist regulärer Wert von $g_k|_{\Omega_k}$.

Da $\Omega_0 = \emptyset$ erfüllt $g_0 = f$ (B.2) für $k = 0$.

Für $k = 1, \dots, n$ wählen wir g_{k-1} , das (B.2) für $k-1$ erfüllt, und weiter einen regulären Wert $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$, beliebig klein, der Funktion

$$\bar{g}_k(x) := \frac{g_{k-1}(x)}{\varphi(x_k)}$$

auf der offenen Menge $\{x \in \Omega \mid x_k \neq 0\}$, und setzen

$$g_k(x) := g_{k-1}(x) - \lambda_k \varphi(x_k).$$

Es gilt $g_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ungerade, und für λ_k klein ist g_k beliebig nahe an g_{k-1} bzw. f in $C^0(\overline{\Omega})$. Für $x \in \Omega$ mit $x_k = 0$ gilt

$$\begin{aligned} g_k(x) &= g_{k-1}(x), \\ Dg_k(x) &= Dg_{k-1}(x), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

da $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, insbesondere

$$Dg_k(0) = Df(0).$$

Nun sei $x \in \Omega_k$ mit

$$g_k(x) = 0.$$

Ist $x_k = 0$, so folgt $x \in \Omega_{k-1}$ und mit (B.3) $g_{k-1}(x) = 0$, und, da 0 ein regulärer Wert von $g_{k-1}|_{\Omega_{k-1}}$ ist, folgt wieder mit (B.3), daß $Dg_k(x)$ invertierbar ist.

Ist $x_k \neq 0$, so gilt

$$g_k(x) = \varphi(x_k)(\bar{g}_k(x) - \lambda_k)$$

insbesondere

$$\bar{g}_k(x) = \lambda_k$$

und, da λ_k ein regulärer Wert von $\bar{g}_k$ auf $\{x \in \Omega \mid x_k \neq 0\}$ ist, ist

$$D\bar{g}_k(x) \text{ invertierbar.}$$

Weiter gilt

$$Dg_k(x) = \varphi(x_k)D\bar{g}_k(x) + \varphi'(x_k)(\bar{g}_k(x) - \lambda_k)e_k^T = \varphi(x_k)D\bar{g}_k(x),$$

da $\bar{g}_k(x) = \lambda_k$. Nun ist $\varphi(x_k) \neq 0$ und somit $Dg_k(x)$ invertierbar. Also ist 0 ein regulärer Wert von $g_k|_{\Omega_k}$.

//

Schließlich setzen wir $g = g_n$, und 0 ist ein regulärer Wert von g auf Ω , da $Dg(0)$ invertierbar ist und 0 ein regulärer Wert von g_n auf $\Omega_n = \Omega - \{0\}$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

///

Korollar B.4 (Satz von Borsuk-Ulam)

Es sei $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen, symmetrisch bezüglich 0 und $0 \in \Omega$. Weiter sei

$$f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

stetig und $m < n$.

Dann existiert $x \in \partial\Omega$ mit

$$f(x) = f(-x).$$

□

Beweis:

Falls nicht, so hat die ungerade Abbildung $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$g(x) := f(x) - f(-x)$$

keine Nullstelle auf $\partial\Omega$. Wir erweitern g zu $g \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Für $y \in B_\varepsilon^n(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und ε klein folgt mit Proposition 7.3 und dem Satz von Borsuk, Satz B.3, daß

$$\deg(g, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, 0) \neq 0.$$

Dann folgt mit Proposition 7.2, daß

$$B_\varepsilon^n(0) \subseteq g(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^m,$$

also ein Widerspruch.

///

Korollar B.5 (Satz von Lusternik-Schnirelmann)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, symmetrisch bezüglich 0 und $0 \in \Omega$. $A_1, \dots, A_n$ seien abgeschlossene Teilmengen von $\partial\Omega$ mit

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Dann enthält mindestens eine der Mengen A_i ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in A_i$.

Beweis: Es sei $\varphi_i : \partial\Omega \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$\varphi_i(x) := d(x, A_i),$$

und wir definieren $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ durch

$$f := (\varphi_i)_{i=1, \dots, n-1}.$$

Nach dem Satz von Borsuk-Ulam, Korollar B.4, existiert ein $x \in \partial\Omega$ mit

$$f(x) = f(-x). \quad (\text{B.4})$$

Nun gilt $x \in A_i$ für ein $i = 1, \dots, n$.

Ist $1 \leq i < n$, so folgt

$$\varphi_i(x) = 0$$

und mit (B.4)

$$\varphi_i(-x) = 0.$$

Dies ergibt $x, -x \in A_i$.

Ist $x \notin A_i$ für $i = 1, \dots, n-1$, so gilt $x \in A_n$ und $\varphi_i(x) \neq 0$ für $i = 1, \dots, n-1$. Wieder folgt mit (B.4)

$$\varphi_i(-x) \neq 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1,$$

also $-x \notin A_i$. Daraus folgt $x, -x \in A_n$.

///

Literatur

- [A90] Alt, H.W., (1990) Funktionalanalysis II, Vorlesungsmitschrift Universität Bonn.
- [A] Alt, H.W., (1999) Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [B] Berger, M., (1977) Nonlinearity in Functional Analysis, Academic Press, New York - San Francisco - London.
- [D] Deimling, K., (1980) Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [Fr] Friedman, A., (1982) Variational Principles and Free Boundary Problems, Wiley & Sons, New York.
- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., (1998) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, 3.Auflage, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.
- [M] Milnor, J., (1965) Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville.
- [N] Nirenberg, L., (1973) Topics in Nonlinear Functional Analysis, New York University.
- [Ru] Rudin, W.T., (1973) Functional Analysis, McGraw-Hill, New York.
- [S] Sard, A., (1942) The measure of the critical values of differentiable maps, Bulletin of the American Mathematical Society, **48**, pp. 883-890.
- [Z] Zeidler, E., (1985) Nonlinear Functional Analysis and its Applications I. Fixed-Point Theorems, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.